Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis II (Funktionalanalysis II)

Blatt 7 Sommersemester 2007

Fredholm-Alternative

Seien (X, X^+) ein Dualsystem normierter Vektorräume, $K : X \to X$ und $K^+ : X^+ \to X^+$ konjugierte und kompakte Operatoren. Dann gilt: entweder ist

(i) $N(I-K) = \{0\}$, $N(I-K^+) = \{0\}$, $R(I-K) = X$, $R(I-K^+) = X^+$

oder

(ii) $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^+) \in \mathbb{N}$ und $R(I-K) = {}^\perp N(I-K^+)$, $R(I-K^+) = N(I-K)^\perp$.

Aufgabe 1: **Shiftoperator**

Wir betrachten den Operator

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots), \quad T : \ell_2 \to \ell_2 \ .$$

Finden Sie S_T und S_T^p.

Hinweis:

(a) $r(T^n) \leq ||T^n||$

(b) T ist kompakt!

Aufgabe 2:

Die Integralgleichung

$$x(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s+t)x(t)dt = y(s)$$

besitzt im Falle $y(s) \equiv 1$ unendlich viele, im Falle $y(s) \equiv s$ überhaupt keine Lösung in $C([0, 2\pi])$.

Aufgabe 3:

Sei $X = \ell_p$ und $A := I - K$ mit $K : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_1, 0, x_3, \dots)$. Gilt für A die Fredholm-Alternative?

Aufgabe 4:

Sei $k(s,t) = e^{s-t}$ und

$$Kx(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt \ .$$

Finden Sie $(I - \mu K)^{-1}$, $|\mu| < 1$:

(a) direkt,

(b) mit Hilfe von iterierten Kernfunktionen.

Aufgabe 5: **Anfangswertprobleme**