Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis II (Funktionalanalysis II)

Blatt 2 Sommersemester 2007

Satz von Banach-Steinhaus

Sei X, Y Banachräume und $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Dann konvergiert $\{A_j\}$ punktweise gegen einen Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann, wenn

(i) $\{||A_j||\}$ ist beschränkt und $\{A_j x\}$ konvergiert in Y für alle $x \in X_0$, wobei $X_0 \subset X$ dicht liegt oder
(ii) $\{||A_j||\}$ ist beschränkt und $\{A_j x\}$ konvergiert in Y für alle $x \in X$.

Satz vom inversen Operator

Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Der Satz vom abgeschlossenen Graphen – Closed Graph Theorem

Seien X, Y Banachräume und A linear und abgeschlossen von X nach Y mit $D(A) = X$. Dann ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Aufgabe 1: **Vollständigkeit**

(a) Sei wieder $X = c_{00}$, $Y = \mathbb{R}$ und $T_n : X \to Y, T_n(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^{n} x_j$. Dann konvergiert

$$T_n x \to Tx = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \quad \text{für alle } x \in c_{00}, \text{ aber } T \text{ ist } \textit{nicht} \text{ stetig.}$$

(b) Für $X = Y = c_{00}$ und $Tx = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und bijektiv. Ist T^{-1} stetig?
(c) Sei $X = \{g \in C([0,1]) : \text{es existiert } g' \in C([0,1])\}$ mit sup-Norm und $T : X \to C, Tg = g'$. Dann ist T abgeschlossen und unbeschränkt.

Aufgabe 2:

(a) Seien $(X, ||\cdot||_1)$ und $(X, ||\cdot||_2)$ vollständig. Falls $||x||_1 \le c||x||_2$ für alle $x \in X$, dann sind $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ äquivalent.
(b) Zeigen Sie, dass der Raum $C([0,1])$ mit Integralnorm $||f||_1 = \int_0^1 |f|$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 3: **Konvergenz von Operatoren**

Seien $X = Y = L_1([0,1])$ und

$$(A_n f)(t) = \begin{cases} f(t + \frac{1}{n}), & \text{falls } t + \frac{1}{n} < 1 \\ 0, & \text{falls } t + \frac{1}{n} \ge 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A_n f \to If = f$ in Y für alle $f \in X$, aber $A_n \not\to I$ in $L(X,Y)$.

Aufgabe 4: **Neumannsche Reihe**

Sei X Banachraum und $A \in L(X,X)$. Für jedes $x \in X$ sei die Reihe $Bx = \sum_{n=0}^{\infty} A^n x$ konvergent. Dann ist $I - A$ bijektiv und $(I-A)^{-1} = B$ ist beschränkt.

Aufgabe 5: **Der Töplitzsche Permanenzsatz**

Sei $A = \{a_{i,k}\}_{i,k=1}^{\infty}$ eine unendliche Matrix. Eine Zahlenfolge $\{y_k\}$ heißt A-limitierbar zum Werte y, wenn die Reihen $z_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} y_k$ für $i = 1, 2, \dots$ konvergieren und $z_i \to y$ strebt. Die Matrix A heißt permanent, wenn jede konvergente Folge $\{y_k\}$ A-limitierbar zu ihrem Grenzwert $\lim y_k$ ist.

Genau dann ist A permanent, wenn die folgenden Bedingungen alle erfüllt sind:

(P1) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leq M$ für alle $i = 1, 2, \dots,$

(P2) $\lim_{i\to\infty} a_{i,k} = 0$ für alle $k = 1, 2, \dots,$

(P3) $\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} = 1.$

Aufgabe 6: **Konvergenz von Quadraturformeln**

Es sei $f \in C([a,b])$. Gesucht ist $\int_a^b f(t)dt$. Dazu sei für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b$ eine Zerlegung des Intervalles $[a,b]$ und $\alpha_k^{(n)} \in \mathbb{R}$ für $k = 0, \dots n$. Unter welchen Bedingungen gilt

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)}) \to \int_a^b f(t)dt\ ?$$

Aufgabe 7: **Divergente Fourier-Reihe**

Es gibt eine reellwertige stetige Funktion, deren Fourier-Reihe in einem vorgegebenem Punkt t_0 divergiert.