PROF. DR. HANS-JÜRGEN SCHMEISSER / HENNING KEMPKA

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS II (FUNKTIONALANALYSIS II)

BLATT 7 Sommersemester 2007

Fredholm-Alternative

Seien (X, X^+) ein Dualsystem normierter Vektorräume, $K : X \to X$ und $K^+ : X^+ \to X^+$ konjugierte und kompakte Operatoren. Dann gilt: entweder ist

(i) $N(I-K) = \{0\}$, $N(I-K^+) = \{0\}$, $R(I-K) = X$, $R(I-K^+) = X^+$

oder

(ii) $\dim N(I-K) = \dim N(I-K^+) \in \mathbb{N}$ und $R(I-K) = {}^{\perp}N(I-K^+)$, $R(I-K^+) = N(I-K)^{\perp}$.

AUFGABE 1: **Shiftoperator**

Wir betrachten den Operator

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \dots), \quad T : \ell_2 \to \ell_2 \ .$$

Finden Sie S_T und S_T^p.
Hinweis:

(a) $r(T^n) \leq ||T^n||$
(b) T ist kompakt!

AUFGABE 2:

Die Integralgleichung

$$x(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s+t) x(t) dt = y(s)$$

besitzt im Falle $y(s) \equiv 1$ unendlich viele, im Falle $y(s) \equiv s$ überhaupt keine Lösung in $C([0, 2\pi])$.

AUFGABE 3:

Sei $X = \ell_p$ und $A := I - K$ mit $K : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (0, x_1, 0, x_3, \dots)$. Gilt für A die Fredholm-Alternative?

AUFGABE 4:

Sei $k(s,t) = e^{s-t}$ und

$$Kx(s) = \int_0^1 k(s,t) x(t) dt \ .$$

Finden Sie $(I - \mu K)^{-1}$, $|\mu| < 1$:

(a) direkt,
(b) mit Hilfe von iterierten Kernfunktionen.

AUFGABE 5: **Anfangswertprobleme**