Kollabierretrakte und Zustandssummen-invarianten von Dreimannigfaltigkeiten

Simon King

Diplomarbeit, eingereicht an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
Frankfurt

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit untersuche ich Invarianten für kompakte Dreimannigfaltigkeiten, welche durch Zustandssummen über Kollabierretrakten erklärt sind.

Im ersten Kapitel zeige ich nach S. Matveev, daß zwei Kollabierretrakte einer Mannigfaltigkeit durch eine Kette zweier lokaler Prozesse ineinander übergehen und definiere eine erste Invariante; im Hinblick auf spätere Kapitel formuliere ich sie als Turaev-Viro-Invariante um. Dann beschreibe ich einen endlichen Graphenkalkül für Dreimannigfaltigkeiten nach R. Benedetti und C. Petronio; anders als etwa beim Kirby-Kalkül gibt es hier nur endlich viele Typen lokaler Prozesse. Mit Hilfe dieses Kalküls zeige ich, daß sogar ein einziger Typ von Prozessen ausreicht, zwei Kollabierretrakte einer Mannigfaltigkeit ineinander umzuformen, wenn man zusätzlich verlangt, daß beide mindestens zwei Ecken besitzen; Benedetti und Petronio schrieben, dieses Resultat sei bekannt, ich fand jedoch keinen Beweis in der Literatur vor. Des weiteren untersuche ich, wie sich ∂-zusammenhängende Summen im Graphenkalkül wiederspiegeln, gebe einen Graphen für den Volltorus an und zeige, wie das Ankleben von Zweihenkeln im Kalkül realisiert wird; dies führt auf einen Algorithmus zur Konstruktion eines Graphen zu vorgegebener Heegard-Zerlegung einer orientierten Mannigfaltigkeit. Um mehr Flexibilität zu gewinnen, betrachte ich auch das duale Bild zu Kollabierretrakten; auf diese Weise wird jeder kompakten Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand) eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit zugeordnet; deren Homöomorphietyp zusammen mit der Eulercharakteristik klassifiziert die Mannigfaltigkeit.

In den nächsten beiden Kapiteln gebe ich einen kurzen Überblick über halbeinfache Bandkategorien (nach V. Turaev) und zeige, wie man aus ihren symmetrischen $6j$-Symbolen Invarianten für Dreimannigfaltigkeiten gewinnt. Als Beispiel dienen die $6j$-Symbole der Skeinkategorie. Diese Klasse von Invarianten wird durch die Untersuchung „ähnlicher“ Mannigfaltigkeiten nach Matveev illustriert; eine Unterklasse, nämlich die Turaev-Viro-Invarianten, zu denen auch das Beispiel der Skeinkategorie gehört, kann ähnliche Mannigfaltigkeiten nicht unterscheiden. In Analogie zu der Interpretation von Knotendiagrammen als Morphismen einer Bandkategorie skizziere ich, wie man mit Hilfe der $6j$-Invarianten eine algebraische Darstellung des Graphenkalküls für Dreimannigfaltigkeiten konstruiert.

Im letzten Kapitel untersuche ich eine Invariante von D. Yetter und eine selbsterfundene Klasse von Verallgemeinerungen. Die Yettersche Invariante zählt kurz gesagt die Konjugationsklassen von Homomorphismen der Fundamentalgruppe in eine vorgegebene endliche Gruppe; man kann sie auch als $6j$-Invariante auffassen, allerdings stammen die $6j$-Symbole im allgemeinen nicht von einer Bandkategorie. Diese Invariante unterscheidet Matveevs Beispiel ähnlicher Mannigfaltigkeiten; das ist nicht verwunderlich, denn die Fundamentalgruppe zusammen mit dem Ähnlichkeitstyp klassifiziert irreduzible orientierte Dreimannigfaltigkeiten. Yetter definierte seine Invariante ursprünglich für triangulierte Mannigfaltigkeiten und muß sie normieren; ich übersetze sie in eine Invariante für Kollabierretrakte, was mir die Normierung erspart und es mir ermöglicht, eine Klasse von Verallgemeinerungen zu definieren. Ich gebe zwei Beispiele solcher Verallgemeinerungen an. Das erste mißt neben der Fundamentalgruppe auch den zweiten Homotopiemodul; da mir kein Beispiel zweier geschlossener orientierter Dreimannigfaltigkeiten bekannt ist, die sich bei gleicher π_1 in der π_2 unterscheiden, und der Berechnungsaufwand noch größer ist als bei der Yetter-Invariante, mag der praktische Nutzen beschränkt sein. Eine weitere Invariante hingegen ist relativ leicht zu berechnen und ist immerhin in der Lage, manche Linsenräume zu unterscheiden — leider nicht $L(7,1)$ und $L(7,2)$. Ob diese Invariante vielleicht in Wahrheit „nur" den Homotopietyp mißt, und was man mit ihr klassifizieren kann, muß dann Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

Ich benutze folgende Konventionen: Alle in dieser Arbeit betrachteten Räume sind kompakt; Kollabierretrakte oder synonym Spines sind stets *spezielle* Pseudoflächen, wenn nicht anders gesagt; Triangulierungen dürfen ausgeartet sein. Ein zu definierender Begriff ist **fett** gedruckt; eine fettgedruckte Seitenzahl im Index verweist auf eine Definition.

Ich möchte Herrn Professor Burde dafür danken, daß er stets ein offenes Ohr für alle meine Ideen (auch die weniger guten) hatte und dadurch oft zur Klärung beitrug; dem Fachbereich, daß er Gastvorträge organisiert, welche mir oft die besten Anregungen lieferten; meinen Kommilitonen, daß sie meine Referate kritisch unter die Lupe nahmen.

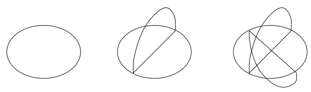
Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Kollabierretrakte von Dreimannigfaltigkeiten

1.1 Die Matveev-Piergallini-Prozesse

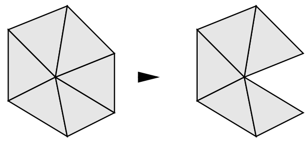
Definition 1.1: Eine **Pseudofläche** P ist ein zweidimensionales Polyeder, bei dem jeder Punkt eine Umgebung der folgenden Arten besitzt:



Man sagt dann, der Punkt liege (i) auf einer Fläche, (ii) auf einer Kante, (iii) auf einer Ecke der Pseudofläche. Die drei bzw. sechs Flächenstücke, die an eine Kante bzw. eine Ecke anstoßen, nennt man auch **Flügel**. Mit SP bezeichnet man den Graphen, der aus den Ecken und Kanten von P besteht.

P heißt spezielle Pseudofläche, wenn alle Flächen von P Zweizellen sind und SP ein nichtleerer, zusammenhängender Graph ist.

Definition 1.2: Sei K ein Zellenkomplex (mit Rand). Eine Zelle c von K heißt frei, wenn es genau eine Zelle c' gibt, die c im Rand enthält und c im Rand von K liegt; ein **Elementarkollaps** besteht dann im Entfernen von c und c' (beides offene Zellen). Beispiel:



Definition 1.3: Sei M eine kompakte Dreimannigfaltigkeit in Zellenzerlegung mit nichtleerem Rand; eine spezielle Pseudofläche $P < M$ heißt **Kollabierretrakt** oder **Spine**, wenn M auf P kollabiert (d.h. wenn P aus M durch eine

endliche Folge von Elementarkollapsen entsteht). Falls $\partial M = \emptyset$, so entfernt man vor dem Kollaps einen Dreiball aus M.

Man kann diese letzte Definition auch anders fassen: M kollabiert auf P, falls $M - P \approx \partial M \times I$ ($\partial M \neq \emptyset$) bzw. $M - P \approx D^3$ ($\partial M = \emptyset$). Jede Dreimannigfaltigkeit besitzt einen Kollabierretrakt und ist durch diesen eindeutig bestimmt (siehe [Cas65] oder auch [HAMS93], Kapitel I); ein bekanntes Beispiel ist „Bings Haus“, das ein Kollabierretrakt für den Dreiball ist (siehe Abbildung 1.1). Eine Warnung: Ich fordere in meiner Definition ausdrücklich, daß P eine

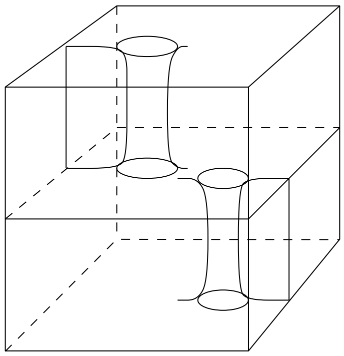


Abbildung 1.1: Bings Haus

spezielle Pseudofläche ist (andere Autoren tun das nicht und würden dann von „speziellen Spines“ reden). Ein allgemeiner zweidimensionaler Unterkomplex, auf den M kollabiert, bestimmt M *nicht* eindeutig. Ein Beispiel sind punktierte Linsenräume (siehe [HAMS93]): Die Linsenräume $L(5,1)$ und $L(5,2)$ entstehen durch Verkleben von Ober- und Unterseite der „Linse“ aus Abbildung 1.2 mit einem Fünftel- bzw. Zweifünfteltwist. Beide Räume sind nicht zueinander

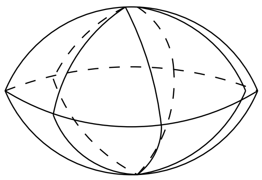


Abbildung 1.2: Linsenräume

homöomorph (siehe z.B. Kapitel 5.2.2), natürlich auch nicht nach Entfernen eines Balles. Beide punktierte Mannigfaltigkeiten kollabieren aber auf *denselben* Zweikomplex, nämlich den verklebten Rand der Linse, der der Standardkomplex zur Gruppe $\langle a | a^5 \rangle$ ist.

Offenbar ist P vom gleichen Homotopietyp wie M bzw. $M - D^3$, also stimmen Homotopie- und Homologiegruppen und insbesondere die Eulercharakteristik überein. P ist durch M jedoch nicht eindeutig bestimmt: In Abbildung 1.3 sieht man zwei Prozesse T und T_0; gezeigt ist jeweils ein Ausschnitt von P, der in einem Dreiball in M liegt und durch einen anderen ersetzt wird (Der Rest von P bleibt natürlich unverändert). T heißt Matveev-Piergallini-Prozeß.

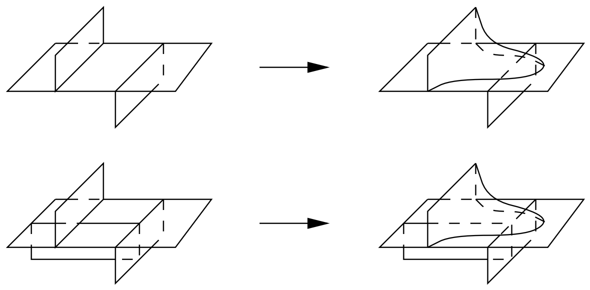


Abbildung 1.3: Die Prozesse T_0 (oben) und T („Matveev-Piergallini-Prozeß")

Beide Prozesse führen P in je einen weiteren Kollabierretrakt P' von M über. Man löst sich nun von der Realisierung dieser Prozesse in M und faßt sie als Prozesse auf speziellen Pseudoflächen auf. T besitzt offenbar ein Inverses; ein inverser T_0-Prozeß führt nicht immer auf eine spezielle Pseudofläche, denn es werden zwei Flächenstücke verbunden, die im ungünstigen Falle einen Annulus oder ein Möbiusband bilden. Mit dieser Einschränkung definieren T, T_0 und ihre Inversen eine Äquivalenzrelation $\sim_T$ auf speziellen Pseudoflächen. Das erste Ziel ist der Beweis eines Satzes von Matveev und Piergallini (Unabhängig voneinander in [Mat88] und [Pie88]):

Satz 1.4: *Sind P_1 und P_2 Kollabierretrakte einer kompakten Dreimannigfaltigkeit M, so folgt $P_1 \sim_T P_2$.*

1.1.1 Der Prozeß S

Die folgenden Abschnitte bringen einen Beweis, der weitgehend [Mat88] folgt, jedoch gestrafft ist. M wird dabei nicht als Zellenkomplex, sondern sogar als trianguliert aufgefaßt. Zunächst definiere ich den Prozeß S; er besteht im Hinzufügen einer Scheibe an eine Kante des Kollabierretraktes (siehe Abbildung 1.4). S ändert die Eulercharakteristik $\chi(P)$ um $+1$. T, T_0 und S (mit inversen

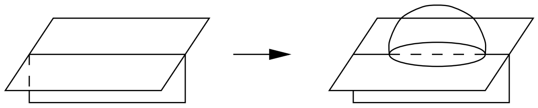


Abbildung 1.4: Der S-Prozeß

Prozessen) definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_{ST}$. Die Idee ist nun, die ST-Äquivalenz zweier Spines einer Mannigfaltigkeit zu zeigen und die S-Prozesse hinterher durch eine Kette von T- und T_0-Prozessen zu ersetzen.

Behauptung 1.5: *Sei P eine Pseudofläche und entstehen sowohl Q_1 als auch Q_2 durch jeweils einen S-Prozeß aus P; dann folgt $Q_1 \sim_T Q_2$. (Man kann nämlich die für Q_1 angeklebte Scheibe mittels T_0 und T entlang des zusammenhängenden Graphen SP verschieben und erhält so Q_2.)* □

Definition 1.6: Sei K ein zusammenhängender, von einem Punkt verschiedener Teilkomplex von M und M' die baryzentrische Unterteilung der Triangulierung von M.

$$L(K, M') := \bigcup_{v \in K^0} \mathrm{Lk}(v, M').$$

$L(K, M')$ liegt also im Zweigerüst der dualen Zellenzerlegung von M und ist eine Pseudofläche. Wenn $\forall v \in K^0$ der Link von v in K' zusammenhängend ist, ist $L(K, M')$ sogar speziell: Mit der Zusatzbedingung sind die Flächen von $L(K, M')$ Scheiben (sie liegen jeweils in $\mathrm{Lk}(v, M')$), und der Graph $SL(K, M')$ ist zusammenhängend.

Lemma 1.7: *Sei $P < M$ eine spezielle Pseudofläche; dann gilt $L(P', M'') \sim_{ST} P$.*

Beweis: Sei

$$P_n := \left(P' - \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}\,(v_i, P'') \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Lk}\,(v_i, M'') \right),$$

wobei n über die 0-Zellen von P' läuft (P_n ist eine spezielle Pseudofläche). $|P_0| = |P|$ (baryzentrisch unterteilt); P_{n+1} entsteht aus P_n durch einen S-Prozeß und Verschieben der Scheibe mit einem T-Prozeß über die Ecke v_i. Wenn N die Anzahl der 0-Zellen in P' ist, so ist $P_N = L(P', M'')$. $\square$

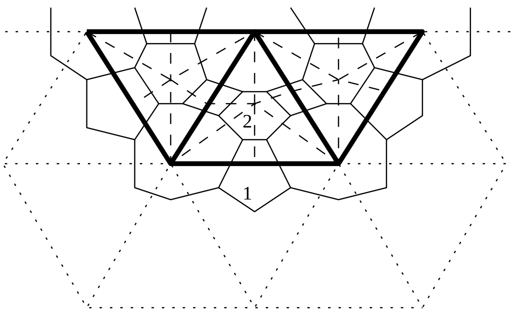


Abbildung 1.5: Das Duale eines Elementarkollapses

Lemma 1.8: *Seien K_1,K_2 $<$ M von einem Punkt verschiedene Simplizialkomplexe und kollabiere K_2 auf K_1, so daß $\mathrm{Lk}(v, K_i')$ für alle Ecken v zusammenhängend ist; dann folgt*

$$L(K_1', M'') \sim_{ST} L(K_2', M'').$$

Beweis: Man betrachtet einen Elementarkollaps von K_2 auf K_1. Dabei wird auch das Entfernen eines Zweisimplexes mit *zwei* freien Seiten in einem Zug als elementar angesehen; den sonst üblichen Umweg über ein Einssimplex mit

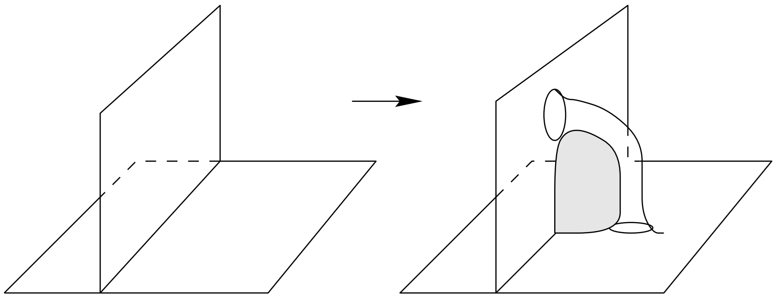


Abbildung 1.6: Der Brückenprozeß B

einer freien Seite möchte ich vermeiden, weil sonst die Eckenlinks nicht mehr zusammenhängend wären. Wenn beim Elementarkollaps ein Dreisimplex mit einer freien Seite oder ein Zweisimplex mit einer freien Seite entfernt wird, so entsteht $L(K_1', M'')$ aus $L(K_2', M'')$ durch zwei inverse S-Prozesse; wird ein Zweisimplex mit zwei freien Seiten entfernt, so entsteht $L(K_1', M'')$ aus $L(K_2', M'')$ durch 4 inverse S-Prozesse. Abbildung 1.5 zeigt als Beispiel einen zweidimensionalen Komplex K_1 (dick gezeichnet) und dessen baryzentrische Unterteilung (gestrichelt) in der triangulierten Mannigfaltigkeit (gepunktet; man stelle sie sich aufgedickt vor). Die durchgezogenen Linien zeigen die Projektion von $L(K_1', M'')$ in die Ebene, man stelle sich $L(K_1', M'')$ als Prisma vor. Das mittlere der drei Dreiecke von K_1 kollabiert nun. Entferne die mit 1 bezeichnete Fläche von $L(K_1', M'')$ (auch im Prisma ist das nur *eine* Fläche), danach die mit 2 bezeichnete (dies geht erst nach Entfernen der ersten Fläche). Es entsteht also $L(K_2', M'')$ durch zwei inverse S-Prozesse, wie behauptet. □

Satz 1.9: *Seien P_1 und P_2 Kollabierretrakte von M; dann gilt $P_1 \sim_{ST} P_2$.*

Beweis: Sei $N \subseteq M$ definiert als M weniger einem Kragen von ∂M in M, wobei man genügend oft baryzentrisch unterteilt; alle Eckenlinks von P_1', P_2' und N' sind zusammenhängend. N kollabiert sowohl auf P_1 als auch auf P_2. Also gilt mit Lemmata 1.7 und 1.8: $P_1 \sim_{ST} L(P_1', M'') \sim_{ST} L(N', M'') \sim_{ST} L(P_2', M'') \sim_{ST} P_2$. **q.e.d.**

1.1.2 Der Brückenprozeß

Ich definiere nun einen weiteren Prozeß B; er besteht darin, zwei Flügel einer Kante durch einen Schlauch zu verbinden und das entstehende Loch zwischen Kante und Schlauch durch eine Scheibe zu stopfen (siehe Abbildung 1.6). Es bezeichne $B(\cdot)$ bzw. $S(\cdot)$ das Resultat eines auf eine Pseudofläche angewendeten Prozesses B bzw. S.

Lemma 1.10: *Sei Q eine spezielle Pseudofläche; dann gilt $B\left(S\left(Q\right)\right) \sim_T Q$.*

Beweis: Siehe Abbildung 1.7; die in der Abbildung links oben gegebene Ecke läßt sich notfalls durch einen vorherigen T_0-Prozeß erzeugen. □

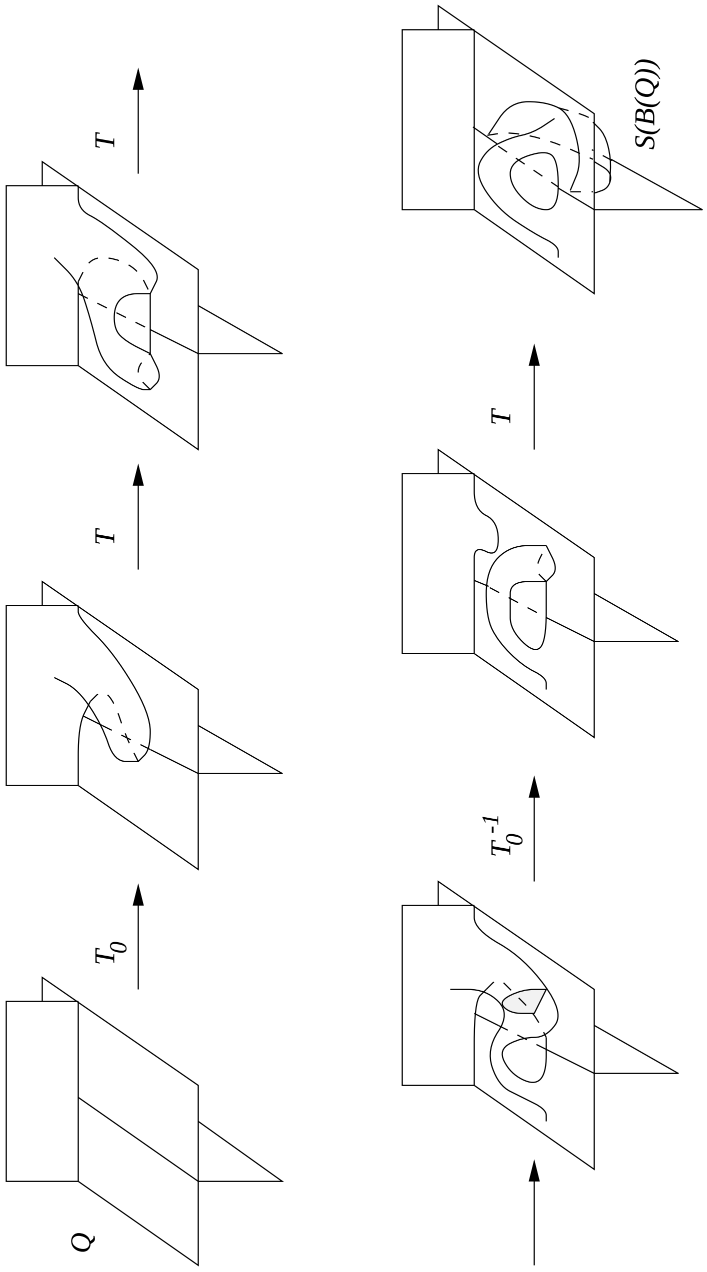


Abbildung 1.7: $B\left(S\left(Q\right)\right) \sim_T Q$

Lemma 1.11: *Seien P_1, P_2 spezielle Pseudoflächen; wenn $S(P_1) \sim_T S(P_2)$, so folgt $B(S(P_1)) \sim_T B(S(P_2))$.*

Beweis: Alles ist problemlos, solange die durch B erzeugte Brücke in $S(P_1)$ nicht durch die T-Prozesse tangiert wird. Es genügt also zu zeigen, daß sich die Brücke zu jeder beliebigen Kante hin und damit aus dem Weg „schieben“ läßt. Nach dem vorigen Lemma kann man die durch S erzeugte Scheibe zusammen mit der Brücke durch T-Prozesse beseitigen und ebenso beide an der gewünschten neuen Position wieder erzeugen; die Brücke bleibt an dieser neuen Stelle, die Scheibe hingegen wird nach Behauptung 1.5 wieder an die Stelle geschoben, die sie in $S(P_1)$ hatte. □

Theorem 1.12: *Seien P_1, P_2 Kollabierretrakte einer kompakten Dreimannigfaltigkeit M; dann gilt $P_1 \sim_T P_2$.*

Beweis: Nach Satz 1.9 ist $P_1 \sim_{ST} P_2$; ferner ist $\chi(P_1) = \chi(P_2) = \chi(M)$, also muß die Anzahl der ausgeführten S-Prozesse gleich der Anzahl der ausgeführten *inversen* S-Prozesse sein. Es ergibt sich folgende Situation im Falle nur eines S-S^{-1}-Paares (für mehrere Paare analog): $P_1 \longrightarrow_S Q_1 \sim_T Q_2 \longleftarrow_S P_2$. Nach den beiden vorhergehenden Lemmata ist jedoch einerseits $P_1 \sim_T B(Q_1)$ und $P_2 \sim_T B(Q_2)$, andererseits $B(Q_1) \sim_T B(Q_2)$. Insgesamt erhält man also über den Umweg einer Brücke: $P_1 \sim_T P_2$ **q.e.d.**

1.2 Ein einfaches Beispiel einer Turaev-Viro--Invariante

Im folgenden Abschnitt stelle ich in Anlehnung an [MS] eine Invariante für kompakte Dreimannigfaltigkeiten vor; sie ist sehr einfach zu konstruieren und soll den Leser mit dem Prinzip der Turaev-Viro-Invarianten vertraut machen, bevor ich diese in späteren Kapiteln näher untersuche.

Sei P im Folgenden stets ein Kollabierretrakt einer kompakten Dreimannigfaltigkeit M. Sei $\mathcal{F}(P) := \{Q \subseteq P |\ Q \textit{ ist Pseudofläche}\}$ (nicht notwendig *spezielle* Pseudofläche) und $\epsilon := \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$, also $\epsilon^2 = \epsilon + 1$.

Definition 1.13: Sei $Q \in \mathcal{F}(P)$, ν die Anzahl der Ecken und χ die Eulercharakteristik von Q. Das **Gewicht** von Q ist dann $\omega(Q) := (-1)^\nu \epsilon^{\chi-\nu}$.

$$t(P) := \sum_{Q \in \mathcal{F}(P)} \omega(Q),$$

$t(P)$ ist also ein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Satz 1.14: *$t(P)$ ist eine Invariante von M.*

Beweis: Ich betrachte einen Matveev-Piergallini-Prozeß von P nach P' wie in Abbildung 1.8 gezeigt. Der T_0-Prozeß wird nicht betrachtet, denn erstens ginge der Beweis analog dem zu T, und zweitens wird in Abschnitt 2.3.1 gezeigt werden, daß dieser Prozeß über T faktorisiert, also überflüssig ist. Eine Pseudofläche $Q \in \mathcal{F}(P)$ heiße reich, wenn Q alle Flügel $F_1, \ldots, F_6$ enthält, und sonst arm.

