Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis II (Funktionalanalysis II)

Blatt 3 Sommersemester 2007

Schwache Konvergenz $x_n \xrightarrow{w} x$
Sei X ein normierter Raum, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ und $x \in X$. Wir sagen, dass die Folge $\{x_n\}$ *schwach* gegen x konvergiert, falls $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X'$.

Satz von Hahn-Banach

Sie X ein normierter Vektorraum, $L \subset X$ ein Teilraum und $f : L \to \mathbb{C}$ ($f : L \to \mathbb{R}$) linear und beschränkt. Dann existiert $F : X \to \mathbb{C}$ ($F : X \to \mathbb{R}$) mit $F|_L = f$ und $||F|| = ||f||$.

Aufgabe 1:
Jede schwach-konvergente Folge ist beschränkt.

Aufgabe 2:
Seien X und Y normierte Vektorräume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ und $x \in X$. Zeigen Sie, dass

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad \Longrightarrow Tx_n \to Tx \;.$$

Aufgabe 3:
Sei X ein normierter Raum, $M \subset X'$, so dass die lineare Hülle von M dicht in X' liegt und $\{x^n\}$ eine beschränkte Folge in X. Dann $x^n \xrightarrow{w} 0$ genau dann wenn $\varphi(x^n) \to 0$ für jedes $\varphi \in M$.

Aufgabe 4: $\ell_p, 1 < p < \infty$
Sei $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots) \in \ell_p$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Dann $x^n \xrightarrow{w} 0$, genau dann wenn die Folge $\{x^n\}$ beschränkt ist und $\lim\limits_{n\to\infty} x_j^n = 0$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: $L_p([0, 1]), 1 < p < \infty$
Sei $\{f_n\} \subset L_p([0, 1])$. Dann konvergiert $f_n \xrightarrow{w} f$ genau dann wenn die Folge $\{f_n\}$ L_p- beschränkt ist und

$$\int_0^t f_n \to \int_0^t f \quad \text{für jedes} \;\; t \in [0, 1] \;.$$

Aufgabe 6: **Konvergenz in Hilberträumen**
Es sei H ein Hilbertraum und $\{x_k\} \subset H$ eine Folge aus H. Zeigen Sie, dass $x_k \to x$ in H genau dann, wenn $x_k \xrightarrow{w} x$ in H und $\|x_k\| \to \|x\|$.

Aufgabe 7: **Konvergenz in L_p**
Sei $X = L_p$, $1 < p < \infty$, $\{f_n\} \subset X$ und $f \in X$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in X genau dann, wenn $f_n \xrightarrow{w} f$ in X und $||f_n||_X \to ||f||_X$.