Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS II (FUNKTIONALANALYSIS II)

Blatt 1 | Sommersemester 2007

Der Satz von Baire
In einem vollständigen metrischen Raum hat die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter abgeschlossener Mengen keine inneren Punkte.

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit (PUB)
Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ mit $||Tx||_Y \le M_x$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Dann ist $\sup\limits_{T\in\mathcal{T}} ||T|| < \infty$

Aufgabe 1:
Sei $X = c_{00}$, $Y = \mathbb{R}$ und $T_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \dots$

$$T_n(\{x_k\}_{k=1}^\infty) = \sum_{k=1}^n x_k \ .$$

Zeigen Sie, dass

(a) $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ für alle $n = 1, 2, \dots,$
(b) $|T_n x| \le M_x$ für alle $n = 1, 2, \dots,$
(c) $\sup\limits_{n=1,2,\dots} ||T_n|| = \infty$.

Der Raum c_{00} ist also nicht vollständig und die Vollständigkeit von X darf man in PUB nicht weglassen.

Aufgabe 2:
Sei $T_n = S^n$, wo

$$S : \ell^2 \to \ell^2, \qquad S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Finden Sie $||T_n||$, $\lim\limits_{n\to\infty} ||T_n||$ und $\lim\limits_{n\to\infty} ||T_n x||$.

Aufgabe 3:
Sei X ein Banachraum und $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Sei $|f(x_n)| \le c_f$ für alle $f \in X'$ und $n = 1, 2, \dots$. Zeigen Sie, dass $\{x_n\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 4:
Sei X und Y Banachräume und $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n = 1, 2, \dots$. Dann sind folgende Aussage äquivalent

(a) $\{||T_n||\}$ ist beschränkt,
(b) $\{||T_n x||\}$ ist beschränkt für alle $x \in X$,
(c) $\{g(T_n x)\}$ ist beschränkt für alle $x \in X$ und $g \in Y'$.

Aufgabe 5:
Sind die Funktionen f_n aus $C([a,b])$ und konvergiert $f_n(t) \to f(t)$ für jedes $t \in [a,b]$, so liegt die Menge der Stetigkeitspunkte von f dicht in $[a,b]$.

Aufgabe 6:
Es gibt eine Funktion, die in jedem Punkt des Intervalles $[0,1]$ stetig, in keinem jedoch differenzierbar ist.