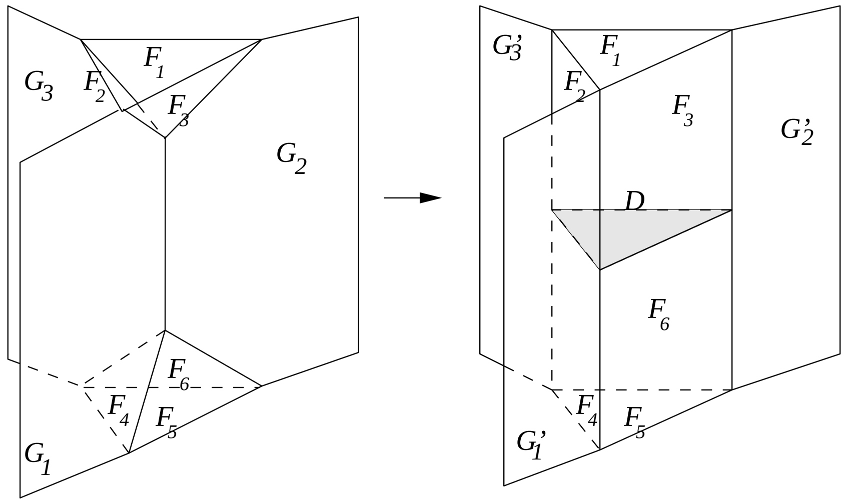


Abbildung 1.8: Neuformulierung des T-Prozesses

<u>Q ist arm:</u> Wenn Q arm ist, so gibt es genau ein $Q' \in \mathcal{F}(P')$, das außerhalb des Bildes mit Q übereinstimmt. Q und Q' sind zueinander isotop, also ist $\omega(Q) = \omega(Q')$.

<u>Q ist reich:</u> Q kann nicht genau eines der G_i enthalten, da sonst ein Rand entsteht. Stets gibt es zu Q zwei Pseudoflächen $Q_1, Q_2 \in \mathcal{F}(P')$, die außerhalb des Bildes mit Q übereinstimmen, wobei Q_2 D enthalten und Q_1 D nicht enthalten soll. Sei χ, χ_1, χ_2 die Eulercharakteristik und ν, ν_1, ν_2 die Anzahl der Ecken von Q, Q_1, Q_2.

Wenn Q keines der G_i enthält, so ist $\chi_1 = \chi - 2$, $\chi_2 = \chi - 1$, und $\nu_i = \nu$. Damit ist $\omega(Q_1) = \epsilon^{-2}\omega(Q)$ und $\omega(Q_2) = \epsilon^{-1}\omega(Q)$. Der Beitrag von Q zur Summe $t(P)$ gleicht den Beiträgen von Q_1 und Q_2 zu $t(P')$ wegen $1 = \epsilon^{-2} + \epsilon^{-1}$.

Wenn Q genau zwei der G_i enthält, so ist $\chi_1 = \chi - 1$, $\chi_2 = \chi$, $\nu_1 = \nu$ und $\nu_2 = \nu + 2$. Damit ist $\omega(Q_1) = \epsilon^{-1}\omega(Q)$ und $\omega(Q_2) = \epsilon^{-2}\omega(Q)$. Der Beitrag von Q zur Summe $t(P)$ gleicht den Beiträgen von Q_1 und Q_2 wegen $1 = \epsilon^{-1} + \epsilon^{-2}$.

Wenn Q alle G_i enthält, so ist $\chi_1 = \chi - 1$, $\chi_2 = \chi$, $\nu_1 = \nu - 2$ und $\nu_2 = \nu + 1$. Damit ist $\omega(Q_1) = \epsilon\,\omega(Q)$ und $\omega(Q_2) = -\epsilon^{-1}\omega(Q)$. Der Beitrag von Q zur Summe $t(P)$ gleicht den Beiträgen von Q_1 und Q_2 wegen $\epsilon^{-1} = 1 - \epsilon^{-2}$.

Es gibt kein reiches $Q \in \mathcal{F}(P)$, das genau eines der G_i enthält; es gibt jedoch Paare Q_1, Q_2 von reichen Pseudoflächen aus $\mathcal{F}(P')$, welche genau eines der G'_i enthalten, eine davon mit D, eine ohne. Es ist dann $\chi_2 = \chi_1 + 1$ und $\nu_2 = \nu_1 + 1$; damit ist $\omega(Q_1) = -\omega(Q_2)$, also heben sich die Beiträge zu $t(P')$ auf. **q.e.d.**

Im Hinblick auf die späteren Kapitel will ich die Definition von $t(P)$ umformulieren: Die Flächen von P werden mit zwei Farben gefärbt („Die Fläche liegt in Q / liegt nicht in Q“); eine solche Färbung ϕ heißt zulässig, wenn an jeder Kante entweder kein Flügel oder mindestens zwei Flügel zu Q gehören (Denn

Q ist eine Pseudofläche, hat also keinen Rand). Sei für eine Fläche D von P ihr Gewicht definiert durch $g_\phi(D) := \epsilon$, falls D zu Q gehört, und durch $g_\phi(D) := 1$, falls nicht. Man entferne die (offenen) Flächen von P; dann bleibt von Q nur noch $Q \cap SP$ übrig, also ein Graph. Zu jeder Ecke V von P sei $\mu_\phi(V)$ die Anzahl der Kanten in $Q \cap SP$, die an V anstoßen. Dann gilt:

$$\epsilon^{\chi(Q)} = \prod_D g_\phi(D) \prod_{V;\mu_\phi(V)>0} \epsilon \sqrt{\epsilon}^{-\mu_\phi(V)};$$

μ_ϕ zählt die Anzahl der Kantenenden, also zweimal die Anzahl derjenigen Kanten von P, die auch in Q noch Kante sind. Dieser Faktor Zwei im Exponenten wird durch $\sqrt{\epsilon}$ ausgeglichen. Sei nun $\langle V \rangle_\phi := \epsilon\sqrt{\epsilon}^{-\mu_\phi(V)}$, falls $\mu_\phi(V) > 0$ und V keine Ecke in Q ist, $\langle V \rangle_\phi := -\sqrt{\epsilon}^{-\mu_\phi(V)} = -\epsilon^{-2}$, falls V eine Ecke von Q ist, und 1 sonst. Somit gilt

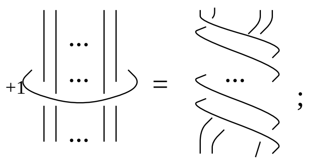
$$t(P) = \sum_{\phi \text{ zul.}} \prod_D g_\phi(D) \prod_V \langle V \rangle_\phi .$$

Dies ist jedoch genau die Form der Turaev-Viro-Invarianten, vergleiche Kapitel 4.

Kapitel 2

Ein endlicher Graphenkalkül für Dreimannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel werde ich einen graphischen Kalkül für dreidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten von Ricardo Benedetti und Carlo Petronio (aus [BP95]) vorstellen, der etwa im Vergleich zum Kirby-Kalkül einige Vorteile hat: Zwei Graphen, die dieselbe Mannigfaltigkeit beschreiben, gehen durch eine endliche Folge von *endlich vielen* Typen *lokaler* Prozesse auseinander hervor. Beim Kirby-Kalkül hingegen gibt es (je nach Formulierung) unendlich viele Typen von lokalen Prozessen oder einen nichtlokalen Prozeß (siehe Abbildung 2.1; Literatur z.B. [FR79]). Man sollte sich jedoch nicht zuviel versprechen, denn im



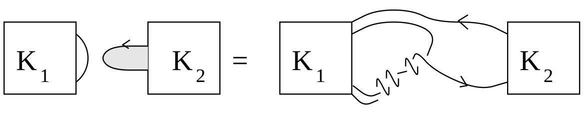


Abbildung 2.1: Prozesse des Kirby-Kalküls

wesentlichen besteht der Kalkül aus einer Umformulierung der Theorie der Kollabierretrakte; möchte man also Invarianten für den Kalkül definieren, ist das genausogut auf der Ebene der Spines möglich. Jedoch bietet er eine sehr effiziente Methode, Dreimannigfaltigkeiten graphisch darzustellen, und dies nutze ich zum Beweis, daß der Prozeß T_0 überflüssig ist (was natürlich Invarianzbeweise vereinfacht).

2.1 Erkennen von Spines

Zu gegebenem Zweikomplex K stellt sich die Frage, ob eine Dreimannigfaltigkeit existiert, die auf K kollabiert; es gibt einen Algorithmus von L. Neuwirth, der diese Frage allgemein beantwortet (siehe [Neu68] oder [HAMS93], Kapitel I). Im Falle von speziellen Pseudoflächen ist die Lage einfacher, wie ich im folgenden zeigen möchte.

Definition 2.1: Es sei $\mathcal{T}$ ein aus drei Punkten bestehender topologischer Raum, eine **Triode** der Kegel über $\mathcal{T}$, und $\mathcal{E}$ (links) und $\mathcal{V}$ (rechts) seien wie in Abbildung 2.2 oben definiert.

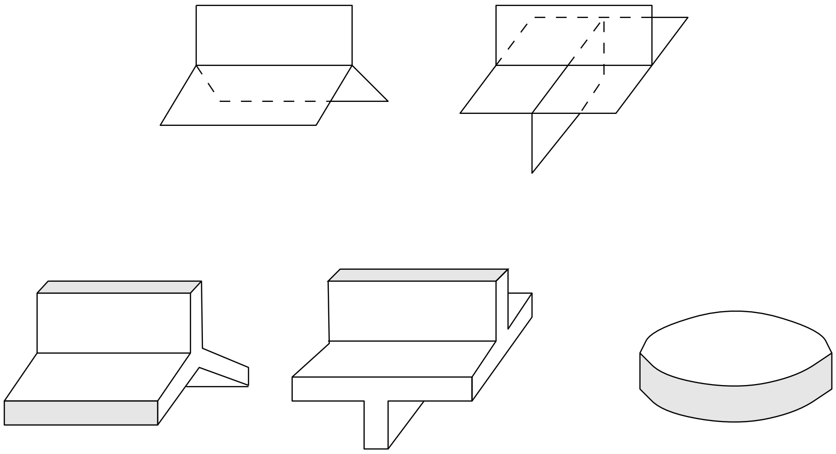


Abbildung 2.2: Bausteine für Pseudoflächen und Mannigfaltigkeiten

Offenbar entsteht jede spezielle Pseudofläche P mit n Ecken aus n Kopien von $\mathcal{V}$ und $2n$ Kopien von $\mathcal{E}$ durch Verkleben an Trioden und anschließendem Einkleben von Scheiben. Wenn nun P Kollabierretrakt einer Mannigfaltigkeit M ist, so entsteht M im wesentlichen durch entsprechendes Verkleben von *aufgedickten* Kopien von $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}$ bzw. D^2 (siehe Abbildung 2.2 unten). P ist dabei die „Seele" der aufgedickten Teile, und M kollabiert entlang der Aufdickung. Dies ist eine Henkelzerlegung von M: Die Teile $\mathcal{V}$ sind 0-Henkel, $\mathcal{E}$ 1-Henkel, und die eingeklebten Scheiben 2-Henkel. Diese Henkelzerlegung ist in „allgemeiner Lage"; jede Henkelzerlegung läßt sich in eine solche überführen: Wenn über einen Einshenkel mehr als drei Bögen verlaufen, so wird er durch zwei Einshenkel ersetzt, an die jeweils weniger Scheiben stoßen (siehe Abbildung 2.3); durch ein ähnliches Verfahren erreicht man, daß an jedem Nullhenkel nur vier Klebestellen für Einshenkel liegen. Einshenkel, an die weniger als drei Zweihenkel stoßen, kann man beseitigen (ebenfalls in Abbildung 2.3 zu sehen). Das ist zugleich eine Beweisidee, daß jede Mannigfaltigkeit einen Kollabierretrakt besitzt.

Jede Immersion $j : \mathrm{S}^1 \to SP$ definiert ein $\mathcal{T}$-Bündel B_j über S^1, und zwar *lokal* parallel zu j in den jeweils angrenzenden Flügeln der durchlaufenen Stücke $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}$ (siehe Abbildung 2.4). Global liegt B_j hingegen *nicht* in P, es hat insbesondere keine Selbstüberschneidungen. Dann gilt:

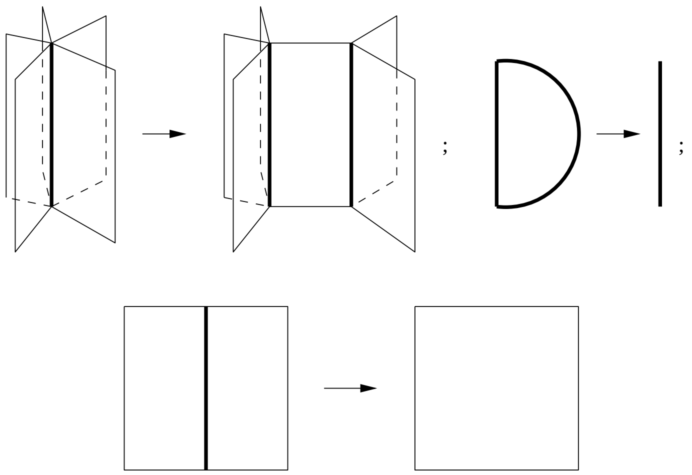


Abbildung 2.3: Erreichen der „allgemeinen Lage“ für Zweihenkel

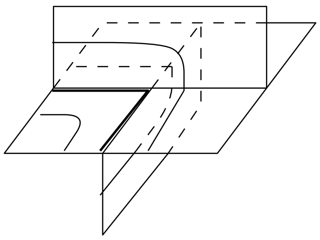


Abbildung 2.4: Ein $\mathcal{T}$-Bündel

Satz 2.2: *1. Sei D eine Scheibe in $P - SP$ und $j_D : D \to SP$ die Klebeabbildung.*
Es existiert eine Dreimannigfaltigkeit M, die auf P kollabiert
$\iff$ B_{j_D} ist für alle Scheiben D in $P - SP$ ein triviales *$\mathcal{T}$-Bündel (d.h. $B_{j_D} = \mathcal{T} \times \mathrm{S}^1$).*

2. Es gibt eine orientierbare *Dreimannigfaltigkeit M, die auf P kollabiert*
$\iff$ Für jede Immersion $j : \mathrm{S}^1 \to SP$ gilt: B_j hat eine oder drei Komponenten. (Man betrachtet hier also nicht nur Klebeabbildungen).

Beweis: 1. Es ist zu untersuchen, wann sich P im Sinne von Abbildung 2.2 zu einer Mannigfaltigkeit aufdicken läßt. Eine Komponente von B_{j_D} kann man sich als in D liegend vorstellen; es kommt jetzt nur noch darauf an, wie die anderen Flügel entlang von j_D verklebt werden. Wenn sie noch genau eine weitere Komponente des Bündels bilden, ist B_{j_D} nichttrivial; beim Versuch, die aufgedickten Bauteile aus Abbildung 2.2 zu verkleben, bilden die gepunkteten Bereiche ein Möbiusband parallel zu j_D, und es ist unmöglich, die angeklebte Scheibe D aufzudicken. Wenn die anderen Flügel entlang von j_D hingegen *zwei* weitere Komponenten des Bündels bilden, ist B_{j_D} trivial; die gepunkteten Bereiche bilden diesmal einen Annulus, und es ist kein Problem, D aufzudicken.

2. Es gibt nach Fall 1. eine Mannigfaltigkeit M, die auf P kollabiert, denn sei wieder j_D die Klebeabbildung einer Scheibe D in P; wie oben gesehen, hat B_{j_D} zwei oder drei Komponenten, wobei ersteres durch die Voraussetzung ausgeschlossen wurde, das Bündel ist also trivial. Es bleibt die Orientierbarkeit von M zu zeigen, also daß entlang jedes geschlossenen Weges j die Orientierung einer Rechtsschraube erhalten bleibt. Dies wird durch die offensichtliche Äquivalenz der folgenden Aussagen und durch die Voraussetzung sichergestellt:

   (a) Entlang j ändert sich die Orientierung von M.

   (b) Beim Verkleben der aufgedickten Teile aus Abbildung 2.2 wird *ungerad oft* orientierungserhaltend verklebt, wobei die Teile mit ihrer natürlichen Orientierung im $\mathbb{R}^3$ versehen sind.

   (c) B_j hat genau 2 Komponenten. **q.e.d.**

2.1.1 Orientierte Pseudoflächen

Es wäre kein Problem, für einen Kollabierretrakt einer orientierten Mannigfaltigkeit eine induzierte Orientierung zu definieren; jedoch möchte ich mich von der Einbettung lösen und „Orientierung" als innere Größe definieren.

Definition 2.3: Sei P eine spezielle Pseudofläche; wähle für jede Kante von P eine Richtung und für die Flügel dieser Kante eine zyklische Ordnung (diese Wahl nennt man **Orientierung** der Kante). Eine *gleichzeitige* Änderung der Richtung und der zyklischen Ordnung soll per definitionem an der Orientierung der Kante nichts ändern (siehe Abbildung 2.5 links).

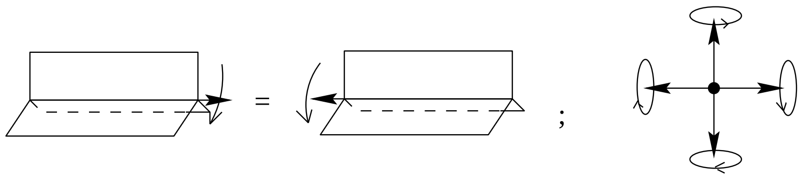


Abbildung 2.5: Orientierung von Kanten und Verträglichkeit an einer Ecke

Die Orientierungen der Kanten heißen konsistent, falls an jeder Verklebung die Orientierungen der Kanten mit den Orientierungen der Stücke $\mathcal{E}$ und $\mathcal{V}$ verträglich sind, so wie in Abbildung 2.5 rechts angedeutet. Wenn eine solche konsistente Wahl von Kantenorientierungen existiert, heißt P **orientierbar**, und die Wahl heißt **Orientierung** von P.

Bemerkung 2.4: *P hat keine oder zwei mögliche Orientierungen.*

Die Idee dieser Definition ist, daß eine Rechtsschraube beim Transport entlang eines geschlossenen Weges in einer orientierten Dreimannigfaltigkeit in sich übergehen muß; eine orientierte Kante ist aber nichts anderes als eine Rechtsschraube.

Lemma 2.5: *P ist orientierbar*
$\iff$ *Für jede Immersion $j : \mathrm{S}^1 \to SP$ hat B_j eine oder drei Komponenten.*
Es gibt also für orientierbare spezielle Pseudoflächen P stets eine orientierbare Mannigfaltigkeit M, die auf sie kollabiert, und die möglichen Orientierungen von M und P entsprechen einander in natürlicher Weise.

Beweis: Sei $e_1, \dots, e_n$ ein geschlossener Kantenzug gemäß j; oE. seien alle Kanten mit derselben Richtung versehen. Es ist kein Problem, von e_1 bis e_n konsistente Orientierungen der Kanten zu wählen, und es bleibt nur die Frage, ob der Anfang von e_1 mit dem Ende von e_n konsistent verklebt werden kann (siehe Abbildung 2.6). Dies ist genau dann der Fall, wenn Anfang und Ende identisch

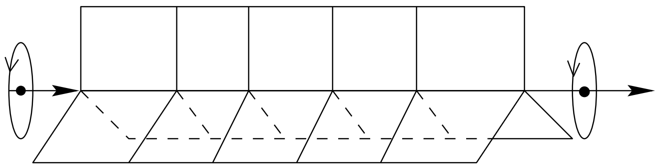


Abbildung 2.6: Ein geschlossener Kantenzug

oder mit einem „Dritteltwist" nach links oder rechts verklebt werden; dies gilt genau dann, wenn B_j eine (Dritteltwist) oder drei (kein Twist) Komponenten hat. $\square$

Notation 2.6: Sei u eine Orientierung einer speziellen orientierbaren Pseudofläche P, ω eine Orientierung einer kompakten orientierbaren Dreimannigfaltigkeit M; sei $\mathcal{M}^\Omega(P^u)$ die wie oben definierte orientierte kompakte Dreimannigfaltigkeit, die zu P gehört. Offenbar gilt $M^\omega = \mathcal{M}^\Omega(P^u) \Rightarrow M^{-\omega} = \mathcal{M}^\Omega(P^{-u})$.

Satz 2.7:
1. *Zu jeder orientierten speziellen Pseudofläche P^u existiert eine bis auf Homöomorphie eindeutige kompakte orientierte Dreimannigfaltigkeit M^ω, die auf P^u kollabiert.*
2. *Jede kompakte orientierte Dreimannigfaltigkeit besitzt einen orientierten Kollabierretrakt.*
3. *Seien $P_1^{u_1}$ und $P_2^{u_2}$ orientierte spezielle Pseudoflächen mit $\mathcal{M}^\Omega(P_1^{u_1}) \approx \mathcal{M}^\Omega(P_2^{u_2})$ orientiert homöomorph, so gilt $P_1^{u_1} \sim_T P_2^{u_2}$ durch* orientierte *Prozesse T und T_0 (siehe Abbildung 2.7, der Prozeß T_0 ist analog); die Orientierungen aller Kanten sind durch die eine angegebene Orientierung erzwungen.*

Beweis: Es bleibt nur der letzte Punkt zu zeigen: Gehe $P_1^{u_1}$ durch einen *unorientierten* T- bzw. T_0-Prozeß in $P_2^{u_2}$ über (wie bekannt reicht das). Dieser Prozeß findet eingebettet in *derselben* orientierten Dreimannigfaltigkeit M statt. Außerhalb des Bildausschnittes verändert sich nichts, insbesondere nicht die Orientierung von M; damit stimmen auch die induzierten Orientierungen der Kollabierretrakte außerhalb des Bildausschnittes überein. Es gibt jeweils genau eine Möglichkeit, die Kanten innerhalb des Ausschnittes konsistent zu orientieren, nämlich nur die in Abbildung 2.7 angegebene. Der als unorientiert vorausgesetzte Prozeß ist also automatisch orientierbar. **q.e.d.**

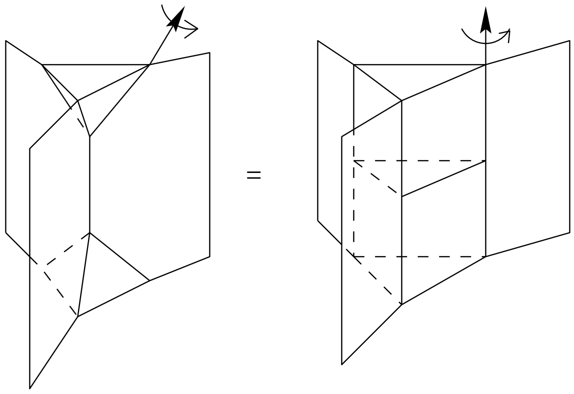


Abbildung 2.7: Orientierter Matveev-Piergallini-Prozeß

2.2 s-Graphen

Im Folgenden werde ich eine graphische Darstellung für *unorientierte* Pseudoflächen vorstellen, die im nächsten Abschnitt auf orientierte angewandt wird.

Definition 2.8: Sei v eine Ecke einer speziellen Pseudofläche P; eine **Markierung** von v besteht in der Wahl eines Flügels D aus einer Umgebung $\mathcal{V}$ von v und der Wahl einer Orientierung für die Scheibe, die aus den Flügeln $F_1, \ldots, F_4$ besteht. Mit anderen Worten besteht die Wahl darin, $\mathcal{V}$ auf eine der 12 möglichen Arten so hinzuzeichnen wie in Abbildung 2.8 oben links. Wenn man sich

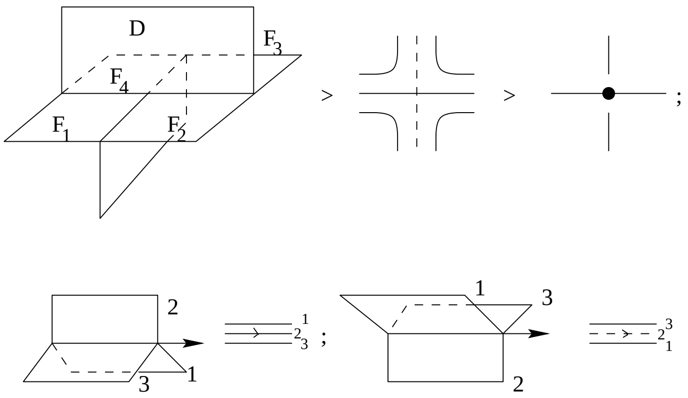
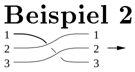


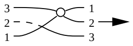
Abbildung 2.8: Markierung von Ecken und Kanten

vorstellt, von oben auf das Bild zu sehen, erscheint die oben in der Mitte zu sehende graphische Darstellung und ihre Abkürzung rechts sehr natürlich. Auch Kanten werden markiert: Man wählt zunächst eine Richtung und numeriert die drei Flügel von $\mathcal{E}$ als Rechtsschraube wie in Abbildung 2.8 unten zusammen mit der graphischen Kurznotation zu sehen.

Das Verkleben der Stücke an einer Triode erklärt eine Permutation $\sigma \in S_3$ der drei Flügel einer Kante; dabei soll σ per definitionem die Nummer des Flügels *am Ende* der Kante auf die Nummer des dazugehörigen Flügels am Anfang der Kante abbilden.

Beispiel 2.9:


$\sigma = (123)$; Die zugehörige Kante kann im $\mathbb{R}^3$ realisiert werden.


$\sigma = (23)$; Die zugehörige Kante kann nicht im $\mathbb{R}^3$, wohl aber im $\mathbb{R}^4$ realisiert werden.

Wird SP in der beschriebenen Weise markiert und in allgemeiner Lage in die Ebene projiziert, entsteht ein **s-Graph**: Das ist ein zusammenhängender ebener 4-wertiger Graph, bei dem einige Ecken markiert sind (die anderen Ecken des Graphen entsprechen den durch Projektion entstandenen Überschneidungen); als Kante bezeichne ich eine Verbindung zweier *markierter* Ecken (die evtl. über unmarkierte Ecken läuft). Die Kanten sind mit Elementen der Permutationsgruppe S_3 beschriftet. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.9 zu sehen.

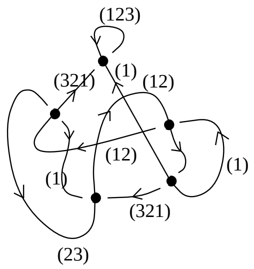


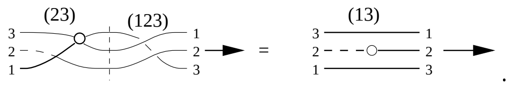
Abbildung 2.9: Beispiel eines s-Graphen

Jeder speziellen Pseudofläche ist also ein s-Graph zugeordnet; doch die Konstruktion geht auch umgekehrt: Sei ein s-Graph Γ gegeben; wähle für unmarkierte Ecken eine „Auflösung", d.h. entscheide beliebig, welche Kante oberhalb der anderen verläuft. Der Graph definiert eine Verklebung von Stücken $\mathcal{E}$ und $\mathcal{V}$ gemäß der Markierung von Γ. Nach Einkleben von Scheiben in den Rand des Gebildes entsteht eine spezielle Pseudofläche P. Wie man die unmarkierten Ecken auflöst, ist für den Homöomorphietyp von P natürlich unwichtig, und auch ein Volltwist einer Kante (was dieselbe Permutation liefern würde), ändert an P nichts Wesentliches.

