Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis II (Funktionalanalysis II)

Blatt 6 — Sommersemester 2007

Seien X ein Banachraum und $T \in L(X)$. Dann definieren wir

$$S_T^p = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in X, x \neq 0 : Tx = \lambda x\} \subset S_T$$
$$\nu(T) = \min\{k : N(T^k) = N(T^{k+1}) = N(T^{k+2}) = \dots\}$$
$$\varrho(T) = \min\{k : R(T^k) = R(T^{k+1}) = R(T^{k+2}) = \dots\}$$

Aufgabe 1: Shiftoperatoren

Wir betrachten Operatoren

$$R :(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_1, x_2, \dots), \quad R : \ell_2 \to \ell_2$$
$$U :(x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots), \quad U : \ell_1 \to \ell_1.$$

Zeigen Sie:

(a) $S_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$,
(b) $S_R^p = \emptyset$,
(c) $S_U^p = \emptyset$, $S_U = \{0\}$.

Aufgabe 2:

Auf dem Raum $H = L_2([0, 1])$ betrachten wir den Operator

$$L : f \to Lf, \quad Lf(t) = tf(t) \ .$$

Zeigen Sie, dass $S_L^p = \emptyset$, $S_L = [0, 1]$.

Aufgabe 3:

In folgenden Aufgaben ist $T \in L(X)$ gegeben. Finden Sie $||T||, S_T, S_T^p$ und prüfen Sie, ob T kompakt ist:

(a) $X = \ell_\infty, T(\{x_n\}) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$,
(b) $X = \ell_\infty, T(\{x_n\}) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$,
(c) $X = C([0, 1]), Tf(x) = \varphi(x)f(x)$, wobei $\varphi \in C([0, 1])$ eine vorgegebene Funktion ist,
(d) $X = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}, Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$,

Aufgabe 4: Spektrum von Polynomen

Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $T \in L(X)$. Zeigen Sie

$$S_{p(T)} = p(S_T) = \{p(\lambda) : \lambda \in S_T\} \ .$$

Aufgabe 5:

Sei $\{\alpha_n\} \in \ell_\infty$. Berechnen Sie $\nu(T)$ und $\varrho(T)$ für

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots), \quad T : \ell_2 \to \ell_2 \ .$$

Aufgabe 6: Lemma von Schur

In ℓ_1 ist jede schwach konvergente Folge konvergent.