PROF. DR. HANS-JÜRGEN SCHMEISSER / HENNING KEMPKA

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS II (FUNKTIONALANALYSIS II)

BLATT 5 Sommersemester 2007

Dualer Operator

Seien X, Y normierte Vektorräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann existiert genau ein $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$, so dass

$$\forall x \in X, \quad \forall \varphi \in Y' : \qquad (T'\varphi)(x) = \varphi(Tx) \ .$$

Annihilatoren

Sei X ein normierter Raum.

(i) Sei $A \subset X$. Dann definieren wir

$$A^{\perp} = \{\varphi \in X' : \varphi(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in A\} \subset X' \ .$$

(ii) Sei $B \subset X'$. Dann definieren wir

$$^{\perp}B = \{x \in X : \varphi(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in B\} \subset X \ .$$

AUFGABE 1:

Die Abbildung $T \to T' : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y', X')$ ist linear und isometrisch. Sie ist bijektiv genau dann, wenn Y reflexiv ist.

AUFGABE 2:

Seien $X = Y = c_0$ und $S \in \mathcal{L}(Y', X') = \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1)$

$$S : \{x_n\} \to \left(\sum_n x_n, 0, 0, \dots\right) \ .$$

Warum gibt es kein $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so dass $T' = S$?

AUFGABE 3:

Beweisen Sie:

$$\ker T' = (R(T))^{\perp} \qquad \ker T =^{\perp} (R(T')) \qquad \overline{R(T)} =^{\perp} (\ker T') \ .$$

AUFGABE 4: **Momentenoperator**

Zu $f \in L_1([0, 1])$ betrachten Sie die Folge der Momente $\{f_n^{\#}\}_{n \geq 0}$, wobei

$$f_n^{\#} = \int_0^1 t^n f(t) dt \ .$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : f \to \{f_n^{\#}\}$ ein stetiger linearer Operator von $L_1([0, 1])$ nach c_0 ist. Geben Sie die Darstellung des dualen Operators $T' : \ell_1 \to L_\infty([0, 1])$.

AUFGABE 5: **Schwach* Konvergenz**

Sei X ein Banachraum. Eine Folge $\{\varphi_n\}$ im Dualraum X' heißt *schwach* konvergent* gegen $\varphi \in X$ ($\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi$), falls $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Jede schwach konvergente Folge in X' auch schwach* konvergiert, mit dem selben Limes.

(b) Ist X reflexiv, so ist die Folge in X' genau dann schwach konvergent, wenn sie schwach* konvergent ist.

(c) Die Folge $\{e^n\}$ der Einheitsvektoren in ℓ_1 konvergiert schwach* gegen 0, ist aber nicht schwach konvergent ($\ell_1 = (c_0)'$).

(d) Sei $x^n \in \ell_\infty$ gegeben durch $x^n = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$ wobei die ersten n Koordinaten 0 sind. Dann ist x_n schwach* konvergent gegen 0, aber ist nicht schwach konvergent (Banachlimes, $\ell_\infty = (\ell_1)'$).

(e) Wir betrachten die Folge $s^n = \sum_{k=1}^n e_k^n$ in c_0 wobei e^n wieder die Einheitsvektoren sind. Dann ist zwar für jedes $x \in \ell_1 = (c_0)'$ $x(s^n)$ eine konvergente Folge, aber trotzdem ist $\{s^n\}$ nicht schwach konvergent.