Notation 2.10: Sei Γ ein s-Graph; dann sei $\mathcal{D}(\Gamma)$ die zugehörige markierte Pseudofläche und $\mathcal{P}(\Gamma)$ dieselbe Pseudofläche ohne Markierung. Falls es eine Dreimannigfaltigkeit gibt, die auf $\mathcal{P}(\Gamma)$ kollabiert, so nennt man sie $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Satz 2.2 liefert das Kriterium, ob es eine (evtl. orientierte) Dreimannigfaltigkeit M gibt, die auf $\mathcal{P}(\Gamma)$ kollabiert. M ist dann bis auf Homöomorphie eindeutig durch Γ bestimmt. Es bleibt zu untersuchen, wie zwei s-Graphen, die dieselbe Mannigfaltigkeit repräsentieren, ineinander übergehen. Man muß die Wahlen, die man bei der Konstruktion von Γ aus einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit trifft, herausfaktorisieren, also die Prozesse T und T_0, die Markierung der Ecken und Kanten und schließlich die Projektion des Graphen in die Ebene sowie ebene Isotopie. Vorher noch eine kurze Bemerkung: Man kann Kanten unterteilen;

die Farben der Teile multiplizieren sich, wie man sich an folgendem Beispiel klar macht:



Alle unten definierten Prozesse sind als lokal anzusehen, und evtl. vorhandene Farben an Kanten werden zu den schon vorhandenen Farben außerhalb des veränderten Ausschnittes multipliziert. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei s-Graphen.

1. $\mathcal{D}(\Gamma_1) \approx \mathcal{D}(\Gamma_2)$ markierungserhaltend
   $\iff$ $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ durch **Reidemeister-Prozesse** R_i (siehe Abbildung 2.10), ebene Isotopie und einen Prozeß U, der im Umorientieren einer Kante besteht. Bei U gehe die Farbe σ der umzuorientierenden Kante in $(13)\sigma^{-1}(13)$ über; man prüft leicht nach, daß dadurch die Kantenverklebung erhalten bleibt.

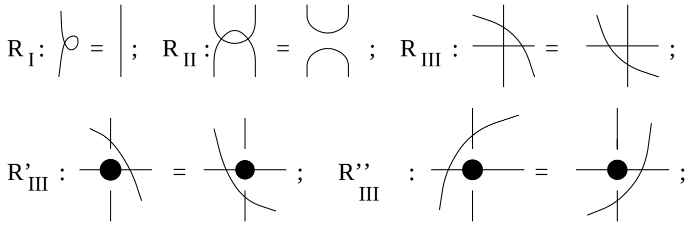


Abbildung 2.10: Reidemeister-Prozesse

2. $\mathcal{P}(\Gamma_1) \approx \mathcal{P}(\Gamma_2)$ $\iff$ $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ durch die Prozesse R_i, U, C_1 und C_2 (siehe Abbildung 2.11) sowie ebene Isotopie. Offenbar führen C_1 und C_2 alle 12

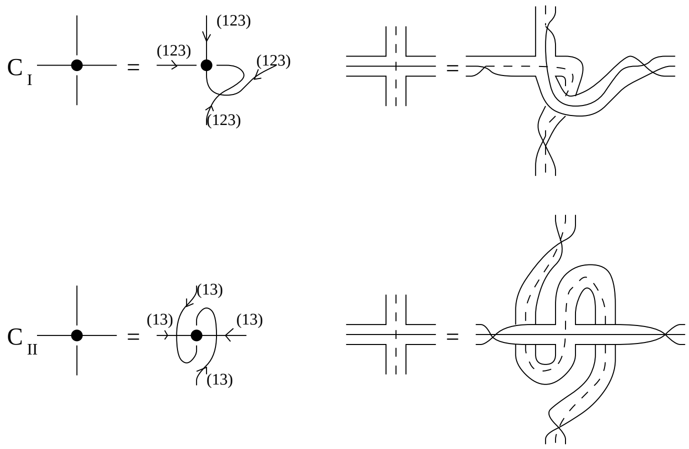


Abbildung 2.11: Ändern der Markierungen

möglichen Markierungen einer Ecke ineinander über: C_1 ändert die Wahl des Flügels D, und C_2 ändert die Orientierung der Scheibe, die aus den Flügeln $F_1, \ldots, F_4$ besteht (vgl. Definition 2.8).

3. Die Prozesse T und T_0 übertragen sich wie in Abbildung 2.12 in den Graphenkalkül; dabei läßt sich die in der Abbildung dargestellte Situation (Markierung der Ecken und die Farbe (1) der Kanten) durch Anwenden der anderen Prozesse erreichen; bei T_0 ist eine zusätzliche Ecke zur Verdeutlichung, welche Kanten „oben" verlaufen, angegeben. Dadurch erhält

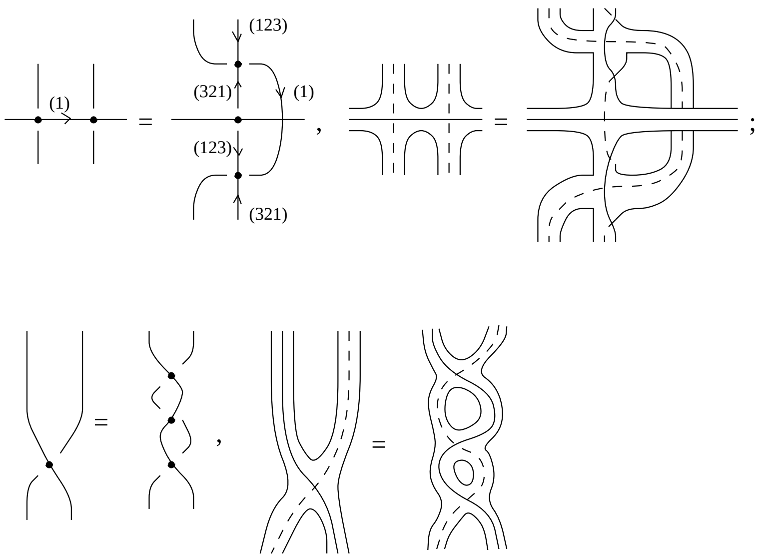


Abbildung 2.12: Übertragung der Prozesse T und T_0

man als Ergebnis:

Theorem 2.11: *Zu jeder kompakten Dreimannigfaltigkeit M gibt es einen s-Graphen Γ, so daß $M \approx \mathcal{M}(\Gamma)$ ist; seien Γ_1 und Γ_2 zwei s-Graphen, für die $\mathcal{M}(\Gamma_i)$ definiert ist. Dann gilt:*

$$\mathcal{M}(\Gamma_1) \approx \mathcal{M}(\Gamma_2) \iff \Gamma_1 \sim \Gamma_2,$$

wobei die Äquivalenzrelation durch die Prozesse R_i, U, C_i, T, T_0 und ihre inversen Prozesse sowie ebene Isotopie erzeugt wird.

2.2.1 Graphen für orientierte Pseudoflächen

Sei Γ ein s-Graph; bekanntermaßen ist $\mathcal{P}(\Gamma)$ genau dann orientierbar, wenn entlang jedes geschlossenen Kantenweges j das Bündel B_j eine oder drei Komponenten hat, also die Flügel entlang des Weges mit insgesamt einem Dritteltwist oder ungetwistet verklebt sind und damit das Produkt der Kantenfarben entlang des Weges eine Permutation mit Signum $+1$ ist. Orientierte Pseudoflächen zu betrachten, hat einen Vorteil: Man braucht nur noch sechs mögliche Markierungen für jede Ecke zu betrachten. Man wähle nämlich einen Flügel D wie in Definition 2.8; die Orientierung der Scheibe, die von den Flügeln $F_1, \dots, F_4$ gebildet wird, ist durch die Orientierung der Pseudofläche in natürlicher Weise gegeben.

Lemma 2.12: *Sei Γ ein s-Graph; es gibt eine Orientierung von $\mathcal{D}(\Gamma)$, die verträglich mit den Eckenmarkierungen ist*
$\Longleftrightarrow$ *Alle Kanten tragen Farben mit Signum +1.*

Beweis: „$\Leftarrow$" ist nach der Bemerkung von oben klar. Sei nun eine mit den Markierungen verträgliche Orientierung vorgegeben. An jeder markierten Ecke wird eine lokale Orientierung induziert. Der Transport einer Rechtsschraube von einer Ecke über eine Kante zu einer Nachbarecke muß mit den lokalen Orientierungen verträglich sein; dies ist jedoch genau dann der Fall, wenn die Kantenstücke durch einen Dritteltwist oder identisch verklebt wurden, und dies bedeutet eine Farbe mit Signum +1. □

Dieses Lemma hat einige angenehme Konsequenzen: Früher mußte man den Kanten von Γ erst eine Richtung geben, bevor man ihre Farbe definieren konnte, und diese Wahl durch Einführung des Prozesses U berücksichtigen; Farben mit Signum +1, also (1), (123) und (321), werden aber durch U *nicht* verändert! Die Farbe der Kanten ist im orientierten Fall also auch ohne eine Richtung der Kanten wohldefiniert, und der Prozeß U wird überflüssig. Auch C_2 fällt weg, denn dieser Prozeß berücksichtigte eine Markierungswahl, die jetzt durch die kanonische Orientierung der Scheibe $F_1, \dots, F_4$ in Definition 2.8 nicht mehr nötig ist.

Definition 2.13: Ein **o-Graph** ist ein ebener zusammenhängender 4-wertiger Graph, dessen Ecken wie bei s-Graphen markiert sind, dessen Kanten jedoch ungerichtet sind und Farben aus $\mathbb{Z}_3 := \langle(123)\rangle$ tragen. Zu jedem o-Graphen Γ existiert eine orientierte unmarkierte spezielle Pseudofläche $\mathcal{P}(\Gamma)$ und eine orientierte kompakte Dreimannigfaltigkeit $\mathcal{M}(\Gamma)$ (Ohne weitere Bedingungen an Γ, wie sie im unorientierten Fall nötig waren!).

Offenbar erhält man die umgekehrt orientierte Mannigfaltigkeit, wenn man an jeder markierten Ecke von Γ die Markierung invertiert und zugleich jede Kantenfarbe $z \in \mathbb{Z}_3$ durch z^{-1} ersetzt. In Zusammenfassung des bisher gesagten folgt das Hauptresultat dieses Abschnitts:

Theorem 2.14: *Zu jeder kompakten orientierten Dreimannigfaltigkeit M gibt es einen o-Graphen Γ mit $M \approx \mathcal{M}(\Gamma)$ (orientiert). Sind Γ_1 und Γ_2 o-Graphen, so gilt:*
$\mathcal{M}(\Gamma_1) \approx \mathcal{M}(\Gamma_2)$ *(orientiert)*
$\Longleftrightarrow$ $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ *durch die Prozesse R_i, C_1, T und T_0.*

2.3 Beispiele, Anwendungen und Bemerkungen zu Kollabierretrakten und o-Graphen

2.3.1 Faktorisierung des T_0-Prozesses

Ich möchte zunächst ein Resultat beweisen, das ich in [BP95] ohne Beweis fand und die Arbeit wesentlich erleichtert: Unter gewissen (leicht zu erfüllenden)

Zusatzvoraussetzungen an die Kollabierretrakte erweist sich der Prozeß T_0 als überflüssig.

Definition 2.15: Ein Kollabierretrakt P einer Dreimannigfaltigkeit M heißt **zulässig**, wenn P mindestens zwei Ecken enthält.

Offenbar läßt sich aus einem nicht zulässigen Kollabierretrakt P ein zulässiger machen, indem man irgendwo einen Prozeß T_0 ausführt und damit die Eckenzahl um zwei erhöht. Zwei zulässige Kollabierretrakte einer Mannigfaltigkeit gehen durch eine endliche Kette von Prozessen T und T_0 auseinander hervor, wobei jeder Zwischenschritt wieder über *zulässige* Spines führt: Falls in der durch Theorem 1.12 gesicherten Kette ein Zwischenschritt nicht auf einen zulässigen Spine führt, so fügt man an einer Stelle, wo es nicht stört, einen Prozeß T_0 ein und sichert dadurch wieder die Existenz zweier Ecken. Bei Gelegenheit macht man den Prozeß wieder rückgängig.

Satz 2.16: *Zwei zulässige Kollabierretrakte einer Mannigfaltigkeit M gehen durch eine endliche Kette von Matveev-Piergallini-Prozessen ineinander über. Äquivalenz wird also nur durch einen einzigen lokalen Prozeß erreicht!*

Beweis: Der Beweis wird im Graphenkalkül geführt, wobei ich oE. nur den orientierten Fall betrachte; es ist zu zeigen, daß T_0 über T, R_i und C_1 faktorisiert. OBdA ist die Ausgangssituation wie links oben in Abbildung 2.13: Die Existenz zweier Ecken wird durch die Voraussetzung gesichert, und die Markierungen lassen sich durch die Prozesse C_1 und R_i erreichen. Rechts unten im Bild ist das Ergebnis eines T_0-Prozesses gezeigt; der Rest der Abbildung besteht aus Anwendungen von T, R_i und C_1. **q.e.d.**

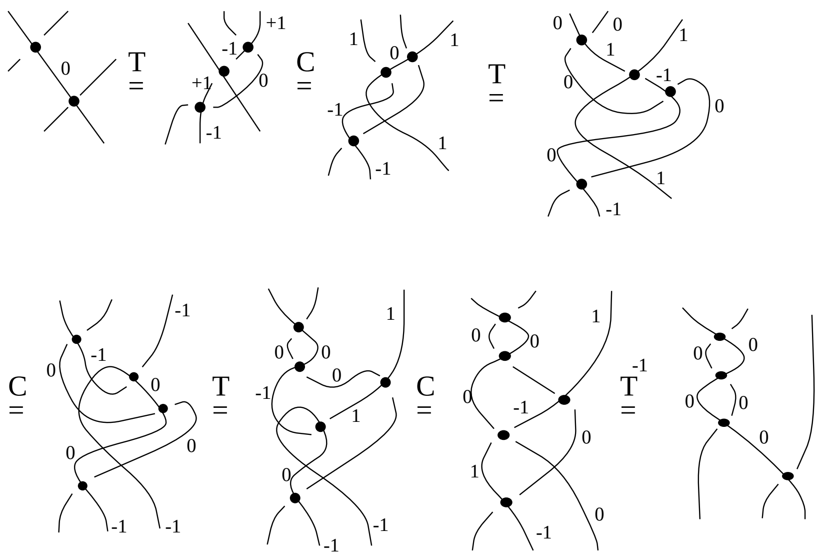


Abbildung 2.13: Faktorisieren von T_0

2.3.2 Graphen für Ball und Volltorus; ∂-zusammenhängende Summen im Graphenkalkül

Ein o-Graph für Bings Haus aus Abbildung 1.1 ist in Abbildung 2.14 gezeigt (nach Ausführen einiger C-Prozesse). Ein Spine für den Volltorus und ein zu-

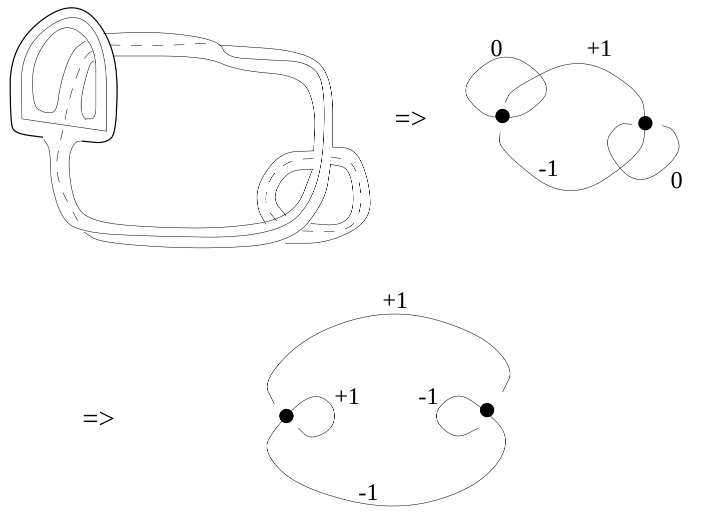


Abbildung 2.14: Ein o-Graph für den Dreiball

gehöriger o-Graph sind in Abbildung 2.15 gezeigt; die Ähnlichkeit zu Bings Haus ist deutlich; man beachte aber, daß das Überlappen der Flügel am linken oberen „Schornstein“ nötig ist, damit der Graph zusammenhängend wird und kein Annulus als Flächenkomponente auftritt.

In Abbildung 2.16 ist gezeigt, wie man eine Scheibe, also einen Zweihenkel, an den Meridian (oben) bzw. die Longitude des Torus klebt.

Abbildung 2.17 zeigt, wie ∂-zusammenhängende Summen im Graphenkalkül aussehen. Es seien M_1 und M_2 berandete Dreimannigfaltigkeiten mit Kollabierretrakten P_i; $D_i \subset \partial M_i$ seien die Scheiben, entlang denen die Summe gebildet wird. Ohne Einschränkung liege D_i so, daß sie auf eine Scheibe in P_i kollabiert, welche genau eine Kante von P_i trifft. Die ∂-zusammenhängende Summe werde dann wie links in der Abbildung zu sehen gebildet. Weiter setze ich ohne Einschränkung voraus, daß beide Kollabierretrakte mindestens eine Ecke enthalten. Durch Einbeziehen dieser Ecke rechts im Bild wird klar, wie die Flügel der einzelnen Kanten liegen („Mittlerer Flügel nach oben oder nach unten?“).

Dies ermöglicht es mir, einen Algorithmus anzugeben, um aus der Heegard-Zerlegung einer orientierbaren Dreimannigfaltigkeit einen Kollabierretrakt zu konstruieren. Petronio entwickelte in seiner Dissertation [Pet95] Algorithmen, um aus einer durch Dehn-Eingriffe gegebenen Mannigfaltigkeit einen Kollabierretrakt und aus diesem wiederum eine Heegard-Zerlegung zu konstruieren. Letzteres ist leichter als Petronio es schildert: Die Kanten eines Kollabierretraktes P der geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit M werden in M aufgedickt; es entsteht ein Henkelkörper. Die Flächen von P definieren dann die Anklebung von Zweihenkeln und mithin ein Heegard-Diagramm. Doch nun zu mei-

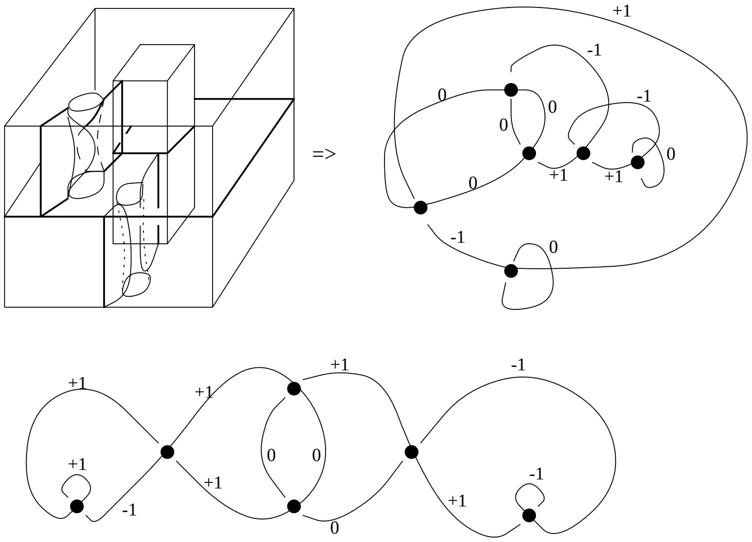


Abbildung 2.15: Spine und o-Graph für den Torus

nem Algorithmus: Durch ∂-zusammenhängende Summen entsteht aus Kopien des Volltorus jeder Henkelkörper. Ein Graph dafür ist leicht zu finden, da ich einen Graphen des Volltorus angab und zeigte, wie Graphen sich unter Summen verhalten. Das Heegard-Diagramm sagt nun, wie Zweihenkel an den Rand dieses Henkelkörpers geklebt werden; ich zeigte, wie sich das Ankleben entlang Longitude und Meridian eines Torus und damit entlang jedes einfach geschlossenen Weges auf einem Henkelkörper auswirkt. So findet man einen Graphen für die durch das Heegard-Diagramm dargestellte orientierte Dreimannigfaltigkeit.

2.3.3 Geschlossene Pseudomannigfaltigkeiten

Als nächstes möchte ich einen Zusammenhang herstellen zwischen 3-Mannigfaltigkeiten (mit Rand) und geschlossenen *Pseudo*-3-Mannigfaltigkeiten; ich beweise, daß die zugehörigen Homöomorphieklassifikationen zueinander äquivalent sind. In der Literatur fand ich kein entsprechendes Resultat, obwohl es vermutlich schon bekannt ist. Ich nutze die Tatsache, daß das Zweigerüst der dualen Zellzerlegung einer triangulierten Pseudodreimannigfaltigkeit eine spezielle Pseudofläche ist (das sieht man leicht ein). Umgekehrt ist einem „Baustein“ $\mathcal{V}$ (siehe Abbildung 2.2) ein Tetraeder zugeordnet, zu welchem $\mathcal{V}$ dual ist; die 6 Flügel von $\mathcal{V}$ entsprechen den Kanten des Tetraeders. Die Verklebung der Bausteine an Trioden (siehe Definition 2.1) liefert eine Klebevorschrift der zugehörigen Tetraederseiten, und man erhält eine Pseudomannigfaltigkeit (siehe Abbildung 2.18). Sie ist trianguliert, wobei ich Ausartungen zulassen möchte, es dürfen also in einem Simplex Randsimplizia mehrfach vorkommen.

Definition 2.17: Sei P eine spezielle Pseudofläche; die durch obige Konstruktion gewonnene triangulierte Pseudodreimannigfaltigkeit heißt $\mathcal{T}(P)$. P und $\mathcal{T}(P)$ *mit Triangulierung* sind einander eineindeutig zugeordnet.

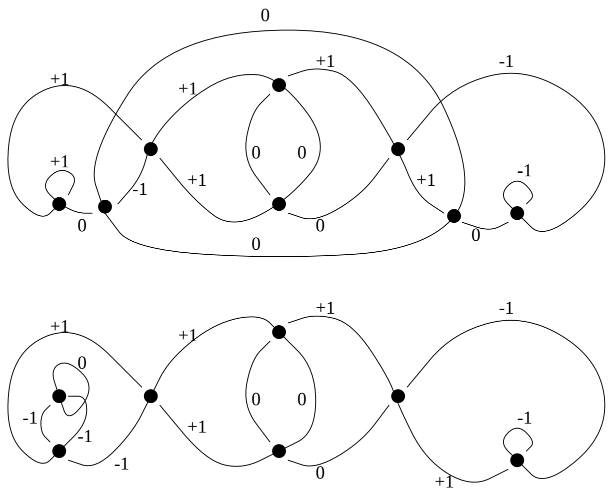


Abbildung 2.16: Meridian und Longitude

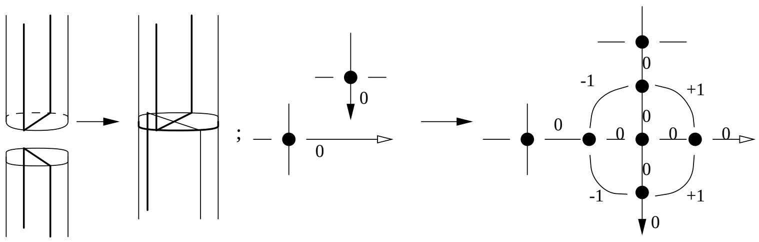


Abbildung 2.17: ∂-zusammenhängende Summe

Behauptung 2.18: *Sei M eine triangulierte Pseudodreimannigfaltigkeit und P das Zweigerüst der dualen Zellzerlegung von M (P ist eine spezielle Pseudofläche); dann gibt es eine (bis auf Homöomorphie) eindeutige Dreimannigfaltigkeit, die auf P kollabiert.*

Beweis: Sei x der Mittelpunkt einer Kante k von M; dann ist das Innere von $\mathrm{St}(x, M')$ ein Ball; dual heißt das, daß die Klebeabbildung $j : D \to SP$ der zu k dualen Scheibe von P ein triviales T-Bündel besitzt. Das Kriterium aus Satz 2.2 ist also erfüllt. Anderer Beweis: Entstehe $\tilde{M}$ aus M durch Entfernen hinreichend kleiner Umgebungen jeder Ecke von M; $\tilde{M}$ ist eine Mannigfaltigkeit, da die einzigen singulären Punkte von triangulierten Pseudomannigfaltigkeiten in den Ecken liegen. $\tilde{M}$ kollabiert offenbar auf P; ferner bestimmt der Kollabierretrakt P die Mannigfaltigkeit $\tilde{M}$ eindeutig. □

Satz 2.19: *Seien M_1 und M_2 Dreimannigfaltigkeiten und P_1, P_2 zugehörige Kollabierretrakte.*
$M_1 \approx M_2 \iff \mathcal{T}(P_1) \approx \mathcal{T}(P_2)$ *und* $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ *(Eulercharakteristik).*

Beweis: Abbildung 2.19 zeigt das Duale eines Matveev-Piergallini-Prozesses: Zwei zu einem Hexaeder verklebte Tetraeder werden durch drei Tetraeder er-

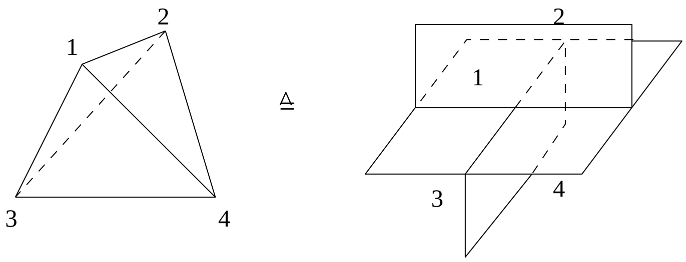


Abbildung 2.18: Beziehung von Pseudoflächen und Pseudomannigfaltigkeiten

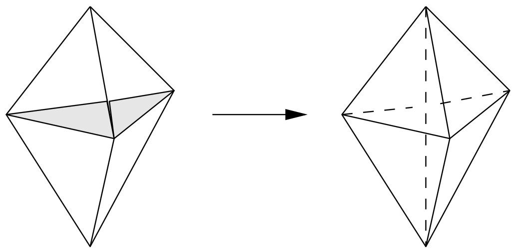


Abbildung 2.19: Der zu T duale Prozeß

setzt. „⇒“ ist dann unter Verwendung von Satz 2.16 klar. Für die andere Richtung verwende ich einen Satz von Alexander (zu finden etwa in [Ale24] oder [Pac78]): Sind zwei triangulierte Pseudodreimannigfaltigkeiten zueinander homöomorph, so sind die Triangulierungen durch sogenannte „Sternprozesse“ zueinander äquivalent. Ein Sternprozeß ist in Abbildung 2.20 oben gezeigt: Man wähle einen Punkt im Inneren einer *Kante*, und ersetze den Stern dieses Punktes durch den Kegel über seinem Link. In Abbildung 2.20 unten ist die Änderung der zugehörigen speziellen Pseudofläche (d.h. des Zweigerüstes der dualen Zellzerlegung) gezeichnet. Wie man sieht, wird eine neue Scheibe angeklebt; sie wird durch einen S-Prozeß erzeugt und dann mit T und T_0 in die richtige Position verschoben. Ein S-Prozeß an einer Pseudofläche P mit zugehöriger Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}P$ entspricht dem Herausschneiden eines Balles aus $\mathcal{M}P$; die anderen Prozesse ändern am Homöomorphietyp von $\mathcal{M}P$ nichts. Dies bedeutet: Wenn $\mathcal{T}P_1 \approx \mathcal{T}P_2$, so ist $M_1 \approx M_2$ *bis auf Herausschneiden von Bällen*; wegen $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ gilt sogar $M_1 \approx M_2$.

