Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis II (Funktionalanalysis II)

Blatt 9 — Sommersemester 2007

$$H(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)$$
$$||f|W_p^k(\mathbb{R}^n)||^p = \sum_{|\alpha|\le k} ||D^\alpha f|L_p(\mathbb{R}^n)||^p$$
$$||f|L_2(\langle x\rangle^k)||^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |f(x)|^2 dx$$

Aufgabe 1:
Sei $R \in \mathbb{R}$ und $n = 1$. Bestimmen Sie $F[H(R-|x|)]$, $F[H]$ und $F[\operatorname{sgn} x]$.

Aufgabe 2:

(a) Die Fourier-Transformation bildet den Raum $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ isomorph auf $L_2(\langle x\rangle^k)$ ab.
(b) $W_2^k(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^n)$ für $k > \frac{n}{2}$.
(c) Es sei $U = B_0(1)$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und

$$u(x) = |x|^{-\alpha}\ , \quad \text{für } x \in U \setminus \{0\}\ .$$

Für welche Werte $\alpha \ge 0, n \in \mathbb{N}$ und $0 < p \le \infty$ gehört u zu $W_p^1(U)$?

Aufgabe 3: **Fundamentallösung**

$$\Delta(\ln|x|) = 2\pi\delta \qquad \text{in} \quad D'(\mathbb{R}^2)\ ,$$
$$\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{4}{3}\pi\delta \qquad \text{in} \quad D'(\mathbb{R}^3)\ .$$