Vorlesung: Moderne Methoden der Analysis: Funktionenräume mit variablen Exponenten

Henning Kempka

Die Vorlesung befasst sich mit dem Thema der variablen Lebesgue-Räume, bezeichnet mit $L_{p(\cdot)}(\Omega)$. Hierbei ist $p : \Omega \to [1, \infty]$ der variable Exponent und eine meßbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gehört zu $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ falls für ein $\lambda > 0$

$$\int_\Omega \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \qquad \text{endlich ist.}$$

Diese Räume wurden schon 1931 von Orlicz eingeführt. Das große Interesse an diesen Räumen heutzutage liegt an neuen Resultaten der letzten Jahre. Insbesondere die Beschränktheit des Hardy-Littlewood-Maximaloperators auf $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ unter bestimmten Voraussetzungen an $p(\cdot)$, hat die Forschung auf dem Gebiet der Räume mit variablen Exponenten beflügelt.
Die Themen der Vorlesung werden zur Zeit sehr aktiv erforscht und so zeichnet sich die Vorlesung durch ihre hohe Aktualität aus.
Unter anderem besitzen diese Räume schöne Eigenschaften um sie bei bestimmten partiellen Differentialgleichungen anzuwenden. So lassen sich zum Beispiel elektrorheologische Flüssigkeiten (Flüssigkeiten welche ihre Viskosität unter Einfluss eines elektrischen Feldes ändern) sehr natürlich im Kontext der variablen Lebesque Räume $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ und den darauf aufbauenden Sobolevräumen $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ beschreiben.
In der Vorlesung wird gezeigt

- Definition der Räume $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ und grundlegende Eigenschaften
- Theorie der Musielak-Orlicz Räume
- Vollständigkeit, Seperabilität und Translationsinvarianz/Faltung
- Beschränktheit des Hardy-Littlewood-Maximaloperators
- Sobolev-, Besov- und Triebel-Lizorkin-Räume mit variabler Integrabilität und variabler Glattheit (Falls die Zeit reicht und je nach Interessenlage der Studierenden)

Als Vorwissen werden Grundkenntnisse der Maß und Integrationstheorie und der Fourieranalysis vorausgesetzt.