Dieser Beweis wurde in [TV92] ähnlich geführt, allerdings zu einem anderen Zweck: Eine Invariante für Dreimannigfaltigkeiten wurde für Triangulierungen erklärt und die Invarianz durch Übersetzen ins duale Zweigerüst gezeigt. **q.e.d.**

Fazit: Jede Invariante für die *geschlossene* Pseudodreimannigfaltigkeit $\mathcal{T}P$ ist auch eine Invariante für die Dreimannigfaltigkeit $\mathcal{M}P$; übrigens entsteht $\mathcal{T}P$ aus $\mathcal{M}P$ durch Identifizieren der Randkomponenten zu je einem Punkt, nämlich einer Ecke in der Triangulierung von $\mathcal{T}P$. Damit lassen sich Invarianten wie die Reidemeister-Franz-deRham-Torsion auch auf Kollabierretrakte übertragen, und es besteht die Möglichkeit, den Blickpunkt etwas zu wechseln und dadurch die Anschauung zu erweitern.

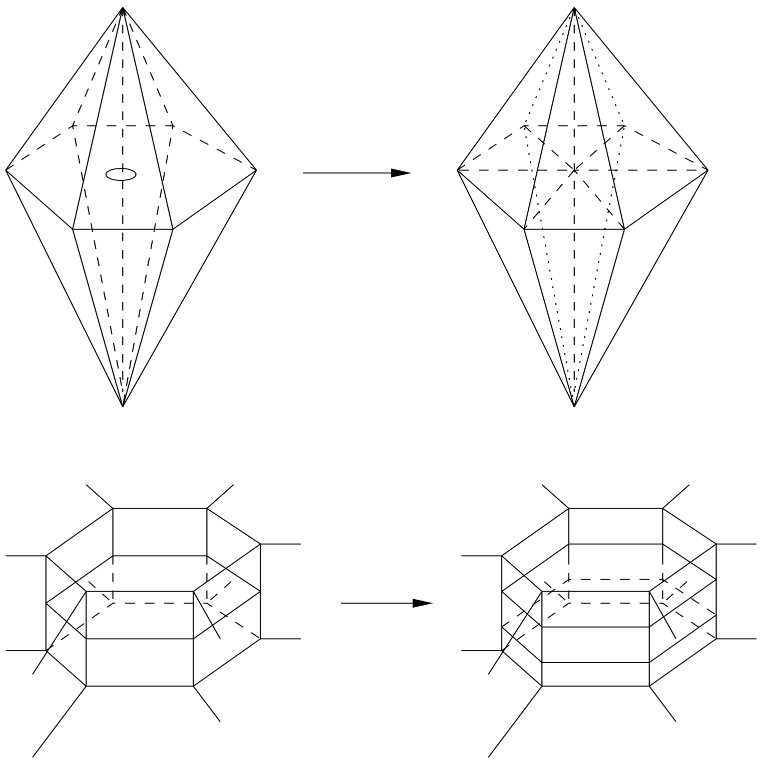


Abbildung 2.20: Ein Sternprozeß und sein dualer Prozeß

Kapitel 3

Kategorien

Ich möchte nun einige Axiome vorstellen, die für verschiedene Zwecke sinnvoll sein werden, da man mit ihrer Hilfe algebraische Realisierungen von Graphenkalkülen wie etwa Knotendiagrammen oder dem Benedetti-Petronio-Kalkül definieren und untersuchen kann — Beispiele, die die Axiome erfüllen, sind allerdings schwer zu finden. Ich folge meistens dem Buch [Tur94], wobei ich nur die wichtigsten Sätze beweise und den Rest übernehme. Die allgemeine Definition von Kategorien setze ich als bekannt voraus.

3.1 Definition und Eigenschaften

3.1.1 Monoidalkategorien

Definition 3.1: Eine **Monoidalkategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{V}$ mit einem **Tensorprodukt** $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, welches für Morphismen f, f', g, g' und Objekte V, W die Axiome

$$(f \circ f') \otimes (g \circ g') = (f \otimes g) \circ (f' \otimes g')$$

und

$$\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V \otimes W}$$

erfüllt, falls die jeweiligen Ausdrücke definiert sind.

Eine **strikte Monoidalkategorie** ist eine Monoidalkategorie zusammen mit einem Objekt $\mathbf{1}$, genannt **Einheitsobjekt**, so daß für alle Objekte U, V, W und alle Morphismen f, g, h gilt (falls die Ausdrücke definiert sind):

$$\begin{aligned} V \otimes \mathbf{1} = V &= \mathbf{1} \otimes V \\ f \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}} \otimes f &= f \\ (U \otimes V) \otimes W &= U \otimes (V \otimes W) \\ (f \otimes g) \otimes h &= f \otimes (g \otimes h). \end{aligned}$$

Definition 3.2: Eine **Dualität** in einer strikten Monoidalkategorie $\mathcal{V}$ ordnet jedem Objekt V ein **duales Objekt** V^* zu, und es gibt Abbildungen

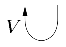
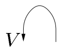
$$\begin{aligned} b_V &: \mathbf{1} \to V^* \otimes V \\ d_V &: V \otimes V^* \to \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Dabei gelten die Axiome

$$\begin{aligned} (d_V \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes b_V) &= \mathrm{id}_V \\ (\mathrm{id}_{V^*} \otimes d_V)(b_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}) &= \mathrm{id}_{V^*}. \end{aligned}$$

Im allgemeinen gilt *nicht* $(V^*)^* = V$.

Beispiel 3.3: Die Moduln über Hauptidealringen bilden strikte Monoidalkategorien; das Tensorprodukt ist das gewohnte, zu einem Modul V ist V^* der gewöhnliche duale Modul, d_V ist die Auswertungsabbildung, b_V die Coauswertung.

Eine wichtige Eigenschaft ist $\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(V, U^* \otimes W)$, und zwar wird $f \in \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$ auf $(\mathrm{id}_{U^*} \otimes f)(b_U \otimes \mathrm{id}_V) \in \mathrm{Hom}(\mathbf{1} \otimes V, U^* \otimes W)$ abgebildet. Zur Nutzung der Anschauungskraft ist es sinnvoll, einen Kalkül mit gefärbten, gerichteten Graphen zu entwickeln. Der Abbildung id_V wird $\downarrow_V$ zugeordnet, man setzt $\downarrow_{V^*} = \uparrow_V$, andere Morphismen $f : V \to W$ werden durch eine „Box“ bzw. einen „Coupon“ $\begin{array}{c}\downarrow^{W}\\ \boxed{f}\\ \downarrow_{V}\end{array}$ dargestellt. Das Tensorprodukt entspricht dem Nebeneinandersetzen von Graphen, und die Abbildungen b_V und d_V werden durch  bzw.  visualisiert; Komposition von Morphismen entspricht Übereinandersetzen von Graphen. Definition 3.2 ist in graphischer Form einfach wie in Abbildung 3.1. Fazit: Gefärbte, gerichtete Graphen mit Coupons stellen

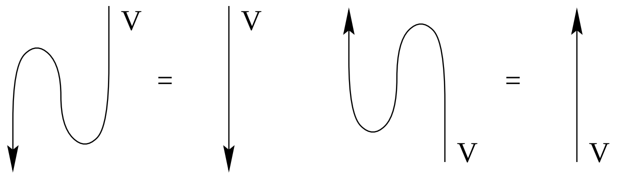


Abbildung 3.1: Definition 3.2 visualisiert

Morphismen dar; ebene Isotopie der *Kanten* ändert am Morphismus nichts, die Coupons dürfen dabei verschoben, aber nicht gedreht werden.

Definition 3.4: Sei $K_{\mathcal{V}}$ oder kurz K die Halbgruppe $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$; Multiplikation ist dabei Hintereinanderausführung von Morphismen.

K besitzt ein neutrales Element, nämlich $\mathrm{id}_{\mathbf{1}}$. K ist abelsch, denn seien $k, k' \in K$; es ist

$$kk' = (k \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}})(\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \otimes k') = k \otimes k' = (\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \otimes k')(k \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}}) = k'k.$$

3.1.2 Ab-Kategorien und halbeinfache Kategorien

In diesem Abschnitt werden Kategorien definiert, die eine schöne Eigenschaft wichtiger Darstellungskategorien nachbilden: Das Zerfallen von Moduln als direkte Summe einfacher Moduln.

Definition 3.5: Eine **Ab-Kategorie** $\mathcal{V}$ ist eine Kategorie, bei der die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ für je zwei Objekte V, W eine abelsche Gruppe bildet und die Komposition von Morphismen bilinear ist. Falls $\mathcal{V}$ zusätzlich eine Monoidalkategorie und das Tensorprodukt bilinear ist, so ist $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) =: K_{\mathcal{V}}$ oder kurz K ein Ring.

Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes ist K ein kommutativer Ring mit Eins, und man nennt ihn **Grundring**. Auf der abelschen Gruppe $\mathrm{Hom}(V, W)$ erhält man eine K-Modulstruktur: Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$;

$$kf := k \otimes f : \mathbf{1} \otimes V = V \to \mathbf{1} \otimes W = W$$

Die Erfüllung der Modulaxiome ist leicht nachprüfbar. Die Abbildung $k \otimes \mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}(V, V)$ $(k \in K)$ heißt **Multiplikation** mit k. Durch die Modulstruktur kann man sowohl direkte Summen der $\mathrm{Hom}(V, W)$ als auch Tensorprodukte über K bilden; man mache sich bewußt, daß die Tensorprodukte der Kategorie $\otimes$ und der Morphismenmoduln $\otimes_K$ nichts miteinander zu tun haben, und *innerhalb* der Kategorie muß es auch nicht unbedingt direkte Summen geben!

Definition 3.6: Ein Objekt V einer Ab-Kategorie heißt **einfach**, wenn die Zuordnung $k \in K \mapsto k \otimes \mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}(V, V)$ bijektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Hom}(V, V)$ ein freier K-Modul vom Rang Eins ist.

Definition 3.7: Sei $\{V_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Objekten; man sagt, $\{V_i\}$ **dominiert** V, wenn es eine *endliche* Menge von Morphismen $\{\sigma_r : V_{i(r)} \to V, \pi_r : V \to V_{i(r)}\}$ gibt, so daß

$$\mathrm{id}_V = \sum_r \sigma_r \pi_r.$$

Anders ausgedrückt: Die Bilder von

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V, V_i) \otimes_K \mathrm{Hom}(V_i, V) &\to \mathrm{Hom}(V, V) \\ g \otimes f &\mapsto fg \end{aligned}$$

erzeugen additiv $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Ein Beispiel bilden Kategorien mit direkten Summen: Wenn V in die direkten Summanden $\{V_{i(r)}\}$ zerfällt (womöglich mit Vielfachheiten), so entsprechen den π_r die Projektionen auf die direkten Summanden und den σ_r deren Einbettungen.

Definition 3.8: Eine Ab-Kategorie heißt **halbeinfach**, wenn eine nicht notwendig endliche Menge $\{V_i\}_{i \in I}$ von *einfachen* Objekten existiert, die folgende Axiome erfüllt:

1. (Normalisierungsaxiom) Es gibt $0 \in I$ mit $V_0 = \mathbf{1}$.

2. (Dualitätsaxiom) Für jedes $i \in I$ gibt es ein $i^* \in I$, so daß V_{i^*} zu V_i^* isomorph ist.
3. (Dominierungsaxiom) Jedes Objekt wird durch die Objekte $\{V_i\}$ dominiert.
4. (Axiom von Schur) $\mathrm{Hom}(V_i, V_j) \cong \delta_{i,j} \cdot K$.

Beispiel 3.9: Die Kategorie der Moduln über halbeinfachen Lie-Algebren ist halbeinfach: Jeder solche Modul zerfällt als direkte Summe von einfachen Moduln, direkte Summen entsprechen der Dominierung; $\{V_i\}$ ist die Menge der einfachen Moduln.

Es folgen zwei Lemmata, für deren Beweis ich zum Teil auf [Tur94] verweisen möchte.

Lemma 3.10: *Für je zwei Objekte V, W einer halbeinfachen Kategorie ist $\mathrm{Hom}(V, W)$ ein projektiver K-Modul, also direkter Summand eines freien K-Moduls. Für ein Objekt W gibt es nur endlich viele $i \in I$, für die $\mathrm{Hom}(V_i, W)$ nichttrivial ist.* □

Lemma 3.11: *Für Objekte V, W einer halbeinfachen Kategorie gilt*

$$\bigoplus_{i \in I} (\mathrm{Hom}(V, V_i) \otimes_K \mathrm{Hom}(V_i, W)) \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$

Der Isomorphismus wird auf den einzelnen Summanden durch Komposition erzeugt.

Da dieses Lemma entscheidend für die Konstruktion von $6j$-Symbolen und damit für Invarianten von Dreimannigfaltigkeiten wird, möchte ich zumindest eine Beweisskizze vorführen:

Beweis: Wegen der Halbeinfachheit der Kategorie gilt $\mathrm{id}_W = \sum_r \sigma_r \pi_r$, $\sigma_r : V_{i(r)} \to W, \pi_r : W \to V_{i(r)}$. Daß die direkte Summe surjektiv auf $\mathrm{Hom}(V, W)$ abgebildet wird,wurde schon in der Definition 3.7 erwähnt; zu zeigen ist also noch die Injektivität. Betrachte zunächst einen Summanden; sei $\sum_q \alpha_q \otimes \beta_q \in \mathrm{Hom}(V, V_i) \otimes_K \mathrm{Hom}(V_i, W)$. Zeige: Wenn $\sum_q \beta_q \alpha_q = 0$, so ist auch $\sum_q \alpha_q \otimes \beta_q = 0$.

Für jedes q gilt: $\beta_q = \sum_r \sigma_r \pi_r \beta_q = \sum_{r, i(r)=i} \sigma_r \pi_r \beta_q$ wegen Schurs Axiom. V_i ist einfach, also ist $\pi_r \beta_q$ Multiplikation mit einem $z(r, q) \in K$, d.h. $\beta_q = \sum_{r, i(r)=i} z(r, q) \sigma_r$. Und so ist $\sum_q \alpha_q \otimes \beta_q = \sum_q \sum_{r, i(r)=i} z(r, q) \alpha_q \otimes \sigma_r = \sum_q \sum_{r, i(r)=i} g_r \beta_q \alpha_q \otimes \sigma_r = 0$ wegen der Voraussetzung $\sum_q \beta_q \alpha_q = 0$, was zu zeigen war.

Die gesamte Summe wird ebenfalls injektiv abgebildet, was man mit dem Axiom von Schur leicht einsieht. □

3.1.3 Bandkategorien

Weitere Zusatzstrukturen benötigt man, um Knotentheorie betreiben zu können; die Idee ist, einem Knotendiagramm einen Morphismus einer Kategorie zuzuordnen, so daß der Morphismus invariant gegen Reidemeister-Prozesse des Diagramms ist.

Definition 3.12: Eine Monoidalkategorie heißt **Bandkategorie**, wenn für je zwei Objekte V, W *natürliche* Isomorphismen $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ („Braiding“) und $\theta_V : V \to V$ (Twist) existieren, wobei $c_{V,W}$ durch  und θ_V durch  bildlich dargestellt werden; diese Isomorphismen sollen folgende Relationen erfüllen ($\forall f \in \mathrm{Hom}(V, V'), g \in \mathrm{Hom}(W, W'), \forall h \in \mathrm{Hom}(U, V)$):

$$\begin{aligned}
c_{U,V\otimes W} &= (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) \\
c_{U\otimes V,W} &= (c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}) \\
(g \otimes f)c_{V,W} &= c_{V',W'}(f \otimes g) \\
\theta_{V\otimes W} &= c_{W,V}(\theta_W \otimes \theta_V)c_{V,W} \\
\theta_V h &= h\theta_U \\
d_V(\theta_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}) &= d_V(\mathrm{id}_V \otimes \theta_{V^*})
\end{aligned}$$

Beispiele werden im nächsten Abschnitt folgen. Die ersten beiden Relationen besagen, daß sich die Überkreuzung eines Fadens mit einem „Doppelfaden“ in zwei Einzelüberkreuzungen aufspalten läßt, die dritte sichert, daß man Fäden über Coupons herüberziehen kann. Einen Twist kann man sich wie das Verdrillen eines Bandes vorstellen, und der Twist eines Doppelbandes läßt sich aus Überkreuzung und Twist der Einzelbänder zusammensetzen (Relation 4); Relation 5 bedeutet, daß man einen Coupon um 2π drehen kann, so daß das Ergebnis (nämlich ein Twist der an den Coupon geklebten Bänder) genau der Anschauung entspricht. Die letzte Relation stellt sicher, daß der Twist eines Bandes auch erhalten bleibt, wenn es gebogen wird.

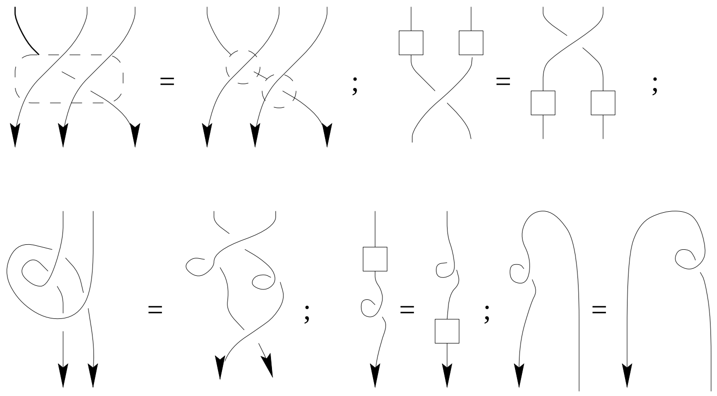


Abbildung 3.2: Veranschaulichung von Definition 3.12

In [Tur94] ist bewiesen, daß man sich die Morphismen einer Bandkategorie tatsächlich als gefärbte Bandgraphen vorstellen kann, also als Coupons, welche durch gefärbte Bänder im $\mathbb{R}^3$ miteinander verbunden sind; zwei gefärbte Bandgraphen, welche ambient isotop sind, stellen dabei denselben Morphismus dar. Insbesondere gilt für das Braiding der Kategorie die Zopfrelation, auch Yang-Baxter-Gleichung genannt (siehe Abbildung 3.3).

Die Zusatzstruktur erlaubt, ein Analogon zur Spur von Matrizen und der Dimension von Moduln zu definieren.

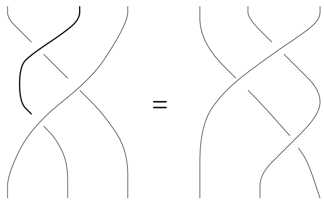


Abbildung 3.3: Die Zopfrelation

Definition 3.13: Für jedes Objekt V einer Bandkategorie ist $\mathrm{tr} : \mathrm{Hom}(V, V) \to K$, die **Spur**, für $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ definiert durch

$$\mathrm{tr}(f) = d_V c_{V^*,V}((\theta_f) \otimes \mathrm{id}_{V^*}) b_V : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$$

Die **Dimension** von V ist $\dim(V) := \mathrm{tr}(\mathrm{id}_V)$. Anschaulich bedeutet die Spur das Schließen eines Coupons zu einem Kreis, siehe Abbildung 3.4. Man beachte jedoch, daß die rechte Seite nicht durch b_V und d_V erzeugt wird, denn die Fäden sind falsch orientiert.

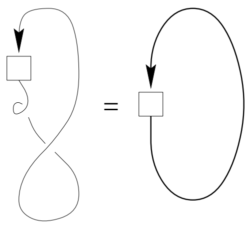


Abbildung 3.4: Veranschaulichung der Spur

Aus der Isotopie-Invarianz folgt nun leicht eine Eigenschaft, die auch für gewöhnliche Modulspuren gilt:

Lemma 3.14: *Für Morphismen $f : V \to W, g : W \to V$ gilt $\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf)$; für beliebige Morphismen gilt $\mathrm{tr}(f \otimes g) = \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g)$ (siehe Abbildung 3.5).* □

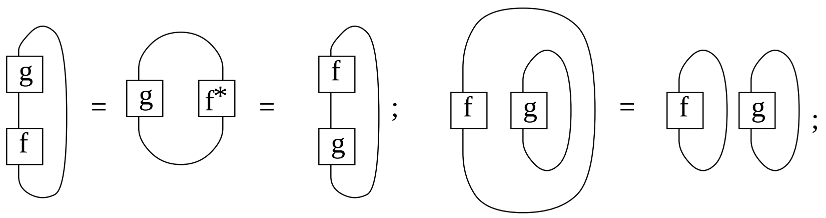


Abbildung 3.5: Eigenschaften von Spuren

Ohne Beweis übernehme ich noch eine Aussage über Spuren von halbeinfachen Bandkategorien aus [Tur94]:

Lemma 3.15: *Für Objekte V, W einer halbeinfachen Bandkategorie ist eine symmetrische bilineare Form durch*

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Hom}(V,W) \otimes_K \mathrm{Hom}(W,V) &\to K \\ (x,y) &\mapsto \mathrm{tr}(y \circ x) \end{aligned}$$

definiert. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist eine nichtausgeartete Form, d.h. die zu der Form adjungierten Homomorphismen* $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}(W,V),K)$ *und* $\mathrm{Hom}(W,V) \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}(V,W),K)$ *sind Isomorphismen von K-Moduln.* □

Notation 3.16: Sei $(\mathcal{V}, \{V_i\}_{i\in I})$ eine halbeinfache Kategorie; für $k_1,\ldots,k_m$, $i_1,\ldots,i_n \in I$ sei $\mathrm{H}^{i_1,\ldots,i_n}_{k_1,\ldots,k_m} := \mathrm{Hom}(V_{k_1}\otimes\cdots\otimes V_{k_m}, V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_n})$. Man nennt den K-Modul H^{ij}_k auch **Multiplizitätsmodul**.

3.2 Beispiele für Bandkategorien

3.2.1 Halbeinfache Modulkategorien

Wie schon im Laufe der Definition angedeutet, ist eine halbeinfache Kategorie projektiver Moduln, also zum Beispiel die der Moduln über halbeinfachen Lie-Algebren, eine Bandkategorie: Das Tensorprodukt ist das gewöhnliche, b_V bzw. d_V sind Coauswertung bzw. Auswertung, das Braiding ist die Transposition $V\otimes W \to W\otimes V, x\otimes y \mapsto y\otimes x$ und der Twist die Identität. Dadurch geht natürlich die Unterscheidung von Über- und Unterkreuzungen verloren; doch wenn man sich für $6j$-Symbole interessiert, kann die Art der Zerlegung von Moduln in einfache direkte Summanden durchaus von Interesse sein. Die Spur ist die gewöhnliche Spur (das liegt daran, daß durch Verbindung von Auswertung und Coauswertung genau die Diagonalelemente einer Matrix herausgefischt werden), ebenso die Dimension (nämlich die Spur der Einheitsmatrix).

3.2.2 Konstruktion mit abelschen Gruppen

Sei G eine abelsche Gruppe und K ein kommutativer Ring mit Eins. Die Objekte der Kategorie seien die Elemente von G, das Tensorprodukt das Produkt in G, das duale Objekt zu $g \in G$ sei g^{-1}, $d_g : gg^{-1} \to 1$ und $b_g : 1 \to g^{-1}g$ seien durch das Einselement von K gegeben. $\mathrm{Hom}(g,h)$ sei K für $g = h$ und $\{0\}$ sonst; offenbar ist jedes Objekt einfach, und $\{V_i\} = G$. Es sei ferner eine bilineare Form $c : G\times G \to K^*$ (in die Gruppe der invertierbaren Elemente von K) vorgegeben, also $c(gg',h) = c(g,h)c(g',h)$ und $c(g,hh') = c(g,h)c(g,h')$; das Braiding $gh \to hg$ sei dann durch $c(g,h) \in K$ und der Twist $g \to g$ durch $c(g,g) \in K$ gegeben. Die Axiome für Braiding und Twist gelten wegen der Bilinearität von c: Die Zusammensetzung einer Doppelkreuzung aus zwei Einzelkreuzungen folgt direkt, und die „Twisterhaltung bei Knick im Band“ gilt wegen $c(g^{-1},g^{-1}) = c(g,g)$. Wenn man will, kann man noch einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to K^*$ wählen mit $\forall g \in G : \phi(g^2) = 1$; der Twist sei dann $\phi(g)c(g,g)$. Durch diese Konstruktion erhält man eine halbeinfache Bandkategorie $\mathcal{V}(G,K,c,\phi)$. Hier ist im allgemeinen Über- und Unterkreuzung unterschieden, also kann man Knoteninvarianten damit konstruieren. Die Multiplizitätsmodule wirken auf den ersten Blick langweilig, denn H^{h_1,h_2}_g ist nur für $g = h_1h_2$ nichttrivial; gleichwohl wird in Kapitel 5 daraus eine hochinteressante

Invariante für Dreimannigfaltigkeiten konstruiert, allerdings mit im allgemeinen nichtabelschen Gruppen. G ist dann nur noch eine halbeinfache Kategorie, denn für $gh \neq hg$ ist $\mathrm{Hom}(gh, hg) = \{0\}$, und es gibt kein Braiding.

3.2.3 Die Skein-Kategorie

Das nun folgende Beispiel wird mit Hilfe von Skein-Relationen graphisch konstruiert. Dem Leser sollte der Unterschied zwischen der graphischen Darstellung einer (allgemeinen) Bandkategorie und der graphischen Konstruktion dieser speziellen Kategorie stets bewußt sein! Ich folge weitgehend [Tur94] und [MV94]. Eine alternative Konstruktion erlauben die Darstellungskategorien sogenannter Quantengruppen, genauer der $\mathrm{U}_q(\mathrm{SL}_2\,\mathbb{C})$; diesen Ansatz findet man ebenfalls in [Tur94], oder ausführlicher in [Kas95].

