ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS (FUNKTIONALANALYSIS I)

BLATT 9

ABGABE DER MIT * GEKENNZEICHNETEN AUFGABEN ZUM 22.12.2006

AUFGABE 1:

Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Vektorraum und $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ linear. Dann sind folgende Aussage äquivalent:

- (i) φ ist stetig
- (ii) $\text{Ker } \varphi = \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ ist abgeschlossen
- (iii) $\text{Ker } \varphi$ ist nicht dicht in E
- (iv) φ ist beschränkt auf $\{x : \|x\|_E \leq 1\}$

AUFGABE 2:

Sei $P([-1, 1])$ der Vektorraum aller Polynomen auf $[-1, 1]$ mit Supremumsnorm. Beweisen Sie

- (a) $\varphi : P([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(f) = f'(0)$ ist linear aber nicht stetig.
- (b) $\{f \in P : f'(0) = 0\}$ ist dicht in $P([-1, 1])$.

AUFGABE 3:

Konstruieren Sie einen Operator $\varphi : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $f : \|f\|_{C([0, 1])} \leq 1$

$$|\varphi(f)| < \|\varphi\|.$$

AUFGABE 4*:

Sei $A : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ durch $(Ax)_k = \frac{x_k}{k}$ gegeben. Beweisen Sie, dass

- (a) $A \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$,
- (b) $R(A) = \{Ax : x \in \ell_\infty\}$ ist nicht abgeschlossen,
- (c) Es existiert $A^{-1} : R(A) \rightarrow \ell_\infty$ und $A^{-1} \notin \mathcal{L}(R(A), \ell_\infty)$.
- (d) $A : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ ist kompakt.

AUFGABE 5:

Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt

- (a) $M_A \subset \mathbb{C}$ ist offen,
- (b) $S_A \subset \mathbb{C}$ ist kompakt.

AUFGABE 6*:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $K(x, y) \in L_p(\Omega \times \Omega), 1 \leq p < \infty$. Dann ist

$$\mathbb{K} : L_{p'}(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega); (\mathbb{K}f)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)f(y)dy$$

kompakt.

AUFGABE 7:

Die Einbettung $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty, 1 \leq p \leq \infty$, ist nicht kompakt.