PROF. DR. HANS-JÜRGEN SCHMEISSER / HENNING KEMPKA

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS II (FUNKTIONALANALYSIS II)

BLATT 4 Sommersemester 2007

Kanonische Abbildung

Die Abbildung $\varepsilon : X \to X''$, $\varepsilon(x)(\varphi) = \varphi(x), \varphi \in X'$, heißt kanonische Abbildung. Es ist eine lineare Isometrie. Ein Banachraum heißt *reflexiv*, wenn ε surjektiv ist.

AUFGABE 1: **Quasi-Banach Räume**

Beweisen Sie, dass $(L_p([0,1]))' = \{0\}$ für alle $0 < p < 1$. Es gilt also keine Version des Satzes von Hahn-Banach!

Hinweis: Für jede Funktion $f \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$, so dass $\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} |f|^p = \frac{||f||_p^p}{n}, i = 0, 1, \ldots, n-1$.

AUFGABE 2: **Separabilität**

Sei X ein normierter Vektorraum. Falls X' separabel ist, dann ist auch X separabel.

AUFGABE 3: **Reflexive Räume**

Aus jeder beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum kann man eine schwach-konvergente Teilfolge auswählen.

AUFGABE 4: **Der Raum $\mathbf{C([0,1])}$ ist *nicht* reflexiv!**

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $f_n(t) = (1 - nt)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ und zeigen Sie, dass keine Teilfolge schwach in $C([0,1])$ konvergiert. Benutzen Sie dazu, dass die Funktionale $\delta_t : f \to f(t)$ in $(C([0,1]))'$ liegen.

AUFGABE 5:

Sei X ein reflexiver Banachraum und $K \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist K kompakt, genau dann wenn für jede schwach-konvergente Folge x_n die Folge Kx_n stark-konvergent ist.

AUFGABE 6: **Banachlimes**

Für $x \in \ell_\infty$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten Sie die Funktion

$$p(x) = \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $p(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ für $x \in c$.
(b) p ist ein sublineares Funktional.
(c) Es existiert eine Fortsetzung $\mathrm{Lim} \in (\ell_\infty)'$ des linearen und stetigen Funktionals $\lim \in c'$ mit $\mathrm{Lim}(x) \leq p(x)$ (Hahn-Banach!)
(d) $\liminf x_k \leq \mathrm{Lim}(x) \leq \limsup x_k$ für $x = \{x_k\} \in \ell_\infty$. Insbesondere gilt $\mathrm{Lim}(x) \geq 0$ falls $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.
(e) Es gilt $\mathrm{Lim}(Sx) = \mathrm{Lim}(x)$ für $x = \{x_k\} \in \ell_\infty$, wobei S der Shiftoperator $Sx = (x_2, x_3, \ldots)$ ist.
(f) Lim ist nicht multiplikativ, d.h. es gibt $x, y \in \ell_\infty$ mit $\mathrm{Lim}(x \cdot y) \neq \mathrm{Lim}(x)\,\mathrm{Lim}(y)$.

Das Funktional Lim heißt Banachlimes auf ℓ_∞.