Diagramme

Definition 3.17: Ein **Diagramm** ist eine Menge von Bögen und Kreisen, die überschneidungsfrei in ein Einheitsquadrat eingebettet sind, so daß die freien Enden der Bögen am oberen bzw. unteren Rande des Quadrates befestigt sind; Diagramme, die durch ebene Isotopie des Quadrates bei festgehaltenem Rand ineinander übergehen, werden als gleich aufgefaßt.

Definition 3.18: Sei $A \in \mathbb{C}$ eine fest gewählte komplexe Zahl. Die Kategorie $\mathcal{S}$ bestehe aus den Objekten $0, 1, 2, 3, \ldots$. Der Morphismenraum $\mathrm{Hom}(m, n)$ bestehe aus Linearkombinationen über $\mathbb{C}$ von Diagrammen, bei denen am unteren Ende m und am oberen n Bögen festgemacht sind. Dabei soll für ein Diagramm D folgende Relation gelten:

$$D \amalg O := -(A^2 + A^{-2}) \cdot D,$$

wobei $\amalg O$ die disjunkte Vereinigung mit einem Kreis bedeutet. Offenbar ist $\mathrm{Hom}(m, n)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum endlich erzeugt, da es nur endlich viele Isotopieklassen von Diagrammen *ohne* Kreise gibt. Die Hintereinanderausführung von Morphismen bestehe im Übereinandersetzen von Diagrammen (Linear auf den Morphismenmoduln fortgesetzt), und das Tensorprodukt sei durch Nebeneinandersetzen der Diagramme gegeben (insbesondere ist $m \otimes n = m + n$; das Einsobjekt ist 0). Jedes Objekt ist zu sich selbst dual; b_m ist durch ein Diagramm mit $2m$ oberen Fadenenden gegeben, bei dem jeweils der i-te Faden mit dem $(2m + 1 - i)$-ten verbunden wird, d_m entsprechend. Die Axiome einer Monoidalkategorie mit Dualität sind erfüllt, da man Diagramme stets bis auf ebene Isotopie betrachtet.

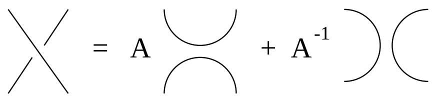
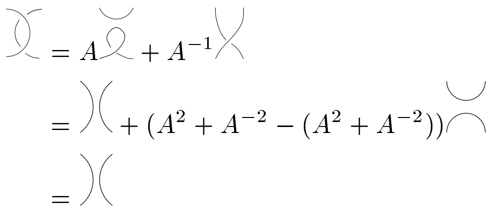


Abbildung 3.6: Skein-Relation

In $\mathcal{S}$ wird ein Braiding durch **Skein-Relationen** definiert: $c_{1,1}$ sei der in Abbildung 3.6 dargestellte Morphismus aus $\mathrm{Hom}(1, 1)$; $c_{m,n}$ setzt sich gemäß Definition 3.12 aus einzelnen Überkreuzungen zusammen. θ_m entspricht dem anschaulichen Twist eines Fadenstrangs, nämlich $(d_m \otimes \mathrm{id}_m)(\mathrm{id}_m \otimes c_{m,m})(b_m \otimes \mathrm{id}_m)$. Von Definition 3.12 bleibt damit nur noch das Vertauschen von Braiding und anderen Morphismen bzw. mit Diagrammen (also die „Natürlichkeit" des Braiding) zu zeigen, ferner, daß die $c_{m,n}$ Isomorphismen sind. Für beides reicht es, den Reidemeister-Prozeß Ω_2 zu prüfen:



Damit kann man schon einiges anfangen: Jedem Knotendiagramm wird durch Auflösen der Skeinrelationen ein Morphismus aus $\mathrm{Hom}(0,0)$ zugeordnet; dieser Morphismus ist ein Polynom in A und A^{-1} über $\mathbb{C}$, und er hängt nur von der Klasse des Knotens und der Selbstverschlingungszahl des Diagramms ab (ein Twist im Faden erhält die Knotenäquivalenzklasse, aber ändert die Selbstverschlingung). Man erkennt die „Kauffman-Klammer" wieder, die eng mit dem „Jones-Polynom" verbunden ist. Als Kategorie ist $\mathcal{S}$ zu arm: Es gibt nur zwei einfache Objekte, nämlich 0 und 1, und von Halbeinfachheit ist $\mathcal{S}$ weit entfernt. Die Strategie ist daher, die Menge der Morphismen drastisch zu verkleinern, damit es mehr einfache Objekte gibt (aber möglichst nur endlich viele), und damit jeder dann noch vorhandene Morphismus über einfache Objekte zerfällt.

Jones-Wenzl-Idempotente und Halbeinfachheit

Definition 3.19: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n] := [n]_{A^2} := \frac{A^{2n}-A^{-2n}}{A^2-A^{-2}}$ (Man kann den Bruch stets kürzen, $[n]$ liegt also in $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$). Man redet von einer Deformation der natürlichen Zahlen, denn für $A = 1$ ist $[n]_{A^2} = n$. Es gilt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} [0] &= 0 \\ [1] &= 1 \\ [n+2] &= (A^2 + A^{-2})[n+1] - [n]. \end{aligned}$$

Sei für $i := 1, \dots, n-1$

$$\mathrm{Hom}(n,n) \ni e_i^{(n)} := (\mathrm{id}_{i-1} \otimes b_1 \otimes \mathrm{id}_{n-i-1})(\mathrm{id}_{i-1} \otimes d_1 \otimes \mathrm{id}_{n-i-1}).$$

Offenbar wird $\mathrm{Hom}(n,n)$ von den $e_i^{(n)}$ erzeugt.

Definition 3.20: Falls $[1], [2], [3], \dots, [k]$ alle invertierbar sind, definiere die **Jones-Wenzl-Idempotente** $f_n \in \mathrm{Hom}(n,n)$ für $n = 1, \dots, k-1$ induktiv durch

$$\begin{aligned} f_0 &:= \mathrm{id}_0 \\ f_{n+1} &:= f_n \otimes \mathrm{id}_1 + \frac{[n]}{[n+1]}(f_n \otimes \mathrm{id}_1)e_n^{(n+1)}(f_n \otimes \mathrm{id}_1). \end{aligned}$$

Lemma 3.21: *Es gelten folgende Gleichungen (falls die Jones-Wenzl-Idempotenten definiert sind):*

$$(\mathrm{id}_i \otimes f_k \otimes \mathrm{id}_l) f_{i+k+l} = f_{i+k+l} \tag{3.1}$$

$$e_i^{(n)} f_n = 0 \text{ für } i < n \tag{3.2}$$

$$e_{n-1}^{(n)} (f_{n-1} \otimes \mathrm{id}_1) e_{n-1}^{(n)} = -\frac{[n]}{[n-1]} f_{n-2} \otimes e_1^{(2)} \tag{3.3}$$

$$\mathrm{tr}(f_n) = (-1)^n [n+1]. \tag{3.4}$$

□

Der graphische Kalkül wird etwas erweitert: j parallele Fäden werden durch *einen* Faden mit Farbe j dargestellt, und ein Querstrich bedeutet die Jones-Wenzl-Idempotente. Damit läßt sich die obige Definition und die ersten beiden Gleichungen des Lemmas wie in Abbildung 3.7 veranschaulichen. Im folgenden

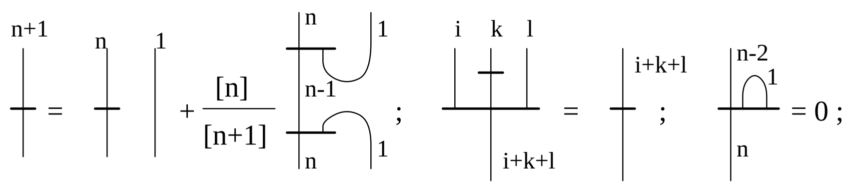


Abbildung 3.7: Graphenkalkül für Jones-Wenzl-Idempotente

sei A stets eine primitive $4r$-te Einheitswurzel ($r \geq 2$).

Definition 3.22: Sei $J := \{1, 2, \ldots, r-2\}$. Die Kategorie $\mathcal{V}'$ bestehe aus den Objekten $V = (j_1, j_2, \ldots, j_k) \in J^k$ mit $k \geq 0$, also endlichen (evtl. leeren) Tupeln von Zahlen; das Tensorprodukt sei das Zusammensetzen der Tupel. Zu V sei $|V| := j_1 + \cdots + j_k$ und

$$\mathcal{F}_V := f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_k} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(|V|, |V|).$$

Für einen Morphismus $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(|U|, |V|)$ definiere $x^f := \mathcal{F}_V x \mathcal{F}_U$; die Morphismen in $\mathcal{V}'$ seien durch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}'}(U, V) := \{x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}} \mid x^f = x\}$ definiert.

Behauptung 3.23: *$\mathcal{V}'$ ist eine Monoidalkategorie mit Braiding und Twist.*

Beweis: Die Hintereinanderausführung von Morphismen $x^f = x, y^f = y$ funktioniert wegen Gleichung 3.1:

$$(yx)^f = (y^f x^f)^f = y^f x^f = yx$$

Das Tensorprodukt von Morphismen ist ebenfalls wohldefiniert:

$$(x \otimes y)^f = x^f \otimes y^f = x \otimes y$$

Das Einheitsobjekt von $\mathcal{V}'$ ist das leere Tupel; id_V ist $\mathcal{F}_V$. $c_{V,W} := \left(c_{|V|,|W|}\right)^f$ und $\theta_V := \left(\theta_{|V|}\right)^f$ sind Braiding und Twist für $\mathcal{V}'$, denn alle nötigen Axiome übertragen sich von $\mathcal{S}$. Es ist ferner $\dim(n) = \mathrm{tr}(f_n) = (-1)^n [n+1]$. □

Die einfachen Objekte von $\mathcal{V}'$ sind offenbar das Einsobjekt und (j), $j \in \{1, \ldots, r-2\}$; die letzteren Objekte sind einfach, da $(e_i^{(j)})^f = 0$ gilt.

Definition 3.24: Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ einer Ab-Kategorie heißt **unwichtig**, falls für alle $g \in \mathrm{Hom}(W, V)$ $\mathrm{tr}(gf) = 0 \in K$ gilt.

Beispielsweise ist f_{r-1} unwichtig: Die Komposition von f_{r-1} mit

$$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(r-1, r-1)$$

ist $gf_{r-1} = k \cdot f_{r-1}$ mit $k \in K$ wegen Lemma 3.21; also ist

$$\mathrm{tr}(gf_{r-1}) = k \cdot \mathrm{tr}(f_{r-1}) = k \cdot (-1)^{r-1} \frac{A^{2r} - A^{-2r}}{A^2 - A^{-2}} = 0$$

, da A eine $4r$-te Einheitswurzel ist.

Lemma 3.25: *Die Komposition eines unwichtigen Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit einem beliebigen $g \in \mathrm{Hom}(W, U)$ sowie das Tensorprodukt von f mit einem beliebigen $f' \in \mathrm{Hom}(V', W')$ sind unwichtig; ferner bilden die unwichtigen Morphismen einen Untermodul der Morphismenmoduln. Man kann also die Menge $\mathrm{Unw}(V, W)$ aller unwichtiger Morphismen aus der Kategorie herauskürzen und erhält weiterhin eine Ab-Kategorie.*

Beweis: Die Summe zweier unwichtiger Morphismen ist unwichtig, da die Spur sich additiv verhält. $f \otimes f'$ ist unwichtig, da die Spur sich bei Tensorierung multiplikativ verhält. Auch $g \circ f$ ist unwichtig, da $\forall h \in \mathrm{Hom}(U, V)$ $\mathrm{tr}\,(h(gf)) = \mathrm{tr}\,((hg)f) = 0$ ist. $\square$

Satz 3.26: *Jeder Morphismus der Kategorie $\mathcal{S}$ aus $\mathrm{Hom}(k, l)$ zerfällt in*

$$z + \sum_s \sigma_s f_{i_s} \pi_s;$$

dabei ist $z : k \to l$ unwichtig, $\pi_s : k \to i_s$, $\sigma_s : i_s \to l$, $i_s \in \{0, \ldots, r-2\}$, und die Summe ist endlich.

Beweis: Sei G die Menge aller so darstellbaren Morphismen (k und l seien dabei *nicht* fest). G ist additiv abgeschlossen; die Komposition eines Morphismus aus G mit einem beliebigen liegt wieder in G, es genügt also, $\mathrm{id}_n \in G$ für alle n zu zeigen, denn jeder Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(k, l)$ ist gleich $\mathrm{id}_l f$. Für $k \leq r-2$ ist $f_k = \mathrm{id}_k f_k \mathrm{id}_k \in G$, insbesondere $\mathrm{id}_0 = f_0$ und $\mathrm{id}_1 = f_1$. Nach der induktiven Definition der Jones-Wenzl-Idempotente gilt

$$\mathrm{id}_n = f_n - \sum_{i_1}^{n-1} \alpha_i e_i^{(n)} \beta_i$$

mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{Hom}(n, n)$; $e_i^{(n)}$ zerfällt in Morphismen $\gamma_i \in \mathrm{Hom}(n-2, n)$, $\gamma_i' \in \mathrm{Hom}(n, n-2)$ (bei beiden sind der i-te und $(i+1)$-te Faden des Objekts n durch einen rücklaufenden Bogen verbunden). Angenommen, $i_k \in G$ für alle $k < n$ und $1 < n < r-1$; dann ist $e_i^{(n)} = \gamma_i \mathrm{id}_{n-2} \gamma_i' \in G$ und damit auch $\mathrm{id}_n \in G$.

Für $n = r - 1$ gilt dieser Schluß immer noch, da f_{r-1} unwichtig ist. Sei nun $n > r - 1$; nach Induktionsannahme gilt $\mathrm{id}_{n-1} = z + \sum \sigma_s f_{i_s} \pi_s$, z unwichtig.

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_n &= \mathrm{id}_{n-1} \otimes \mathrm{id}_1 \\ &= \underbrace{z \otimes \mathrm{id}_1}_{\text{unwichtig}} + \sum (\sigma_s \otimes \mathrm{id}_1)(f_{i_s} \otimes \mathrm{id}_1)(\pi_s \otimes \mathrm{id}_1). \end{aligned}$$

$i_s + 1 \leq r - 1$, also ist nach Induktionsannahme $G \ni f_{i_s} \otimes \mathrm{id}_1 : i_s + 1 \to i_s + 1$ und damit $\mathrm{id}_n \in G$. **q.e.d.**

Definition 3.27: Sei A eine primitive $4r$-te Einheitswurzel; die Kategorie $\mathcal{V}$ ist definiert durch $\mathrm{Obj}\,\mathcal{V} := \mathrm{Obj}\,\mathcal{V}'$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(U, V) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}'}(U, V) \big/ \mathrm{Unw}(U, V)$.

In Zusammenfassung dieses Abschnittes gilt: $\mathcal{V}$ ist eine Bandkategorie, deren Braiding und Twist durch die Skein-Relation induziert sind; $\mathcal{F}_U = \mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}(U, U)$. Nach Satz 3.26 ist $\mathcal{V}$ halbeinfach, wobei die einfachen Objekte $V_i := (i)$ mit $i \in \{0, \ldots, r-2\}$ die Kategorie dominieren. Die obige Konstruktion funktioniert auch mit generischem A; $\mathcal{V}'$ ist dann selbst schon eine halbeinfache Kategorie, und $\{V_i\} = \mathbb{N}_0$. Da ich jedoch auf Zustandssummen für Dreimannigfaltigkeiten hinaus will und eine unendliche Anzahl einfacher Moduln dabei störte, möchte ich diesen Fall nicht weiter betrachten.

Kapitel 4

$6j$-Invarianten

In [TV92] stellten V. Turaev und O. Viro eine Klasse von Invarianten vor; die Idee war, die Kanten einer triangulierten Dreimannigfaltigkeit zu färben, dem Sechstupel von Farben, die an einem Tetraeder auftreten, eine Zahl ($6j$-Symbol) zuzuordnen, für jede mögliche Färbung das Produkt zu bilden und über die Färbungen zu summieren („Zustandssumme"). Der Invarianzbeweis lief über Sternprozesse im dualen Zweigerüst. Wie schon in Kapitel 2.3.3 gezeigt, muß man dazu die Invarianz der Zustandssumme gegen die Prozesse T_0, T und S zeigen; für Zustandssummen von Kollabierretrakten unter Färbung der Flächen genügt T. In [Tur94] und mit anderer Terminologie in [Yet94] werden Beispiele solcher Invarianten aus halbeinfachen Bandkategorien konstruiert und der Ansatz gleichzeitig verallgemeinert: Die $6j$-Symbole sind jetzt Tensoren, und das Produkt geht in ein Verjüngen der Tensoren über. Das ist auch bitter nötig, denn in [MN94] werden Beispiele von nichthomöomorphen Dreimannigfaltigkeiten gegeben, die die alten Turaev-Viro-Invarianten nicht unterscheiden können.

4.1 Turaev-Viro-Invarianten

4.1.1 Die Biedenharn-Elliott-Gleichung

Definition 4.1: Sei K ein kommutativer Ring mit Eins, I eine endliche Indexmenge, P eine spezielle Pseudofläche, $V(P)$ die Menge ihrer Ecken und $D(P)$ die Menge ihrer Flächen; jedem Element $i \in I$ wird ein invertierbares Ringelement $|i| \in K^*$ (sein **Gewicht**) zugeordnet. Eine **Färbung** von P mit I ist eine Abbildung $\phi : D(P) \to I$; einer Ecke V wird ein Element $\langle V^\phi \rangle = \left| \begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix} \right| \in K$ zugeordnet, wobei i, j und k die Farben dreier Flügel von V sind, welche eine Kante gemeinsam haben, und l, m bzw. n die Farben der Flügel, die i, j bzw. k gegenüberliegen. $\left| \begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix} \right|$ heißt **$6j$-Symbol**. Damit es wohldefiniert ist, muß das $6j$-Symbol die Symmetrie der Ecke respektieren, es muß also gelten:

$$\left| \begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} j & i & k \\ m & l & n \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} i & k & j \\ l & n & m \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} i & m & n \\ l & j & k \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} l & m & k \\ i & j & n \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} l & j & n \\ i & m & k \end{smallmatrix} \right|.$$

Definition 4.2: Sei M eine Dreimannigfaltigkeit und P ein Kollabierretrakt von M;

$$|M| := \sum_{\phi} \prod_{D \in D(P)} |\phi(D)| \prod_{V \in V(P)} \langle V^\phi \rangle$$

Lemma 4.3: *$|M|$ ist eine Invariante, falls für die $6j$-Symbole und die Gewichte folgende Gleichung gilt:*

$$\sum_{j \in I} |j| \begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_3 & j_6 & j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j_1 & j & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j_2 & j_3 & j \\ j_4 & j_7 & j_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j_5 & j_3 & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_8 & j_0 & j_7 \end{vmatrix}$$

für alle $j_0, \ldots, j_9 \in I$. Diese Gleichung ist aus der Quantenmechanik wohlbekannt (die $6j$-Symbole beschreiben dort die Wechselwirkung von Teilchen mit Spin, vgl. [LL79]) und heißt ***Biedenharn-Elliott-Gleichung****.*

Beweis: Es genügt, die Invarianz von $|M|$ bezüglich eines T-Prozesses zu prüfen; mit den Bezeichnungen wie in Abbildung 4.1 ist sie aus der Biedenharn-Elliott-Gleichung direkt abzulesen. □

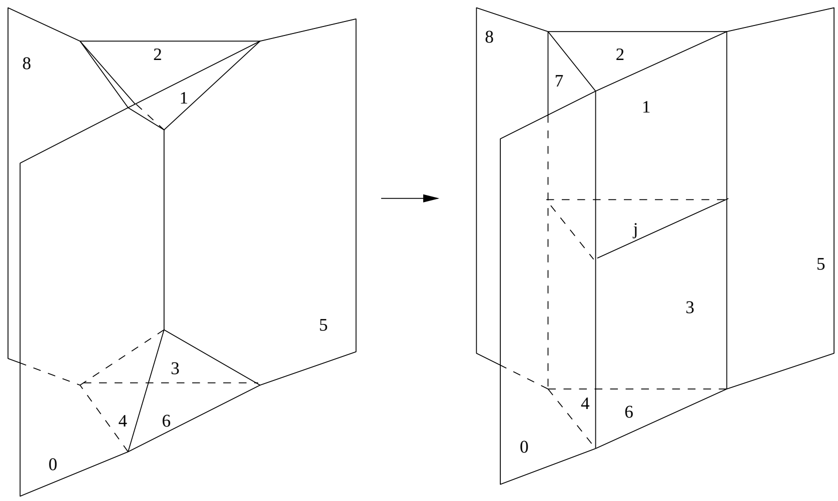


Abbildung 4.1: Invarianz von $|M|$

In [TV92] mußte $|M|$ noch mit einem Faktor aus K^* versehen werden, um Invarianz gegenüber dem Prozeß S zu sichern; das ist hier nicht nötig, aber auch kein großer Gewinn, denn dieser Faktor berücksichtigt im wesentlichen nur die Eulercharakteristik von M.

4.1.2 Ähnliche Mannigfaltigkeiten

Ich möchte nun [MN94] referieren. Für eine spezielle Pseudofläche P sei $N(V, P)$ eine reguläre Umgebung der Ecke V; $N(V(P), P)$ sei dementsprechend die disjunkte Vereinigung der Eckenumgebungen.

Definition 4.4: Zwei spezielle Pseudoflächen P_1 und P_2 heißen **ähnlich**, falls ein Homöomorphismus $\phi : N(V(P_1), P_1) \to N(V(P_2), P_2)$ existiert, so daß zwei Flügel F und F' aus P_1 genau dann zur selben 2-Zelle von P_1 gehören, wenn $\phi(F)$ und $\phi(F')$ zur selben 2-Zelle von P_2 gehören. Zwei Dreimannigfaltigkeiten M_1 und M_2 heißen **ähnlich**, falls sie ähnliche Kollabierretrakte besitzen.

Die Turaev-Viro-Invarianten hängen nur von den Flügeln der Spineecken und deren Zugehörigkeit zu den Spineflächen ab; also haben ähnliche Mannigfaltigkeiten dieselben Turaev-Viro-Invarianten. Matveev und Nowik geben nun zwei Prozesse an, durch die ähnliche Kollabierretrakte ineinander übergehen.

Definition 4.5: Eine **Thetagraph** ist ein Kreis mit Durchmesser und ein **Brillengraph** besteht aus zwei durch eine Strecke verbundenen Kreisen (siehe Abbildung 4.2). Sei P eine spezielle Pseudofläche und G ein zweiseitiger Theta-

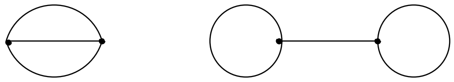


Abbildung 4.2: Theta- und Brillengraph

bzw. Brillengraph, so daß G in P eine zu $G \times I$ isomorphe reguläre Umgebung besitzt (G heißt dann „schön eingebettet“ und hat seine Ecken in den Kanten von P und seine Kanten in den Flächen von P). Wenn G ein Thetagraph ist, so schneide P an G auf und klebe die Ecken von G vertauscht wieder zusammen, die Kanten von G auf sich; dieser Prozeß heißt σ_1. Wenn G ein Brillengraph ist, so schneide P an G auf und klebe die beiden Kreise umgekehrt orientiert auf sich, die verbindende Kante identisch auf sich; dieser Prozeß heißt σ_2.

Lemma 4.6: *Ist P_1 Kollabierretrakt einer Dreimannigfaltigkeit und geht P_2 aus P_1 durch einen Prozeß σ_i entlang G hervor, so ist auch P_2 Kollabierretrakt einer Dreimannigfaltigkeit.*

Beweis: Es genügt, das Kriterium aus Satz 2.2 für P_2 zu prüfen. Im Vergleich zu P_1 ändern sich nur die Klebeabbildungen der Flächen D, in denen die drei Kanten des Graphen G liegen. Sei G ein Brillengraph und D die Fläche von P_1, in der die Mittelkante von G liegt. Beim Durchlaufen von ∂D nach dem Prozeß erreicht man eine der Ecken von G; dort wird B_D verändert. Dann erreicht man die andere Ecke von G, und dort wird B_D ein zweites Mal verändert; beides hebt sich auf, so daß das Bündel B_D wie vor dem Prozeß trivial ist. Liegt einer der Kreise des Brillengraphen in D, so wird wieder B_D zweimal geändert, und zwar zweimal an *derselben* Ecke von G. Ähnliches gilt für Thetagraphen. □

Satz 4.7: *[MN94] Zwei ähnliche Kollabierretrakte gehen durch eine endliche Kette von Prozessen σ_1 und σ_2 auseinander hervor.* □

Diesen Prozessen entsprechen Prozesse auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 4.8: Sei $F \subset M$ eine in einer Dreimannigfaltigkeit eingebettete geschlossene Zweimannigfaltigkeit. Ist $F \approx S^2$, so heißt F **inkompressibel**, falls F keinen Dreiball in M berandet; ist $F \not\approx S^2$, so heißt F inkompressibel, falls für jede in M eingebettete Scheibe D mit $D \cap F = \partial D$ gilt: ∂D ist in F nullhomotop. Falls M keine inkompressiblen Sphären enthält, heißt M **irreduzibel**. Eine orientierbare irreduzible Dreimannigfaltigkeit, die zweiseitige inkompressible Flächen enthält, heißt **Haken-Mannigfaltigkeit** (nach Wolfgang Haken).

Beispielsweise sind alle Mannigfaltigkeiten mit nichttrivialem Rand Haken-Mannigfaltigkeiten; Linsenräume sind keine Haken-Mannigfaltigkeiten, denn ihre inkompressiblen Flächen sind einseitig. Thurston [Thu] gab Beispiele irreduzibler Mannigfaltigkeiten mit unendlicher Fundamentalgruppe, die nicht hakensch sind.

Definition 4.9: Sei F eine Sphäre S^2, eine reelle projektive Ebene P^2, ein Torus T oder eine Kleinsche Flasche K (Es ist also $\chi(F) \geq 0$); sei F zweiseitig in der Dreimannigfaltigkeit M eingebettet. Definiere den Homöomorphismus $\rho : F \to F$ wie folgt:

1. Falls $F \approx S^2$, so ändere ρ die Orientierung.
2. Falls $F \approx P^2$, so sei ρ die Identität.
3. Falls $F \approx T, K$, so induziere ρ auf $H_1(F, \mathbb{Z})$ die Multiplikation mit -1.

Offenbar ist ρ bis auf Isotopie eindeutig. Ein **F-Prozeß** besteht nun im Aufschneiden von M entlang F und anschließendem Verkleben mit ρ; das Ergebnis heiße M_F. Wenn F kompressibel ist, so ist $M \approx M_F$.

