Gewöhnliche Differentialgleichungen für Lehramt Regelschule (SS 2013) – Blatt 2

1. (a) Beweisen Sie die folgende Aussage (*Fixpunktsatz von Weissinger*):
   Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $A : E \to E$ eine Abbildung und $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$
   Für alle $e_1, e_2 \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gelte
   $$\|A^n e_1 - A^n e_2\| \leq a_n \|e_1 - e_2\|.$$
   Dann hat A genau einen Fixpunkt e. Dieser ist der Grenzwert der Folge $\{A_n e_0\}_{n=1}^{\infty}$ mit beliebigem Startwert e_0.

   (b) Folgern Sie den Banachschen Fixpunktsatz aus Teil (a).

2. Zeigen Sie, dass durch
   $$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$
   eine kontrahierende Selbstabbildung $f : [1,2] \to [1,2]$ definiert wird und bestimmen Sie den Fixpunkt.

3. Zeigen Sie, dass die Gleichung
   $$2x - \sin x = \frac{1}{2}$$
   genau eine Lösung auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt. Bestimmen Sie diese auf 2 Stellen genau.