Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis II (Funktionalanalysis II)

Blatt 0 Sommersemester 2007

Spektralsatz
Sei H ein Hilbertraum mit $\dim H = \infty$, $A \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt:

Das Spektrum besteht aus 0 und abzählbar unendlich vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich in 0 häufen. Es sei $\{\lambda_j\}$ die geordnete Folge ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$) der Eigenwerte, dann existiert ein ONS von Eigenvektoren $\{x_j\}$ mit:

(i) $Ax_j = \lambda_j x_j$

(ii) Ist $H_n = \{x \in H : \langle x, x_j \rangle = 0, j = 1, \dots, n\}$, so gilt

$$|\lambda_n| = \sup_{x \in H_n, \|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| = \|A\|_{\mathcal{L}(H_n)} .$$

(iii) Für alle $x \in H$ gilt

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n . \qquad \textbf{Spektraldarstellung}$$

(iv) Ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert, so ist $\{x_j\}$ eine ONB in H; insbesondere ist H dann separabel.

Normaldarstellung kompakter Operatoren
Es seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ kompakt. Dann existieren ONS $\{e_k\}$ von H_1 und $\{f_k\}$ von H_2 sowie Zahlen $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0$ mit $s_k \to 0$, so daß

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle x, e_k \rangle f_k \quad \text{für alle } x \in H_1.$$

Die Zahlen s_k^2 sind die in ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von T^*T; die s_k selbst heißen die singulären Zahlen von T.

Aufgabe 1:

Es sei H ein Hilbertraum, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\lambda_k \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_k| < r$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $T : H \to H$ durch

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k .$$

Zeigen Sie, daß

(a) $T \in \mathcal{L}(H)$

(b) T ist kompakt $\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \lambda_k \to 0$.

Aufgabe 2:

Es sei $T : \ell_2 \to \ell_2$ der Multiplikationsoperator $(x_n) \mapsto (x_n/n)$ und $S : \ell_2 \to \ell_2$ sei der Rechtsshiftoperator $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$.
Zeigen Sie, daß der Operator $R := ST \in \mathcal{L}(\ell_2)$ und kompakt ist. Gib $|R| = (R^*R)^{1/2}$ sowie die singulären Zahlen von R an.
Wie sieht die Situation für den Linksshiftoperator aus?