Lemma 4.10: *Sei G ein schön eingebetteter Theta- oder Brillengraph in einem Kollabierretrakt P einer geschlossenen Dreimannigfaltigkeit M; dann gibt es eine geschlossene, zusammenhängende, in M eingebettete Fläche F mit $\chi(F) \geq 0$, so daß $F \cap P = G$ ist und F bezüglich SP allgemeine Lage besitzt.*

Beweis: Sei N eine reguläre Umgebung von P in M; dann ist $N - P \approx N \times (0, 1]$, und es gibt offenbar eine Fläche $F_1 \subset M$, so daß F_1 bzgl. SP allgemeine Lage besitzt, $F_1 \cap P = G$ und $F_1 \cap \partial N = \partial F_1$ ist und F_1 auf G kollabiert, also $\chi(F_1) = \chi(G) = -1$ gilt. $M - N$ ist ein Dreiball; durch Ankleben disjunkter Scheiben in $M - N$ an ∂F_1 entsteht F. Da man mindestens eine Scheibe ankleben muß, gilt $\chi(F) \geq 0$. $\square$

Lemma 4.11: *Seien P, G, M, F wie oben, zusätzlich G zweiseitig in P. Sei P_1 das Ergebnis eines σ_i-Prozesses auf P. Dann ist P_1 Kollabierretrakt von M_F.*

Beweis: F ist in M zweiseitig, da G in P zweiseitig ist. Die Abbildung $\rho : G \to G$ ist auf F fortsetzbar, denn F weniger einiger Scheiben kollabiert auf G. Man prüft nach, daß $\rho : F \to F$ die Bedingung aus der Definition eines F-Prozesses erfüllt. $\square$

Übrigens gilt auch die Umkehrung der letzten beiden Lemmata: M_F und M sind zueinander ähnlich. Man erhält als Hauptresultat:

Theorem 4.12: *Seien M_1 und M_2 ähnliche geschlossene Dreimannigfaltigkeiten; M_1 enthalte keine geschlossenen zweiseitigen inkompressiblen Flächen mit nichtnegativer Eulercharakteristik. Dann sind M_1 und M_2 zueinander homöomorph.*

Beweis: Aus den vorigen Lemmata und dem Satz 4.7 folgt, daß M_2 aus M_1 durch eine Kette von F-Prozessen hervorgeht; die Fläche F ist dabei nach Voraussetzung jeweils kompressibel, also ändert der F-Prozeß nicht den Homöomorphietyp. **q.e.d.**

Dieses Ergebnis verdient noch einen Kommentar: Haken-Mannigfaltigkeiten kann man algorithmisch klassifizieren (vergleiche etwa [Hem92]; dort klafft jedoch eine Lücke im Beweis, da Hemion und alle anderen einen Spezialfall, nämlich Pseudo-Stallings-Mannigfaltigkeiten, übersahen, wie Matveev etwa in [Mat] bemerkte und richtigstellte). Das Theorem stellt nun sicher, daß irreduzible Nicht-Haken-Mannigfaltigkeiten schon durch ihren Ähnlichkeitstyp festgelegt sind und damit die theoretische Möglichkeit offen bleibt, daß die Turaev-Viro-Invarianten für solche dem Haken-Algorithmus nicht zugängliche Mannigfaltigkeiten klassifizierend sind. Für Haken-Mannigfaltigkeiten sind diese Invarianten jedoch zu schwach, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4.13: Sei $M := S^1 \times S^1 \times S^1$ und $F := S^1 \times S^1 \times \{*\}$ (F ist ein Torus). M_F ist zu $(S^1 \times S^1)\tilde{\times} S^1$ homöomorph. Wie man Abbildung 4.3 entnimmt, ist $H_1(M) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, H_1(M) = \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$ (gegenüberliegende Seiten des Würfels werden identifiziert). Es gibt also zwei geschlossene orientierte Dreimannigfaltigkeiten, die dieselben Turaev-Viro-Invarianten haben, aber nicht homöomorph sind.

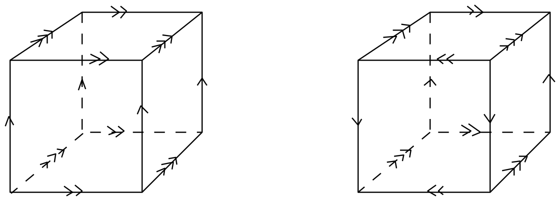


Abbildung 4.3: Zwei ähnliche Mannigfaltigkeiten

Weitere Beispiele ähnlicher Mannigfaltigkeiten, die sogar zusätzlich die gleichen Fundamentalgruppen haben, führe ich in Abschnitt 5.1.3 an.

4.2 $6j$-Symbole

4.2.1 Die $6j$-Symbole halbeinfacher Kategorien

Turaev verallgemeinerte in [Tur94] den alten Ansatz und lieferte eine Möglichkeit, zu jeder halbeinfachen Bandkategorie eine Lösung der Biedenharn-Elliott-Gleichung mit der richtigen Symmetrie und damit eine Invariante für Dreimannigfaltigkeiten zu konstruieren.

Lemma 4.14: *In einer halbeinfachen Kategorie, die von $\{V_i\}_{i\in I}$ dominiert wird, gilt für alle $m, l, i, j \in I$:*

$$\bigoplus_{k\in I} \left(\mathrm{H}_m^{kl} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij}\right) \cong \mathrm{H}_m^{ijl} .$$

Dabei wird $x \otimes y \in \left(\mathrm{H}_m^{kl} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij}\right)$ auf $(y \otimes \mathrm{id}_l)x \in \mathrm{H}_m^{ijl}$ abgebildet.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus „Hauptlemma“ 3.11. □

Analog ist $\bigoplus_{n\in I} \left(\mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{jl}\right) \cong \mathrm{H}_m^{ijl}$ mit $x \otimes y \in \left(\mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{jl}\right) \mapsto (\mathrm{id}_i \otimes y)x$.

Definition 4.15: Für $i,j,k,l,m,n \in I$ sei die Abbildung

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}' : \left(\mathrm{H}_m^{kl} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij}\right) \to \left(\mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{jl}\right)$$

definiert durch

$$\left(\mathrm{H}_m^{kl} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij}\right) \subset \bigoplus_{k\in I} \left(\mathrm{H}_m^{kl} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij}\right) \cong \mathrm{H}_m^{ijl} \cong$$

$$\cong \bigoplus_{n\in I} \left(\mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{jl}\right) \to^{\pi} \left(\mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{jl}\right);$$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}'$ heißt $6j$-**Symbol**.

Nach Definition gilt also (mit kleinem Notationsmißbrauch)

$$(y \otimes \mathrm{id}_l)x = \sum_{n\in I} \left(\left(\mathrm{id}_i \otimes (\cdot)_n^{jl}\right)(\cdot)_m^{in}\right) \begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}' (x \otimes y)$$

oder graphisch wie in Abbildung 4.4.

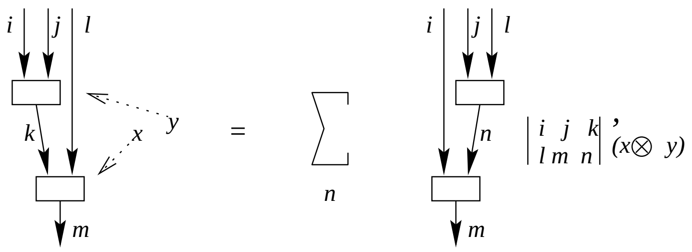


Abbildung 4.4: Grundgleichung der $6j$-Symbole

Satz 4.16: *Für die $6j$-Symbole einer halbeinfachen Kategorie gilt die (verallgemeinerte) Biedenharn-Elliott-Gleichung*

$$\sum_{j\in I} \left(\mathrm{id} \otimes \begin{vmatrix} j_2 & j_3 & j \\ j_4 & j_7 & j_8 \end{vmatrix}'\right) \circ \left(\begin{vmatrix} j_1 & j & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_7 \end{vmatrix}' \otimes \mathrm{id}\right) \circ \left(\mathrm{id} \otimes \begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_3 & j_6 & j \end{vmatrix}'\right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_8 & j_0 & j_7 \end{vmatrix}' \otimes \mathrm{id}\right) \circ T_{23} \circ \left(\begin{vmatrix} j_5 & j_3 & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_8 \end{vmatrix}' \otimes \mathrm{id}\right).$$

Dabei ist T_{23} die Vertauschung des zweiten und dritten Faktors eines Tensorproduktes. Zur Verdeutlichung: Die Gleichung gilt in dem K-Modul

$$\mathrm{Hom}_K(\mathrm{H}_{j_0}^{j_6 j_4} \otimes_K \mathrm{H}_{j_6}^{j_5 j_3} \otimes_K \mathrm{H}_{j_5}^{j_1 j_2}, H_{j_0}^{j_1 j_7} \otimes_K \mathrm{H}_{j_7}^{j_2 j_8} \otimes_K \mathrm{H}_{j_8}^{j_3 j_4}).$$

Beweis: Die Beweisidee ist, mit Hilfe der Grundgleichung eine nach rechts geöffnete Gabel mit drei Zinken in eine nach links geöffnete zu überführen; dies geht auf zwei verschiedene Arten, wie in den Bildern 4.5 und 4.6 zu sehen ist, wobei ich die Gleichung durch „$\sum_j Q_1 Q_2 Q_3 = Q_1' T_{23} Q_3'$“ abkürzen möchte. Dabei gibt es zunächst zuviele Summen; da die zu j_7 und j_8 gehörenden Terme jeweils in verschiedenen *direkten* Summanden des K-Moduls $\mathrm{H}_{j_0}^{j_1 j_2 j_3 j_4}$ liegen, gilt die Gleichung schon für jeden einzelnen der Summanden. Dies ist jedoch die Biedenharn-Elliott-Gleichung. **q.e.d.**

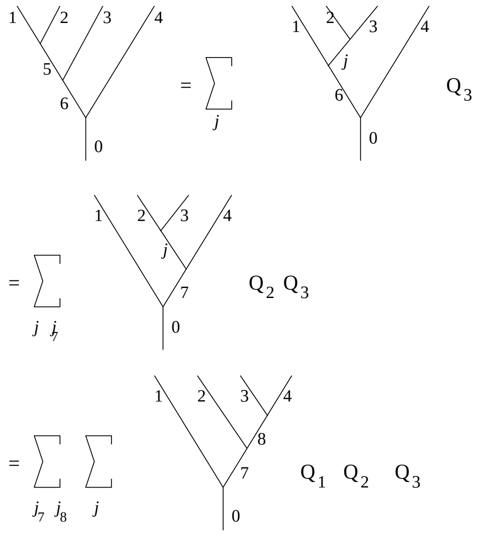


Abbildung 4.5: Linke Seite der Biedenharn-Elliott-Gleichung

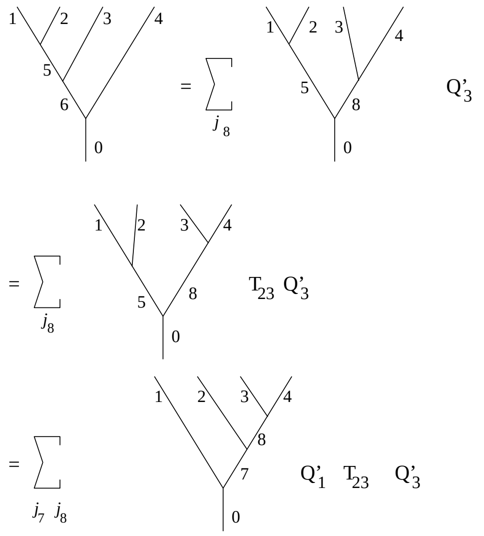


Abbildung 4.6: Rechte Seite der Biedenharn-Elliott-Gleichung

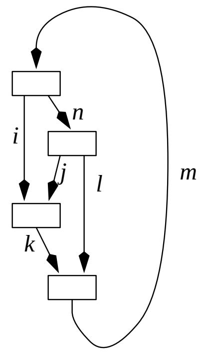
Jede halbeinfache Kategorie führt auf eine Lösung der Biedenharn-Elliott-Gleichung; diese Lösung besitzt nicht immer die nötige Symmetrie, man muß noch weiter überlegen.

4.2.2 Die Symmetrie von $6j$-Symbolen in Bandkategorien

Es fällt auf, daß man bisher noch keine Gewichte für die Farben verwendet hat; diese benutzt Turaev, um eine symmetrische Version der $6j$-Symbole im Falle einer halbeinfachen *Bandkategorie* zu gewinnen. Zunächst eine Bemerkung: Da die Moduln H_m^{kl} projektiv sind, kann man zu jeder Abbildung zwischen solchen Moduln adjungierte Abbildungen finden; insbesondere gibt es zu $\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right|'$ einen Tensor $\sum_p x_1^p \otimes x_2^p \otimes x_3^p \otimes x_4^p \in \mathrm{H}_{kl}^m \otimes_K \mathrm{H}_{ij}^k \otimes_K \mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{jl}$, so daß $\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right|' (y_1 \otimes y_2) = \sum_p \mathrm{tr}(x_1^p y_1)\,\mathrm{tr}(x_2^p y_2) x_3^p \otimes x_4^p$ gilt. Da aus dem Kontext stets klar werden sollte, welche Version des $6j$-Symbols gemeint ist, bezeichne ich diesen Tensor und alle anderen Adjungierten ebenfalls mit $\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right|'$.

Lemma 4.17: *Es gilt*

$$\left|\begin{matrix} i & j & k \\ l & m & n \end{matrix}\right|' = \dim(n)$$



Beides sind K-lineare Abbildungen $\mathrm{H}_m^{kl} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij} \otimes_K \mathrm{H}_{in}^m \otimes_K \mathrm{H}_{jl}^n \to K$.

Beweis: Es sei $\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & q \end{smallmatrix}\right|' (x \otimes y) = \sum_{r \in R_q} a_{r,q} \otimes b_{r,q}$ mit einer endlichen Indexmenge R_q. Nach Definition gilt $(y \otimes \mathrm{id}_{V_l})x = \sum_{q, r \in R_q} (\mathrm{id}_{V_i} \otimes b_{r,q}) a_{r,q}$. Dies wird mit $\mathrm{id}_{V_i} \otimes z$, $z \in \mathrm{H}_{jl}^n$ verknüpft; da wegen des Axioms von Schur jede Abbildung $\alpha : V_q \to V_n$ gleich $\delta_{q,n}\,(\dim(n))^{-1}\,\mathrm{tr}(\alpha)$ ist, gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{V_i} \otimes z)(y \otimes \mathrm{id}_{V_l})x &= \sum_{q \in I, r \in R_q} (\mathrm{id}_{V_i} \otimes z b_{r,q}) a_{r,q} \\ &= \sum_{r \in R_n} (\dim(n))^{-1}\,\mathrm{tr}(z b_{r,n}) a_{r,n}.\end{aligned}$$

Durch Verknüpfen mit $t \in \mathrm{H}_{in}^m$ und Spurbildung entsteht

$$\sum_{r \in R_n} \mathrm{tr}(z b_{r,n})\,\mathrm{tr}(t a_{r,n}) = (\dim(n))\,\mathrm{tr}(t(\mathrm{id}_{V_i} \otimes z)(y \otimes \mathrm{id}_{V_l})x),$$

also die Behauptung. $\square$

Definition 4.18: Der zu $\operatorname{tr}(\cdot(\mathrm{id}_{V_i} \otimes \cdot)(\cdot \otimes \mathrm{id}_{V_l})\cdot)$ adjungierte Tensor $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix} \in \mathrm{H}_{kl}^{m} \otimes_K \mathrm{H}_{ij}^{k} \otimes_K \mathrm{H}_{m}^{in} \otimes_K \mathrm{H}_{n}^{jl}$ heißt **symmetrisiertes $6j$-Symbol**. Mit $*_{ij}^{k}$ bezeichne ich die Kontraktion für Tensoren aus $\mathrm{H}_{ij}^{k} \otimes_K \mathrm{H}_{k}^{ij}$.

Korollar 4.19:

$$\sum_{j \in I} \dim(j) *_{j_2 j_3}^{j} *_{j j_4}^{j_7} *_{j_1 j}^{j_6} \left(\begin{vmatrix} j_2 & j_3 & j \\ j_4 & j_7 & j_8 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} j_1 & j & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_7 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_3 & j_6 & j \end{vmatrix} \right)$$
$$= *_{j_5 j_8}^{j_0} \left(\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_5 \\ j_8 & j_0 & j_7 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} j_5 & j_3 & j_6 \\ j_4 & j_0 & j_8 \end{vmatrix} \right).$$

Dem symmetrisierten $6j$-Symbol sieht man im Grunde an, daß es die nötige Tetraedersymmetrie besitzt, denn die Kanten seines Graphen, den man in Lemma 4.17 sieht, bilden die Kanten eines Tetraeders — wenn sie im Raum verschoben werden können.

Es besteht eine Wahl in der Anordnung der „Fäden“ an den Coupons der H_{k}^{ij}; diese muß berücksichtigt werden. Die Moduln H^{ijk}, H^{jik}, H^{kji} usw. sind alle zueinander isomorph; ich möchte daher einen **symmetrisierten Modul** $\mathrm{H}(i,j,k)$ definieren, der nur noch von dem *ungeordneten* Tripel (i,j,k) abhängt. Für jedes $i \in I$ ist der Twist θ_{V_i} die Multiplikation mit einem Element v_i von K; man setzt nun voraus, daß es in K ein Element v_i' gibt mit $(v_i')^2 = v_i$. Falls es ein solches nicht gibt, wird K erweitert. Dann ist eine Operation der symmetrischen Gruppe S_3 mit Erzeugenden σ_1, σ_2 auf den H^{ijk} erklärt:

$$\sigma_1(ijk)(x) := v_i' v_j' (v_k')^{-1} (c_{V_i,V_j} \otimes \mathrm{id}_{V_k}) x$$
$$\sigma_2(ijk)(x) := v_j' v_k' (v_i')^{-1} (\mathrm{id}_{V_i} \otimes c_{V_j,V_k}) x.$$

Die Gültigkeit der Relation $\sigma_1(jki)\sigma_2(jik)\sigma_1(ijk) = \sigma_2(kij)\sigma_1(ikj)\sigma_2(ijk)$ folgt sofort aus der Zopfrelation für das Braiding, und $\sigma_1(jik)\sigma_1(ijk) = \mathrm{id}$ (analog für σ_2) folgt aus Abbildung 4.7. Der Modul $\mathrm{H}(i,j,k)$ ist nun als die Identifizierung

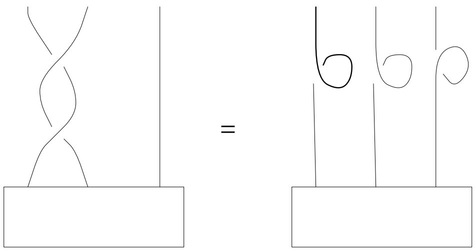


Abbildung 4.7: $\sigma_1(jik)\sigma_1(ijk) = \mathrm{id}$

der Moduln H^{ijk} (mit verschiedenen Permutationen der i,j,k) definiert; im graphischen Kalkül ändert sich nichts Wesentliches, da man einfach Repräsentanten hinzeichnet.

Es fehlt noch ein kleine Zusatzstruktur, damit die Symmetrie des Graphen wirklich zum Tragen kommt.

Definition 4.20: Eine halbeinfache Bandkategorie heißt **unimodal**, falls es $\forall i \in I$ Isomorphismen $w_i : V_i \to (V_{i^*})^*$ gibt, so daß die in Abbildung 4.8 gezeigte Gleichung gilt.

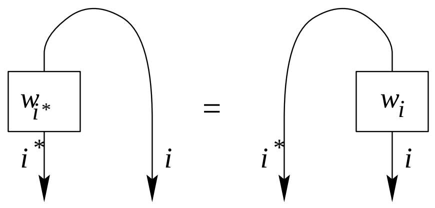


Abbildung 4.8: Unimodale Kategorien

Als Analogon zur Spur ist die nichtausgeartete Paarung

$$*^{ijk} : \mathrm{H}(i, j, k) \otimes_K \mathrm{H}(i^*, j^*, k^*) \to K$$

auf den Repräsentanten durch Abbildung 4.9 definiert.

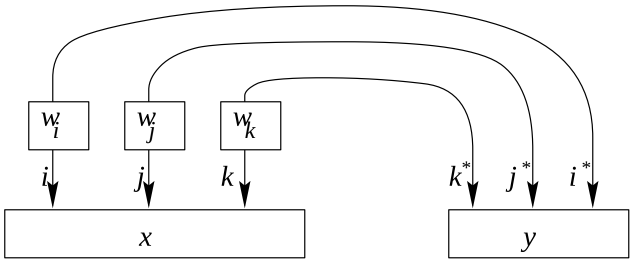


Abbildung 4.9: Die Spur für symmetrisierte Moduln

Man sucht nun einen Morphismus einer Monoidalkategorie für „gefärbte, symmetrisierte Bandgraphen“; diese bestehen aus *runden* Coupons, in denen Elemente gewisser $\mathrm{H}(i, j, k)$ stehen. Sie sind durch gerichtete Bänder verbunden, welche Farben aus der Menge I tragen. Einem solchen Graphen Ω ordnet man zunächst einen Repräsentanten Γ zu: Für jeden Coupon von Ω wählt man einen Repräsentanten H^{ij}_k, und jedes gefärbte Band ersetzt man wie in Abbildung 4.10 gezeigt. Turaev zeigte nun in [Tur94], daß der Γ zugeordnete Morphismus nur

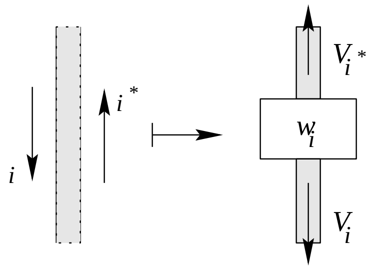


Abbildung 4.10: Übergang von Ω zu Γ

von der Isotopieklasse von Ω abhängt, also von der Wahl eines Repräsentanten unabhängig ist. Man erhält das Resultat:

Satz 4.21: *Für jede unimodale Kategorie seien 6j-Symbole* $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{vmatrix}$ *durch den gefärbten Bandgraphen aus Abbildung 4.11 definiert. Diese 6j-Symbole erfüllen*

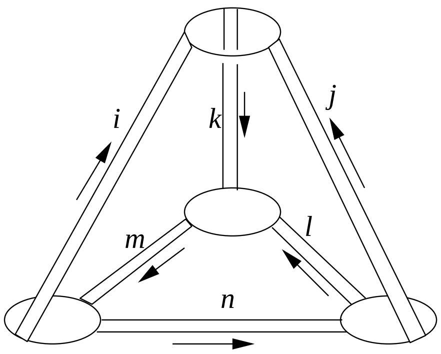


Abbildung 4.11: Das endgültige $6j$-Symbol

die Biedenharn-Elliott-Gleichung aus Korollar 4.19 und besitzen Tetraedersymmetrie. Dadurch erhält man eine Invariante für kompakte Dreimannigfaltigkeiten. **q.e.d.**

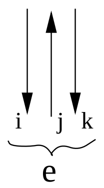
Die so gefundenen Invarianten sind allgemeiner als die Turaev-Viro-Invarianten. Die gefärbten Spineflächen sind orientiert, und ein Wechsel der Orientierung bedeutet den Übergang zum dualen Objekt; dies wird bei einer Invariante von Yetter, die ich in Kapitel 5 beschreibe, entscheidend. Weiter sind die $6j$-Symbole im allgemeinen Tensoren und nicht bloß Zahlen, nämlich wenn die $\mathrm{H}(i,j,k)$ *mehrdimensionale* K-Moduln sind; das läuft darauf hinaus, nicht nur die Flächen, sondern auch die Kanten der Kollabierretrakte zu färben, und ist wichtig für eine eigene Invariante, die ich in Verallgemeinerung der Invariante von Yetter definiere.

4.2.3 Darstellungen des Graphenkalküls

Da der Benedetti-Petronio-Kalkül eine direkte Übersetzung der Spineprozesse ist, sollte es möglich sein, auch die $6j$-Invarianten für Graphen umzuformulieren. Ähnlich wie einem Knotendiagramm ein Morphismus einer Bandkategorie zugeordnet wird, lassen sich auch den o-Graphen Morphismen gewisser Kategorien zuordnen, wie ich nun skizzieren möchte.

Sei eine halbeinfache Bandkategorie $\mathcal{V}$ mit Multiplizitätsmoduln H_i^{jk} vorgegeben. Orientiere die Flächen des dem o-Graphen zugeordneten Kollabierretraktes (dies läßt sich offenbar auch auf Graphenebene formulieren); ordne einer Kante e des Graphen je nach induzierter Orientierung seiner Flügel einen

K-Modul $\mathcal{H}_e$ zu, wie bildlich angedeutet:



$$= \bigoplus_{i,j,k} \left(\mathrm{H}_i{}^j{}_k \otimes_K \mathrm{V}_i \otimes_K \mathrm{V}_j^* \otimes_K \mathrm{V}_k \right)$$

Dabei ist $V_i \otimes_K V_j$ als *gewöhnliches* Tensorprodukt mit diagonaler K-Operation aufzufassen, *nicht* als Tensorprodukt in $\mathcal{V}$; offenbar ist diese Definition bis auf Reihenfolge und Isomorphie der Summanden von der Wahl der Orientierungen unabhängig, da zu $i \in I$ ein $i^* \in I$ existiert mit $V_{i^*} \cong V_i^*$. Nebeneinandersetzen von Kanten wird als Tensorprodukt aufgefaßt. Des weiteren ist eine Dualität mit Morphismen $d : \mathcal{H}_e \otimes_K \mathcal{H}_e^* \to K$ und $b : K \to \mathcal{H}_e^* \otimes_K \mathcal{H}_e$ erklärt: Auf den H_i^{jk}-Termen entsprechen beide der Auswertungs- bzw. Coauswertungsabbildung dualer K-Moduln, während sie auf den V_i-Termen durch die Abbildungen d_{V_i} und b_{V_i} aus $\mathcal{V}$ gegeben sind. Dem Label $\sigma \in S_3$ einer Kante entspricht als Morphismus die Operation der S_3 auf den Multiplizitätsmoduln, wie sie in Abschnitt 4.2.2 erklärt wurde, bzw. auf den V_i-Summanden die Vertauschung der Summanden. Eine unmarkierte Ecke entspricht der Transpositionsabbildung in $\mathcal{H}_e \otimes_K \mathcal{H}_{e'}$. Einer markierten Ecke wird ein Morphismus

$$P : \mathcal{H}_{e_1} \otimes_K \mathcal{H}_{e_2} \to \mathcal{H}_{e_3} \otimes_K \mathcal{H}_{e_4}$$

zugeordnet. Auf den Multiplizitätsmoduln ist dieser durch das symmetrische $6j$-Symbol in $\mathcal{V}$ definiert, bei entsprechender Orientierung der Spineflächen zum Beispiel als Abbildung

$$\left(\mathrm{H}_m^{lk} \otimes_K \mathrm{H}_k^{ij} \right) \to \left(\mathrm{H}_m^{in} \otimes_K \mathrm{H}_n^{lj} \right);$$

auf den V_i-Termen ist er hingegen durch

$$\begin{aligned} T_{l^*i^*} \circ (\mathrm{id}_{ml^*} \otimes b_k \otimes \mathrm{id}_{i^*j^*}) \circ (\mathrm{id}_{ml^*} \otimes d_{n^*} \otimes \mathrm{id}_{i^*j^*}) : \\ (V_m \otimes_K V_l^* \otimes_K V_k^*) \otimes_K (V_k \otimes_K V_i^* \otimes_K V_j^*) \to \\ (V_m \otimes_K V_i^* \otimes_K V_n^*) \otimes_K (V_n \otimes_K V_l^* \otimes_K V_j^*) \end{aligned}$$

definiert, wobei $T_{l^*j^*}$ die Vertauschung der Terme V_l^* und V_i^* bedeutet.

