Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

# Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 9 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 22.12.2006

Aufgabe 1:

Sei $(E, ||\cdot||_E)$ ein normierter Vektorraum und $\varphi : E \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind folgende Aussage äquivalent:

(i) $\varphi$ ist stetig
(ii) $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ ist abgeschlossen
(iii) $\operatorname{Ker}\varphi$ ist nicht dicht in $E$
(iv) $\varphi$ ist beschränkt auf $\{x : ||x||_E \leq 1\}$

Aufgabe 2:

Sei $\mathrm{P}([-1,1])$ der Vektorraum aller Polynomen auf $[-1,1]$ mit Supremumsnorm. Beweisen Sie

(a) $\varphi : \mathrm{P}([-1,1]) \to \mathbb{R}, \varphi(f) = f'(0)$ ist linear aber nicht stetig.
(b) $\{f \in \mathrm{P} : f'(0) = 0\}$ ist dicht in $\mathrm{P}([-1,1])$.

Aufgabe 3:

Konstruieren Sie einen Operator $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, so dass für alle $f : ||f|C([0,1])|| \leq 1$

$$|\varphi(f)| < ||\varphi|| \ .$$

Aufgabe 4*:

Sei $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$ durch $(Ax)_k = \frac{x_k}{k}$ gegeben. Beweisen Sie, dass

(a) $A \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$,
(b) $R(A) = \{Ax : x \in \ell_\infty\}$ ist nicht abgeschlossen,
(c) Es existiert $A^{-1} : R(A) \to \ell_\infty$ und $A^{-1} \notin \mathcal{L}(R(A), \ell_\infty)$.
(d) $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$ ist kompakt.

Aufgabe 5:

Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt

(a) $M_A \subset \mathbb{C}$ ist offen,
(b) $S_A \subset \mathbb{C}$ ist kompakt.

Aufgabe 6*:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $K(x,y) \in L_p(\Omega \times \Omega), 1 \leq p < \infty$. Dann ist

$$\mathbb{K} : L_{p'}(\Omega) \to L_p(\Omega); (\mathbb{K}f)(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y)dy$$

kompakt.

Aufgabe 7:

Die Einbettung $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty, 1 \leq p \leq \infty$, ist nicht kompakt.