PROF. DR. HANS-JÜRGEN SCHMEISSER / HENNING KEMPKA

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS II (FUNKTIONALANALYSIS II)

BLATT 8 — Sommersemester 2007

Definition von $D'(\Omega)$
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen. Eine Linearform $T : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ ist ein Distribution, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ Konstanten $c > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ existieren, so dass

$$|T(\varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \text{für alle } \varphi \in D(K) \text{ gilt.}$$

Kann man für jedes kompakte $K \subset \Omega$ dasselbe $m \in \mathbb{N}_0$ wählen, so sagt man T hat Ordnung $\leq m$.

AUFGABE 1:
Zeigen Sie, dass

$$(\ln|x|)' = P\frac{1}{x}, \qquad \text{und} \qquad (\ln|x|)'' = -P\frac{1}{x^2} \ ,$$

wobei

$$\Big(P\frac{1}{x}\Big)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \qquad \text{und} \qquad \Big(P\frac{1}{x^2}\Big)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx,$$

AUFGABE 2:
Sei $T \in D'(\Omega)$ und $a \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist

$$\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T \ .$$

AUFGABE 3:
Sei $f \in D'(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(\cdot + h) - f(\cdot)] = f', \quad \text{Konvergenz in} \quad D'(\mathbb{R}) \ .$$

AUFGABE 4:
Sei $\omega \in L_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)dx = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_j(x) = j^n \omega(jx) \to \delta \quad \text{in} \quad D'(\mathbb{R}^n) \ .$$

AUFGABE 5: **Ordnung einer Distribution**
Bestimmen Sie die Ordnung folgender Distributionen:

(i) $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.
(ii) $u_a(\varphi) = D^\alpha \varphi(a)$.
(iii) Sei $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine Menge ohne Häufungspunkte, dann ist

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} D^{\alpha^j} \varphi(x^j) \ ,$$

wobei $\alpha^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j)$ Multiindizes sind.