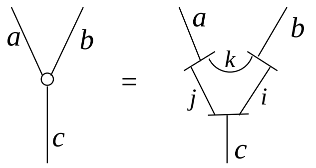
Die Auswertung eines o-Graphen als Morphismus, also als Element von K, ist ein genaues Abbild der Berechnung der $6j$-Invariante; dies sieht man wie folgt ein: Durch die direkte Summenstruktur zerfällt der Morphismus ebenfalls in eine Summe, und zwar offenbar erstreckt über die Färbungen des zum Graphen gehörenden Spines. Die V_i-Terme ergeben das Produkt über die Farben der Spineflächen. Die H_i^{jk}-Terme hingegen ergeben das verjüngte Tensorprodukt über die den Ecken des Spines zugeordneten $6j$-Symbole.

Da wir schon die Invarianz der Zustandssummen kennen, folgt die Invarianz der den o-Graphen zugeordneten Morphismen gegenüber Graphenprozessen, wir haben also tatsächlich eine Darstellung des Graphenkalküls durch Morphismen einer Kategorie gefunden. Auch Carlo Petronio untersucht in seiner Dissertation [Pet95] Darstellungen des Graphenkalküls; er verfolgt einen Skein-Ansatz: So wie in der Skein-Kategorie eine Überkreuzung in eine Linearkombination zerlegt wird, setzt Petronio sowohl markierte Ecken als auch Kanten als Linearkombination an; er erhält eine große Klasse von Invarianten. Die Turaev-Viro-Invarianten sind in dieser Klasse als ein vergleichsweise harmloser Spezialfall enthalten. Er untersuchte noch weitere einfache Spezialfälle, die numerischen Ergebnissen zufolge jedoch keinen Erfolg versprechen. Weniger einfache Spezialfälle sind nur äußerst schwer zu berechnen.

4.2.4 Die $6j$-Symbole der Skein-Kategorie

In den nun folgenden Rechnungen lehne ich mich an [MV94] an. Sei wieder A eine primitive $4r$-te Einheitswurzel; **Farben** sind Zahlen aus $I := \{0, \ldots, r-2\}$. Die zu A gehörige Skeinkategorie $\mathcal{V}$ ist unimodal mit Morphismen $w_i := \mathrm{id}_{(i)} : (i) \to (i)^* = (i)$.

Definition 4.22: Ein Tripel (a, b, c) von Farben heißt **zulässig**, , falls $a+b+c$ gerade ist und die Dreiecksungleichung $|a-b| \leq c \leq |a+b|$ gilt; es heißt **strikt zulässig**, falls zusätzlich $a+b+c \leq 2r-4$ gilt. Für ein zulässiges Tripel definiere ich eine dreiwertige Ecke $\Gamma(a, b, c)$ wie im Bild:



Ein Querbalken bedeutet die Jones-Wenzl-Idempotente. Die **inneren Farben** i, j, k berechnen sich zu

$$i = (b+c-a)/2, \quad j = (a+c-b)/2, \quad k = (a+b-c)/2;$$

offenbar sind i, j, k genau dann Farben, wenn (a, b, c) zulässig ist.

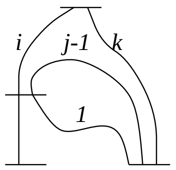
Der Modul H_c^{ab} verschwindet, falls (a, b, c) nicht zulässig ist, denn wenn $a+b+c$ ungerade ist, gibt es aus Paritätsgründen überhaupt kein Diagramm mit c Eingängen und $a+b$ Ausgängen, während bei Verletzung der Dreiecksungleichung jedes Diagramm rücklaufende Bögen enthielte, welche von den Jones-Wenzl-Idempotenten annuliert würden; falls (a, b, c) zulässig ist, wird H_c^{ab} von $\Gamma(a, b, c)$ erzeugt, denn alle weiteren Diagramme würden wegen rücklaufender Bögen anulliert. $\overline{\Gamma}(a, b, c)$ sei das Spiegelbild von $\Gamma(a, b, c)$ an einer horizontalen Achse; es erzeugt H_{bc}^{a}. Zu jeder natürlichen Zahl n definiere als Analogon zur Fakultät $[n]! := [n][n-1]\cdots[1]$ und $[0]! := 1$. Für alle folgenden Rechnungen gilt die Konvention, daß ein Diagramm verschwindet, welches einen negativ beschrifteten Faden enthält.

Lemma 4.23: *Es seien (a, b, c) zulässig und i, j, k die zugehörigen inneren Farben. Dann ist*

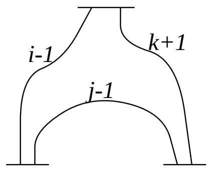
$$\mathrm{tr}\left(\overline{\Gamma}(a, b, c)\Gamma(a, b, c)\right) = (-1)^{i+j+k} \frac{[i+j+k+1]!\,[i]!\,[j]!\,[k]!}{[i+j]!\,[i+k]!\,[j+k]!}$$

Insbesondere ist dieser Ausdruck genau dann von Null verschieden, wenn (a,b,c) sogar strikt zulässig ist; sonst enthielte $[i+j+k]!$ nämlich den Faktor $[r-1]=0$. $\Gamma(a,b,c)$ wäre in diesem Falle ein unwichtiger Morphismus.

Lemma 4.24: *Für $j \geq 1$ gilt*

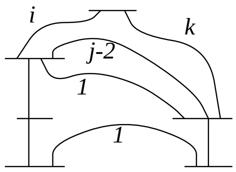


$$= \frac{[i]}{[i+j-1]}$$



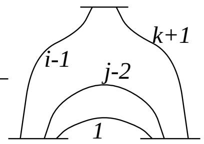
Beweis: Induktion nach j; für $j=1$ ist die Aussage wegen Lemma 3.21 trivial. Für $j>1$ wendet man die Rekursionsgleichung aus Definition 3.20 auf die Idempotente f_{i+j-1} an. Der erste Term enthält rücklaufende Bögen und verschwindet daher, der zweite ist (wieder unter Verwendung von 3.21)

$$= \frac{[i+j-2]}{[i+j-1]}$$



Man wendet die Induktionsannahme auf den oberen Teil des Bildes an und erhält mit 3.21

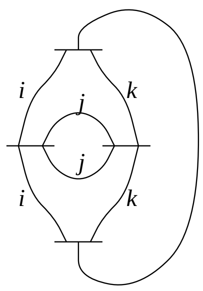
$$= \frac{[i]}{[i+j-1]}$$



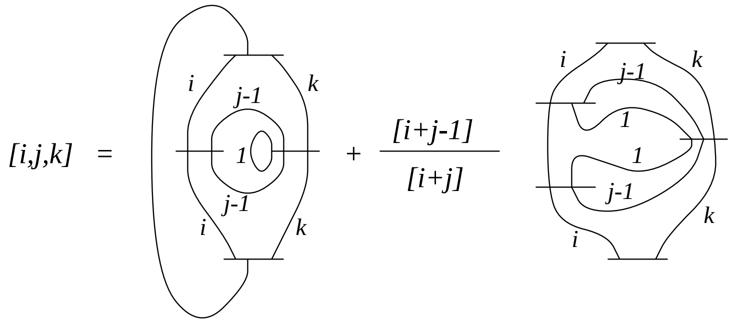
□

Beweis zu Lemma 4.23: Verwende die Abkürzung $[i,j,k]$ für das auszuwertende Diagramm (es stimmt mit $\mathrm{tr}(\overline{\Gamma}(a,b,c)\Gamma(a,b,c))$ überein):

$$[i,j,k] :=$$



Induktion nach j: Für $j = 0$ ist $[i, j, k] = \dim(i + k) = (-1)^{i+k}[i + k + 1]$, was der Behauptung entspricht. Für $j > 0$ liefert die Rekursionsgleichung



Dies wird mit Lemmata 3.21 und 4.23 zu

$$\begin{aligned}
[i, j, k] = &- \frac{[j + k + 1]}{[j + k]}[i, j - 1, k] \\
&+ \frac{[i]^2}{[i + j][i + j - 1]}[i - 1, j - 1, k + 1].
\end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite liefert nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
&(-1)^{i+j-1+k+1} \frac{[j + k + 1]\,[i + j + k]!\,[i]!\,[j - 1]!\,[k]!}{[j + k]\,[i + j - 1]!\,[j + k - 1]!\,[i + k]!} \\
&\qquad = (-1)^{i+j+k} \frac{[i + j][j + k + 1]\,[i + j + k + 1]!\,[i]!\,[j]!\,[k]!}{[i + j + k + 1][j]\,[i + j]!\,[j + k]!\,[i + k]!},
\end{aligned}$$

der zweite

$$\begin{aligned}
&(-1)^{i+j+k-1} \frac{[i]^2[i + j + k]!\,[i - 1]!\,[j - 1]!\,[k + 1]!}{[i + j]\,[i + j - 1]\,[i + j - 2]!\,[j + k]!\,[i + k]!} \\
&\qquad = -(-1)^{i+j+k} \frac{[i][k + 1]\,[i + j + k + 1]!\,[i]!\,[j]!\,[k]!}{[i + j + k + 1][j]\,[i + j]!\,[j + k]!\,[i + k]!}.
\end{aligned}$$

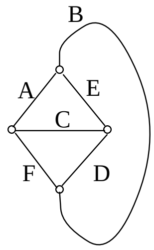
Beide Terme zusammen ergeben

$$\begin{aligned}
&(-1)^{i+j+k} \frac{[i + j + k + 1]!\,[i]!\,[j]!\,[k]!}{[i + j]!\,[j + k]!\,[i + k]!} \cdot \frac{[i + j][j + k + 1] - [i][k + 1]}{[i + j + k + 1][j]} \\
&\qquad = (-1)^{i+j+k} \frac{[i + j + k + 1]!\,[i]!\,[j]!\,[k]!}{[i + j]!\,[j + k]!\,[i + k]!}
\end{aligned}$$

unter Verwendung von $[i + j][j + k + 1] - [i][k + 1] = [j][i + j + k + 1]$, was in natürlichen Zahlen trivial und auch in den deformierten Zahlen nicht schwer nachzurechnen ist. □

Zu guter Letzt gilt es noch, die $6j$-Symbole von $\mathcal{V}$ zu berechnen; dafür möchte ich auf [MV94] verweisen, denn ein Induktionsbeweis der Formel ist sehr lang und liefert keine tieferen Einblicke. Hier das erschreckende Ergebnis:

Satz 4.25:



Der obige Graph, ein $6j$-Symbol von $\mathcal{V}$, ist für $A, B, C, D, E, F \in I$ erklärt, wobei (A, B, E), (B, D, F), (E, D, C) und (A, C, F) strikt zulässig sein müssen. Sei $\Sigma = A + B + C + D + E + F$ und

$$
\begin{aligned}
a_1 &:= (A + B + E)/2, & b_1 &:= (\Sigma - A - D)/2,\\
a_2 &:= (B + D + F)/2, & b_2 &:= (\Sigma - E - F)/2,\\
a_3 &:= (C + D + E)/2, & b_3 &:= (\Sigma - B - C)/2,\\
a_4 &:= (A + C + F)/2. & &
\end{aligned}
$$

$M_a := \max\{a_i\}$ *und* $m_b := \min\{b_i\}$. *Dann ist*

$$
\left| \begin{smallmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{smallmatrix} \right| = \frac{\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{4} [b_i - a_j]!}{[A]![B]![C]![D]![E]![F]!} \sum_{M_a \le \zeta \le m_b} \frac{(-1)^{\zeta} [\zeta + 1]!}{\prod_{i=1}^{3} [b_i - \zeta]! \prod_{j=1}^{4} [\zeta - a_j]!}.
$$

q.e.d.

Wie sind diese Invarianten einzuordnen? In $\mathcal{V}$ ist stets $V_i^* = V_i$, die Spineflächen werden also ohne Rücksicht auf ihre Orientierung gefärbt. Die Multiplizitätsmoduln H_k^{ij} sind stets höchstens *eindimensionale* K-Moduln, da sie von nur einem Morphismus $\Gamma(i, j, k)$ erzeugt werden; damit ist

$$
\mathrm{H}_{kl}^{m} \otimes_K \mathrm{H}_{ij}^{k} \otimes_K \mathrm{H}_{m}^{in} \otimes_K \mathrm{H}_{n}^{jl} \cong K,
$$

die $6j$-Symbole sind daher keine „echten“ Tensoren, sondern nur Ringelemente. Die zu $\mathcal{V}$ gehörenden Invarianten für Dreimannigfaltigkeiten sind also Beispiele für die „alten“ Turaev-Viro-Invarianten und unterliegen den in Abschnitt 4.1.2 aufgezeigten Beschränkungen; andererseits zeigt sich, daß sie recht gut mit Linsenräumen umgehen können, was ich hier aber nicht weiter ausführen möchte.

Kapitel 5

Eine Invariante von Yetter und eine eigene Klasse von Verallgemeinerungen

In [Yet92] stellte David Yetter eine interessante Zustandssumme vor, die eng mit der Fundamentalgruppe zusammenhängt. Ich werde sie durch Spines definieren und dann auf Yetters eigentliche Absicht eingehen, topologische Quantenfeldtheorien zu konstruieren. Dann werde ich Yetters Invariante nichttrivial zu einer Klasse neuer Zustandssummeninvarianten verallgemeinern. In den folgenden Abschnitten beschreibe ich verschiedene Beispiele aus dieser Klasse.

5.1 Die Yetter-Invariante

5.1.1 Definition und Interpretation der Yetter-Invariante

Sei G eine endliche Gruppe. Wähle für jede Spinefläche eine Orientierung und färbe sie mit Elementen aus G. Eine solche G-Färbung heißt **zulässig**, falls an jeder orientierten Kante (im Sinne von Definition 2.3) des Kollabierretraktes gilt:

$$g_1^{\epsilon_1} \cdot g_2^{\epsilon_2} \cdot g_3^{\epsilon_3} = 1.$$

Dabei sind die g_i die Farben der zyklisch durchlaufenen Flügel der Kante; ϵ_i ist $+1$, falls die Richtung der Kante mit der vom Flügel induzierten übereinstimmt. Offenbar ist die Zulässigkeit unabhängig von der Orientierung der Kante; Orientierungsänderung einer Fläche bei gleichzeitiger Invertierung ihrer Farbe führt wieder auf eine zulässige Färbung. Die Invariante ist nun denkbar einfach definiert:

$$Y(M;G) := \text{ Anzahl der zulässigen } G\text{-Färbungen von } M.$$

Lemma 5.1: *$Y(M;G)$ ist invariant gegen einen T-Prozeß vom Kollabierretrakt P_1 nach P_2 (siehe Abbildung 5.1).*

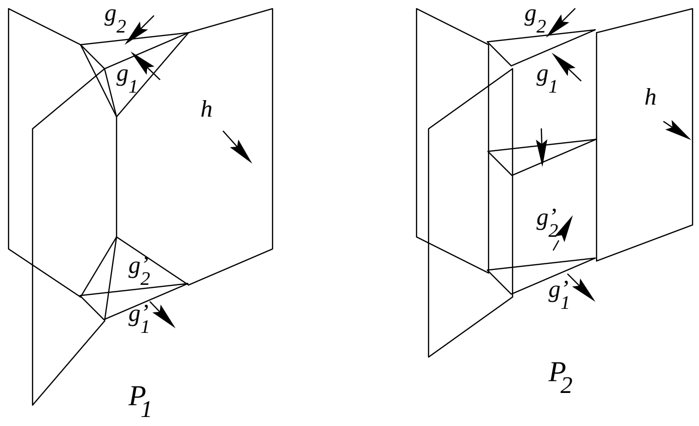


Abbildung 5.1: Ein T-Prozeß

Beweis: Die Farbe der zusätzlichen Fläche muß $g_1^{-1}(g_1')^{-1}$ sein; das ist wohlbestimmt, denn $g_2^{-1}(g_2')^{-1} = g_1^{-1}(g_1')^{-1}$, da $g_1 g_2^{-1} = h^{-1} = (g_1')^{-1} g_2'$. Die Färbungen von P_1 und P_2 entsprechen einander also eins zu eins. $\square$

G wird wie in Abschnitt 3.2 als eine halbeinfache Kategorie betrachtet. Man beachte, daß für nichtabelsche G *keine* Bandkategorie vorliegt; die Symmetrie der $6j$-Symbole folgt also nicht aus Satz 4.21, sondern muß zu Fuß nachgeprüft werden (was trivial ist). Das $6j$-Symbol $\left|\begin{smallmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{smallmatrix}\right|$ ist 1, falls $klm^{-1} = ijk^{-1} = inm^{-1} = jln^{-1} = 1$ gilt, und ist sonst null; die Biedenharn-Elliot-Gleichung vereinfacht sich drastisch, da die Summe zusammenbricht. Gleichwohl ist die Invariante nichttrivial; um dies zu zeigen, möchte ich den Blickpunkt wechseln und zu $\mathcal{T}(M)$ übergehen (zur Definition von $\mathcal{T}(M)$ siehe Kapitel 2.3.3), also einer geschlossenen triangulierten Pseudomannigfaltigkeit, deren Kanten mit Elementen aus G gefärbt werden. Eine Färbung ist zulässig, wenn das Produkt der Farben der Randkanten jedes Dreiecks der Triangulation Eins ergibt. Wähle nun eine Ecke als Basispunkt p; jeder geschlossene, von p ausgehende Weg w im Einsgerüst definiert in natürlicher Weise ein Gruppenelement $g(w)$, nämlich das Produkt der Farben entlang des Weges.

Lemma 5.2: *$g(w)$ hängt nur von der* Homotopieklasse *von w ab.*

Beweis: Seien K_1, K_2, K_3 die mit g_1, g_2, g_3 zulässig gefärbten Randkanten eines Dreiecks und K_1 eine Kante von w; für Homotopie genügt es, die Ersetzung von K_1 durch (K_3^{-1}, K_2^{-1}) zu betrachten; wegen $g_1 = g_3^{-1} g_2^{-1}$ ändert sich an $g(w)$ nichts. $\square$

Satz 5.3: *$Y(M;G)$ ist die Anzahl der Homomorphieklassen („Darstellungsklassen“ in Yetters Terminologie) von $\pi_1(\mathcal{T}(M))$ in G, multipliziert mit $|G|^{\#\partial M - 1}$; $\#\partial M$ soll die Anzahl der Randkomponenten bedeuten; „Klassen“ heißt hier Konjugationsklassen.*

Beweis: Jede zulässige Färbung definiert zusammen mit p eine Darstellung der Fundamentalgruppe: Die Homotopieklasse eines geschlossenen Weges w wird auf $g(w)$ abgebildet. Eine Änderung des Basispunktes bedeutet bekanntermaßen eine Konjugation der Darstellung, eine zulässige Färbung bestimmt also eine Darstellungsklasse.

Die Randkomponenten entsprechen den Ecken von $\mathcal{T}(M)$. Betrachte einen aufspannenden Baum des Einsgerüstes; $\#\partial M - 1$ ist die Anzahl der Kanten des Baumes. Sei nun eine Darstellung der Fundamentalgruppe bei festem Basispunkt vorgegeben und seien die Kanten im Baum beliebig gefärbt; dann sind die Farben der nicht im Baum befindlichen Kanten eindeutig bestimmt, und die Färbung ist automatisch zulässig. Für die Färbung der Baumkanten gibt es $|G|^{\#\partial M-1}$ Möglichkeiten. **q.e.d.**

5.1.2 Topologische Quantenfeldtheorie

Ich möchte kurz darstellen, zu welchem Zwecke Yetter eigentlich seine Invariante entwickelte.

Definition 5.4: Seien N_1 und N_2 geschlossene orientierte n-Mannigfaltigkeiten, M eine (berandete) orientierte $(n+1)$-Mannigfaltigkeit; M heißt **Cobordismus** von N_1 nach N_2, falls es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $N_1 \amalg -N_2 \to \partial M$ gibt ($-N_2$ ist N_2 mit umgekehrter Orientierung). Die **Cobordismenkategorie** Cobord hat als Objekte geschlossene orientierte n-Mannigfaltigkeiten und als Morphismen Cobordismen; die Komposition zweier Cobordismen ist wie folgt erklärt: Seien $M : N_1 \to N_2$ und $M' : N_2 \to N_3$ Cobordismen; dann ist $M' \circ M := M' \cup_{N_2} M : N_1 \to N_3$. id_N ist $N \times [0,1]$. Cobord ist eine Monoidalkategorie: $N_1 \otimes N_2 := N_1 \amalg N_2$, $\mathbf{1} := \emptyset$, $N^* := -N$.

Definition 5.5: Eine $(n+1)$**-dimensionale topologische Quantenfeldtheorie** ist ein Funktor von Cobord in die Kategorie der beschränkten Operatoren eines Hilbertraumes; die Monoidalstruktur soll dabei erhalten bleiben.

Yetter konstruiert eine $(2+1)$-dimensionale Quantenfeldtheorie. Dazu betrachtet er zunächst die Kategorie der triangulierten Cobordismen, $(M, \mathcal{T}) : (N_1, T_1) \to (N_2, T_2)$, wobei die Triangulierung $\mathcal{T}$ von M die Triangulierungen T_i der N_i induziert. Die Kanten der Triangulierungen werden mit Elementen der endlichen Gruppe G gefärbt; einer Zweimannigfaltigkeit N mit Triangulierung T wird der $\mathbb{C}$-Vektorraum $Z_G(N,T)$ zugeordnet, welcher als Basis die Menge $\Lambda_G(T)$ der zulässigen Färbungen von T besitzt. Offenbar ist

$$Z_G(N_1 \amalg N_2, T_1 \cup T_2) = Z_G(N_1, T_1) \otimes_{\mathbb{C}} Z_G(N_2, T_2)$$

und $Z_G(\emptyset, \emptyset) = \mathbb{C}$. Einem Cobordismus $(M, \mathcal{T}) : (N_1, T_1) \to (N_2, T_2)$ wird nun ein Morphismus $Z(M, T_1, T_2) : Z_G(N_1, T_1) \to Z_G(N_2, T_2)$ zugeordnet, welcher für ein Basiselement $\lambda \in \Lambda_G(T)$ durch

$$Z_G(M, T_1, T_2)(\lambda) := |G|^{n(\mathcal{T}, T_1, T_2)} \sum_{\mu \in \Lambda_G(\mathcal{T}), \mu|T_1 = \lambda} \mu|T_2$$

gegeben ist, wobei $n(\mathcal{T}, T_1, T_2) := \frac{1}{2}|T_1^{(0)}| + \frac{1}{2}|T_2^{(0)}| - |\mathcal{T}^{(0)}|$ und $T^{(0)}$ die Menge der Ecken einer Triangulierung T bedeutet.

Lemma 5.6: *Seien $(M', \mathcal{T}') : (N_1, R) \to (N_2, S)$ und $(M, \mathcal{T}) : (N_2, S) \to (N_3, T)$ Cobordismen. $Z_G(M, S, T)$ hängt nicht von $\mathcal{T}$ ab, und es gilt*

$$Z_G(M, S, T) Z_G(M', R, S) = Z_G(M \cup_{N_2} M', R, T).$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt durch Betrachten eines Sternprozesses an der Kante K im Inneren von $(M, \mathcal{T})$ (das Ergebnis heiße $(M, \mathcal{T}'')$): Sei m die Anzahl der Tetraeder von $\mathcal{T}$, welche K enthalten; $|\mathcal{T}''^{(0)}| = |\mathcal{T}^{(0)}| + 1$, und $|\mathcal{T}''^{(1)}| = |\mathcal{T}^{(1)}| + m + 1$, $\mathcal{T}^{(1)} - \{K\}$ ist in $\mathcal{T}''^{(1)}$ eingebettet. Eine zulässige Färbung von $\mathcal{T}$ läßt sich zulässig auf $\mathcal{T}''$ fortsetzen; wähle dazu eine *beliebige* Farbe für eine der zusätzlichen Kanten von $\mathcal{T}''$, alle anderen Farben sind dann festgelegt. Es gibt also genau $|G|$ mal mehr zulässige Färbungen von $\mathcal{T}''$ als von $\mathcal{T}$, was durch $|G|^{-|\mathcal{T}^{(0)}|}$ wegnormiert wird. $Z_G(M, S, T)$ ändert sich also nicht. Die zweite Behauptung folgt leicht, wenn man die Ecken von $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T} \cup_S \mathcal{T}'$ zählt. $\square$

Wenn man sich nur für geschlossene Dreimannigfaltigkeiten M interessiert, so kann man jetzt schon Invarianten definieren: M erklärt eine Abbildung

$$Z_G(M, \emptyset, \emptyset) : Z_G(\emptyset, \emptyset) = \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

also eine komplexe Zahl; da die einzige Triangulierung von $\emptyset$ die leere Triangulierung ist, ist diese Zahl wohldefiniert und eine Invariante von M. Eine von der Triangulierung der Zweimannigfaltigkeiten unabhängige Definition ist offenbar nicht so leicht zu erhalten, da sich mit T auch der Vektorraum $Z_G(N, T)$ wesentlich verändert. Gehe T' aus T durch einen Sternprozeß an K hervor, wobei die Kante K in K_1 und K_2 zerlegt wird und $T - \{K\}$ als Teilmenge von T' aufgefasst wird; einer zulässigen Färbung μ' von T' entspricht dann eine zulässige Färbung von T durch $\mu(K) := \mu'(K_1)\mu'(K_2) \in G$. Durch

$$res_{T',T}(\mu') := |G|^{-1/2(|(T')^{(0)}| + |T^{(0)}|)} \mu$$

ist eine **Restriktionsabbildung** von $Z_G(N, T')$ nach $Z_G(N, T)$ definiert, welche für alle M und S die Gleichung

$$Z_G(M, T', S) = Z_G(M, T, S) \circ res_{T',T}$$

erfüllt, wie man leicht nachprüft. Da zwei Triangulierungen einer geschlossenen Zweimannigfaltigkeit N stets eine gemeinsame Unterteilung (bzgl. Sternprozessen) besitzen, läßt sich $Z_G(N)$ als der Colimes der $Z_G(N, T)$ definieren; durch seine universelle Eigenschaft ist dann schließlich auch

$$Z_G(M) : Z_G(N_1) \to Z_G(N_2)$$

für einen Cobordismus M von N_1 nach N_2 erklärt. Ich fasse zusammen:

Satz 5.7: *Für jeden Cobordismus M, also eine berandete orientierte Dreimannigfaltigkeit, ist der Morphismus $Z_G(M)$ eine Homöomorphieinvariante relativ ∂M. Z_G ist ein Funktor, welcher eine $(2+1)$-dimensionale topologische Quantenfeldtheorie definiert.*

Meine Anwendung der Yetterschen Invariante auf Kollabierretrakte hat mehrere Vorteile: Erstens ist der Umgang mit berandeten Dreimannigfaltigkeiten mit Yetters Ansatz durch die Colimiten kompliziert; im Spinekalkül ist dies kein Problem. Der Preis ist freilich, daß $Y(M; G)$ nur die Fundamentalgruppe der M zugeordneten Pseudomannigfaltigkeit mißt und dadurch im Vergleich zu $Z_G(M)$ etwas verlorengeht. Zweitens muß Yetter die Anzahl der Färbungen normieren; bei meinem Ansatz entsprechen sich die Färbungen zweier Kollabierretrakte einer Mannigfaltigkeit *direkt* ohne Normierungsfaktor, was mir im übernächsten Abschnitt Verallgemeinerungen ermöglicht.

5.1.3 Möglichkeiten und Grenzen der Yetterschen Invariante

Ich möchte einige Beispiele angeben, die das Verhalten der Turaev-Viro-Invarianten, der Fundamentalgruppe, sowie Yetters Invariante beleuchten. Ich erinnere an die Definition von Ähnlichkeit in Kapitel 4.1.2 und möchte das Zusammenspiel dieses Begriffes mit der Fundamentalgruppe betrachten:

Lemma 5.8: *Zwei orientierte geschlossene irreduzible Dreimannigfaltigkeiten M_1 und M_2, die zueinander ähnlich sind und isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, sind homöomorph.*

Beweis: Hier hilft [Wal68]: Wenn die Mannigfaltigkeiten hinreichend groß, also Haken-Mannigfaltigkeiten sind (d.h. $\mathrm{H}_1(M_1)$ unendlich oder $\pi_1(M_1)$ ein nichttriviales amalgamiertes freies Produkt ist), so ist der Homöomorphietyp bereits durch die Fundamentalgruppe bestimmt. Wenn sie nicht hinreichend groß sind, so sind die Mannigfaltigkeiten nach Theorem 4.12 homöomorph. □

Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die weder den Turaev-Viro-Invarianten noch der Yetterschen Invariante zugänglich sind, gibt es dennoch: Sei $M := S^1 \times S^2$; $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. Sei $F := * \times S^2$; dann ist $M_F = S^1 \tilde{\times} S^2$. Auch M_F hat $\mathbb{Z}$ als Fundamentalgruppe und ist nach Konstruktion zu M ähnlich. M und M_F lassen sich weder durch die Fundamentalgruppe (insbesondere die Yetter-Invariante) noch die Turaev-Viro-Invarianten unterscheiden, obwohl M_F nichtorientierbar und damit von M verschieden ist. Es gibt aber schönere Beispiele:

Lemma 5.9: *(Lemma II.15 aus [Jac80]) Der Linsenraum $L(p,q)$ besitzt einen orientierungsändernden Selbsthomöomorphismus genau dann wenn $q^2 \equiv -1 \mod p$ ist.* □

Für eine zusammenhängende Summe $M_1 \# M_2$ zweier orientierter Dreimannigfaltigkeiten sei die Klebeabbildung der gemeinsamen Sphäre S von M_1 und M_2 stets orientierungsändernd; in diesem Sinne ist $M_1 \# - M_2$ definiert , M_2 mit umgekehrter Orientierung. Aus dem Lemma folgt, daß $M := L(p,q) \# L(p,q)$ und $L(p,q) \# - L(p,q)$ topologisch inäquivalent sind, falls $q^2 \not\equiv -1 \mod p$ ist. Es ist jedoch $M_S \approx L(p,q) \# - L(p,q)$, und es folgt:

Korollar 5.10: *Für $q^2 \not\equiv -1 \mod p$ sind $L(p,q) \# L(p,q)$ und $L(p,q) \# {-L(p,q)}$ zwei orientierte geschlossene Dreimannigfaltigkeiten, welche zueinander ähnlich sind und beide die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p$ besitzen. Da sich die $6j$-Invarianten multiplikativ unter zusammenhängenden Summen verhalten und invariant gegen Orientierungsänderung sind (siehe [Tur94]), sind die Mannigfaltigkeiten sogar auch durch diese Verallgemeinerung der Turaev-Viro-Invarianten nicht zu unterscheiden. Turaev definierte in [Tur94] jedoch weitere Invarianten, die Orientierung messen und damit das Beispiel „knacken“ könnten.*

Ich komme nun auf das Verhältnis von Fundamentalgruppe und Yetter-Invarianten; man könnte vermuten, daß eine Fundamentalgruppe durch die Anzahl der Homomorphieklassen in endlichen Gruppen recht gut bestimmt ist. Doch das ist nicht immer der Fall:

Lemma 5.11: *Sei $H := \pi_1(M)$ eine Gruppe, die keinen Normalteiler von endlichem Index außer H selbst besitzt, zum Beispiel eine unendliche einfache Gruppe. Dann ist $Y(M;G) = |G|^n$ für*

$$n = \text{(Anzahl der Randkomponenten von } M) - 1.$$

Beweis: Eine Darstellung von H in G bedeutet eine Homomorphismus ϕ von H in die *endliche* Gruppe G. $\operatorname{im}\phi \simeq H/\ker\phi$ ist endlich; also ist $\ker\phi$ kein echter Normalteiler von H, sondern $H = \ker\phi$. Es gibt also nur die triviale Darstellung. Mit Satz 5.3 folgt die Behauptung. $\square$

Leider fand ich nirgends ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit einer solchen Fundamentalgruppe (und ein solches ist sicher nicht leicht zu konstruieren).

5.2 Verallgemeinerungen der Yetter-Invariante

Wie im Beweis zu Lemma 5.1 deutlich wurde, entsprechen sich die zulässigen G-Färbungen zweier Kollabierretrakte einer Dreimannigfaltigkeit M eins zu eins; in diesem Sinne kann man von **zulässigen Färbungen** $zul(M,G)$ von M reden, da sie von einem konkreten Kollabierretrakt unabhängig sind. Das war bei der ursprünglichen Definition Yetters (mit Färbung von Triangulierungen) nicht möglich, da es nach Sternprozessen eventuell mehr Färbungen gibt als vorher. Dies führt mich auf eine Klasse von Verallgemeinerungen: Sei α_ϕ eine Größe, die von der Färbung $\phi \in zul(M,G)$ einer Mannigfaltigkeit M abhängt, nicht jedoch vom konkreten Kollabierretrakt von M. Dann ist das Tupel $(\alpha_\phi)_{zul(M,G)}$ eine Invariante von M.

Ein triviales Beispiel bildet Yetters Invariante: $\alpha_\phi := 1$ für jedes $\phi \in zul(M)$; $(\alpha_\phi)_{zul(M,G)}$ ist dann einfach ein Tupel der Länge $\#zul(M,G)$ mit lauter Einsen. Das ist aber genausogut wie $Y(M;G)$. Weniger triviale Beispiele folgen nun:

5.2.1 Färbung der Spinekanten mit G-Moduln

Meine Grundidee ist, zusätzlich zu den Flächen die Kanten eines Kollabierretraktes zu färben und analog zu $Y(M;G)$ die zulässigen Färbungen zu zählen. Es sei im folgenden G eine endliche *abelsche* Gruppe und B ein endlicher G-Modul. G operiert also auf der abelschen Gruppe B. Ich betrachte diesmal statt der Dreimannigfaltigkeit M sofort die zugeordnete triangulierte Pseudomannigfaltigkeit $\mathcal{T}(M)$; die Kanten von $\mathcal{T}(M)$ werden mit Elementen aus G und die Dreiecke mit Elementen aus B gefärbt, wobei eine Orientierungsänderung jeweils eine Invertierung der Farben bedeutet. Betrachte nun ein Tetraeder T mit orientierten Seiten $D_1, \ldots, D_4$ der Farben $b_1, \ldots, b_4 \in B$ (die Flächennormalen weisen nach außen); sei für $k, i \in \{1, \ldots, 4\}$, $k \neq i$ $g_{k,i} \in G$ die Farbe der Kante von T, welche weder im Rande von D_k noch von D_i liegt. Die Kante hat also mit D_k genau einen Randpunkt gemeinsam, und dieser sei der Anfangspunkt der Kante. Insbesondere ist $g_{k,i} = g_{i,k}^{-1}$.

Definition 5.12: Eine Färbung heißt **zulässig**, falls die Kanten zulässig gefärbt sind, d.h. für jedes Dreieck von $\mathcal{T}(M)$ gilt:

$$g_1^{\epsilon_1} \cdot g_2^{\epsilon_2} \cdot g_3^{\epsilon_3} = 1$$

mit denselben Bezeichnungen wie in Kapitel 5.1.1, und falls zusätzlich die Flächen zulässig gefärbt sind, d.h. für jedes Tetraeder T gilt:

$$b_1 + g_{2,1} \cdot b_2 + g_{3,1} \cdot b_3 + g_{4,1} \cdot b_4 = 0 \in B$$

Die Definition gilt mutatis mutandis auch für Färbungen von speziellen Pseudoflächen. Der Begriff „zulässige Färbung“ ist wohldefiniert, da in der Auszeichnung von b_1 keine echte Wahl besteht:

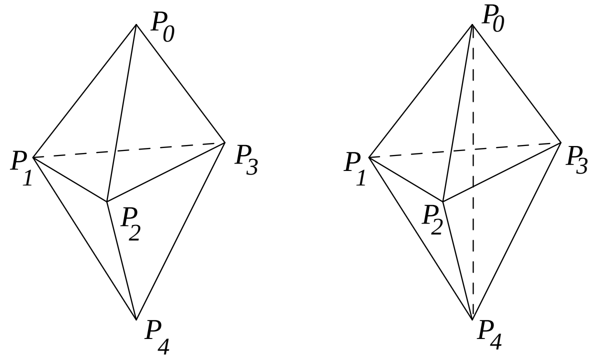
$$\begin{aligned} & b_1 + g_{2,1} \cdot b_2 + g_{3,1} \cdot b_3 + g_{4,1} \cdot b_4 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & g_{1,2} \cdot (b_1 + g_{2,1} \cdot b_2 + g_{3,1} \cdot b_3 + g_{4,1} \cdot b_4) = \\ g_{1,2} \cdot b_1 + (g_{1,2}g_{2,1}) \cdot b_2 + {} & (g_{1,2}g_{3,1}) \cdot b_3 + (g_{1,2}g_{4,1}) \cdot b_4 = \\ & g_{1,2} \cdot b_1 + b_2 + g_{3,2} \cdot b_3 + g_{4,2} \cdot b_4 = 0. \end{aligned}$$

Dabei verwendet man $g_{j,k}g_{i,j}g_{k,i} = 1$ für zulässige Färbungen der Kanten.

Folgende Anschauung führte mich auf diese Definition: Während Yetter mit seiner Invariante auf die Fundamentalgruppe stößt, möchte ich mich dem zweiten Homotopiemodul $\pi_2(\mathcal{T}(M))$ nähern. Dazu soll einer Fläche im Zweigerüst der Pseudomannigfaltigkeit ein Element des Moduls B zugeordnet werden, welches sich bei Homotopie relativ zum Basispunkt der Fläche nicht ändert; wenn die Gleichung oben $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$ lautete, so bedeutete dies, daß sich das der Fläche zugeordnete Element von B *gar nicht* änderte, selbst wenn der Basispunkt bewegt würde. Durch die Einführung der Operation von G wollte ich eine analoge Situation zu der Operation von π_1 auf π_2 schaffen.

Lemma 5.13: *Es gehe F_2 durch einen T-Prozeß aus der speziellen Pseudofläche F_1 hervor. Es sei eine zulässige Färbung der Flächen von F_1 gegeben, und wie in Kapitel 5.1.1 gesehen, entspricht ihr eindeutig eine zulässige Färbung der Flächen von F_2. Jeder zulässigen Färbung von F_1, welche die Flächenfärbung fortsetzt, entsprechen genau $|B|$ zulässige Färbungen von F_2.*

Beweis: Ich verwende das duale Bild, da man es leichter zeichnen kann:



Es sei g_{ij} die G-Farbe der gerichteten Kante von P_i nach P_j und b_{ijk} die B-Farbe des orientierten Dreiecks P_i, P_j, P_k. Zu gegebener G-Färbung von F_1 ist die von F_2 eindeutig bestimmt, es ist $g_{40} = g_{43}g_{30}$. Sei $b_{014} \in B$ beliebig vorgegeben; dann sind b_{024} und b_{034} eindeutig durch zulässige Färbung der Tetraeder

$P_0P_1P_2P_4$ und $P_0P_1P_3P_4$ festgelegt. Es bleibt zu verifizieren, daß dann auch das dritte Tetraeder zulässig gefärbt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} b_{024} - g_{12}b_{014} + g_{14}b_{012} + g_{10}b_{142} &= 0 \quad \text{und} \\ -b_{034} + g_{13}b_{014} + g_{14}b_{031} + g_{10}b_{341} &= 0; \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & b_{034} - g_{23}b_{024} + g_{20}b_{243} + g_{24}b_{023} \\ &\quad = g_{13}b_{014} + g_{14}b_{031} + g_{10}b_{341} + g_{20}b_{243} + g_{24}b_{023} \\ &\qquad + \ g_{23}\left(-g_{12}b_{014} + g_{14}b_{012} + g_{10}b_{142}\right) \\ &\quad = g_{14}\left(b_{031} + g_{21}b_{023} + g_{23}b_{012}\right) \\ &\qquad + \ g_{10}\left(b_{341} + g_{23}b_{142} + g_{21}b_{243}\right) \\ &\quad = g_{14}g_{20}b_{123} - g_{10}g_{24}b_{123} = 0, \end{aligned}$$

auch das dritte Tetraeder ist also zulässig gefärbt. Dabei wurde die Kommutativität von G im Laufe der Umformungen wesentlich verwendet; Gleichungen wie $g_{14}g_{20} = g_{10}g_{04}g_{24}g_{40} = g_{10}g_{24}$ beruhen *zusätzlich* auf der Zulässigkeit der G-Färbung. Durch die Rechnung ist zugleich gezeigt, daß eine zulässige Färbung von F_2 zu genau einer von F_1 führt. Das beweist das Lemma. $\square$

Ich würde gerne auf die Annahme „G abelsch" verzichten, doch dem Beweis des Lemmas nach zu urteilen, läßt sich das kaum machen. Es folgt unmittelbar:

Satz 5.14: *Es sei P Kollabierretrakt einer Dreimannigfaltigkeit M, e die Anzahl der Ecken von P, und zu $\phi \in zul(M,G)$ sei $\mathrm{ZUL}(M,\phi)$ die Menge aller zulässigen B-Färbungen von P, welche ϕ fortsetzen. Dann ist*

$$Y(M;G,B) := \left(\#\,\mathrm{ZUL}(M,\phi)\cdot|B|^{-e}\right)_{\phi\in zul(M,G)}$$

eine Invariante von M. **q.e.d.**

Offenbar stellt $Y(M;G,B)$ zumindest formal eine Verallgemeinerung der Invariante von Yetter dar.

Es ist unklar, ob man durch diese Verallgemeinerung viel gewinnt: In Abschnitt 5.1.3 gab ich als Beispiel $S^2 \times \mathrm{S}^1$ und $S^2 \tilde{\times} S^1$. Diese sind für $G := 1$ und $B := \mathbb{Z}_3$ leicht durch $Y(M;G,B)$ zu unterscheiden, aber das ist kaum beeindruckend. Das anspruchsvollere Beispiel $L(p,q)\#\pm L(p,q)$ ist durch $Y(M;G,B)$ nicht entscheidbar. Ein wirklich aussagekräftiges Beispiel bestünde aus zwei orientierten Dreimannigfaltigkeiten mit gleichem Rand und gleicher Fundamentalgruppe, die verschiedene zweite Homotopiemoduln besitzen. Es ist soweit ich weiß ungelöst, ob es solche Beispiele gibt. In [HAMS93] stehen Beispiele von Zweikomplexen mit gleicher Fundamentalgruppe und Eulercharakteristik, aber verschiedenem Homotopietyp; die Fundamentalgruppen sind dabei jedoch endlich-abelsch und sind keine Dreimannigfaltigkeitsgruppen. Ein anderes Beispiel von Zweikomplexen konstruierte Dunwoody; bei diesem ist die Fundamentalgruppe die der Kleeblattschlinge. Leider ist nur einer der beiden Homotopietypen der eines Spines einer Dreimannigfaltigkeit. Vielleicht macht eine Erweiterung von $Y(M;G,B)$ auf Viermannigfaltigkeiten Sinn, da dort die zweite Homotopiegruppe mit Sicherheit wesentlich ist.

Trotz der großen Ähnlichkeit scheint $Y(M;G,B)$ keine $6j$-Invariante zu sein (im Gegensatz zu $Y(M;G)$). Die Dimension eines Multiplizitätsmoduls $H_{g_1}^{g_2 g_3}$ im Sinne von Kapitel 3.1.3 ist nämlich genau die Anzahl der zulässigen Färbungen eines Dreiecks mit Kanten g_1, g_2, g_3, falls $g_1 g_2 g_3 = 1$; diese Anzahl ist in jedem Falle gleich $|B|$, obwohl bei einer halbeinfachen Kategorie stets $H_1^{1\,1}$ eindimensional sein müßte. $Y(M;G,B)$ ist also nicht nur eine Verallgemeinerung der Yetter-Invariante, sondern geht sogar etwas über den Rahmen der „klassischen" $6j$-Invarianten hinaus.

5.2.2 Eine neue Invariante für Dreimannigfaltigkeiten

Das Hauptresultat meiner Arbeit besteht in einer neuen Invariante, die ich nun definieren möchte. Es sei wieder G eine endliche Gruppe; M sei eine *geschlossene* orientierte kompakte Dreimannigfaltigkeit, die zugeordnete triangulierte Pseudomannigfaltigkeit $\mathcal{T}M$ hat also nur eine Ecke und ist als topologischer Raum zu M homöomorph.

Definition 5.15: Der $\mathbb{Z}G$-Modul $G^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ sei über $\mathbb{Z}$ erzeugt durch

$$\{[g_0, g_1, \dots, g_n] |\ g_i \in G \text{ paarweise verschieden}\},$$

wobei folgende Relationen gelten mögen:

1. $[g_0, \dots, g_n] = \operatorname{sgn}(\sigma)[g_{\sigma(0)}, \dots, g_{\sigma(n)}]$, σ Permutation von $n+1$ Elementen.
2. $g \cdot [g_0, \dots, g_n] = [gg_0, \dots, gg_n]$, wodurch die G-Operation auf $G^{(n)}$ erklärt ist.

Ferner sei eine **Randabbildung** $\partial : G^{(n)} \to G^{(n-1)}$ erklärt durch

$$\partial[g_0, \dots, g_n] := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n],$$

wobei $\widehat{g_i}$ das Weglassen von g_i bedeutet.

Offenbar ist ∂ eine G-Abbildung, und die $G^{(n)}$ bilden eine $\mathbb{Z}$-Auflösung durch $\mathbb{Z}G$-Moduln $\underline{\underline{G}} \to \mathbb{Z}$,

$$\cdots \xrightarrow{\partial} G^{(n)} \xrightarrow{\partial} G^{(n-1)} \to \cdots \to G^{(1)} \to G^{(0)} = \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

Die Randabbildung entspricht dem geometrischen Rand eines n-Simplexes.

Definition 5.16: Die **Pseudo-Homologie** von G mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\mathcal{P}_n(G, \mathbb{Z}) := \mathrm{H}_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \underline{\underline{G}}).$$

Man beachte die große Ähnlichkeit zur Standardauflösung, welche zur Berechnung der Homologie von Gruppen verwendet wird. Die $G^{(n)}$ sind im allgemeinen *keine projektiven* Moduln; der Grund liegt in der Vertauschungssymmetrie der $[g_0, \dots, g_n]$. Im allgemeinen ist also $\mathcal{P}_*(G) \ncong \mathrm{H}_*(G)$.

Es sei nun ϕ zulässige Färbung von $\mathcal{T}M$. Mit der Konvention, daß $g_{ij} \in G$ die Farbe der Kante von Punkt P_i nach P_j bezeichnet, ordne ich dem orientierten

Tetraeder $T := P_0P_1P_2P_3$ das Symbol $\kappa(T)_\phi := [1, g_{01}, g_{02}, g_{03}] \in G^{(3)}$ zu. Die Wahl von P_0 legt dieses Element bis auf G-Operation fest: Es ist

$$g_{10} \cdot [1, g_{01}, g_{02}, g_{03}] = [g_{10}, 1, g_{12}, g_{13}].$$

Die Wahl der Reihenfolge der Punkte spielt wegen der Symmetrierelation keine Rolle.

Definition 5.17:

$$\kappa(M)_\phi := \sum_{T \in \mathcal{T}(M)} \kappa(T)_\phi;$$

$$\kappa(M) := (\kappa(M)_\phi)_{\phi \in zul(M)}$$

Satz 5.18: *Für eine geschlossene orientierte Dreimannigfaltigkeit ist $\kappa(M) \subset \mathcal{P}_3(G, \mathbb{Z})$ eine Homöomorphieinvariante.*

Beweis: Zunächst ist $\partial\kappa(M)_\phi = 0$, da $\mathcal{T}M$ geschlossen und orientiert ist und sich daher die Ränder der $\kappa(T)_\phi$ paarweise aufheben. Betrachte nun einen MP-Prozeß; dabei wird ein Doppeltetraeder mit den Ecken $P_0, \ldots, P_4$ vor dem Prozeß in zwei, hinterher in drei Tetraeder zerlegt. Für die Invarianz bzgl. Matveev-Piergallini-Prozessen muß gelten:

$$\begin{aligned}[1, g_{01}, g_{02}, g_{03}] + [g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{04}] = \\ [1, g_{01}, g_{02}, g_{04}] + [1, g_{02}, g_{03}, g_{04}] - [1, g_{01}, g_{03}, g_{04}].\end{aligned}$$

Die Differenz beider Seiten ist jedoch gleich $\partial[1, g_{01}, g_{02}, g_{03}, g_{04}]$, also hängt $\kappa(M)_\phi$ als Element von $\mathcal{P}_3(G, \mathbb{Z})$, also modulo Rändern, nur von ϕ ab. **q.e.d.**

Ein Wechsel der Orientierung von M bedeutet offenbar die Multiplikation von $\kappa(M)$ mit -1.

Hier noch einige Bemerkungen zur geometrischen Interpretation der κ-Invariante: Die Auflösung $\underline{\underline{G}} \to \mathbb{Z}$ entspricht einem hochdimensionalen Simplex mit Ecken G, auf welchem G natürlich operiert; als Faktorraum entsteht ein hochdimensionaler Komplex. Gemäß der G-Färbung wird $\mathcal{T}M$ in das Dreigerüst dieses Komplexes abgebildet und ist bis auf Homotopie festgelegt. κ ist nun die Homologieklasse des Bildes von $\mathcal{T}M$. Man beachte, daß auch ein Sternprozeß bezüglich eines Punktes im Inneren eines Dreisimplexes in diesem Rahmen beschrieben werden kann: Das Simplex vor der Unterteilung und die vier Simplizia nach der Unterteilung bilden den Rand eines Viersimplexes. Auf diese Weise wird die Verwandtschaft des Matveev-Piergallini-Prozesses zu Sternprozessen deutlich; die Aussage, daß zwei Kollabierretrakte einer Mannigfaltigkeit durch eine Kette von MP-Prozessen ineinander übergehen, ist von ähnlichem Kaliber wie die Aussage, daß zwei Triangulierungen einer Dreimannigfaltigkeit durch Sternprozesse an Punkten im Inneren von Dreisimplizia (nicht im Inneren von Kanten wie bei Alexander, vergleiche 2.3.3) ineinander übergehen. Zu der Definition der κ-Invariante wurde ich durch den Artikel [DS82] angeregt, in welchem eine Invariante für hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit einer ähnlichen Konstruktion definiert wird (die sogenannte **Bloch-Invariante**).

Die κ-Invariante und Linsenräume

Für die Linsenräume $L(p,q)$ verwende ich $G = \mathbb{Z}_p =: \langle g \rangle$; daher befasse ich mich zunächst mit der Berechnung von $\mathcal{P}_3(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})$. Ohne Einschränkung sei dabei $p > 4$, da unterhalb davon keine interessanten Linsenräume existieren und zudem $\mathbb{Z}_p^{(4)}$ trivial wäre. Ich möchte die $\mathbb{Z}$-Erzeugenden der $G^{(n)}$ in eine Normalform bringen:

1. Bringe das $(n+1)$-Tupel $[g_0, \dots, g_n]$ durch Vertauschen in zyklische Ordnung, also etwa $[g^3, g^5, 1, g^2]$ statt $[g^5, 1, g^3, g^2]$.

2. Betrachte die Differenzen der Exponenten modulo p und schreibe sie als Tupel auf; $[g^3, g^5, 1, g^2]$ wird also für $p = 9$ zu $(2,4,2,1)$; vertausche die Einträge nun zyklisch, bis der größte an letzter Position auftaucht, hier also $(2,1,2,4)$.

3. Wenn mehrere Einträge maximal sind, stelle den Eintrag ans Ende, auf den der kleinere Eintrag folgt; ist das mehrdeutig, so entscheidet der darauf folgende Eintrag usw. Es ergibt sich also etwa $(2,1,4,2,4)$ anstatt $(2,4,2,1,4)$.

4. Dem Tupel ist nun eindeutig ein normiertes Element von $G^{(n)}$ zugeordnet: Zu $(2,1,2,4)$ gehört $[1, g^2, g^3, g^5]$ in $\mathbb{Z}_9^{(3)}$.

Dieses Verfahren liefert eine eindeutige Normalform. Wenn die Einträge periodisch sind, so operiert G nicht frei: Für $G = \mathbb{Z}_6$ ist zum Beispiel $(1,2,1,2)$ eine periodische Normalform, und $[1, g, g^3, g^4] = g^3[1, g, g^3, g^4] \in G^{(3)}$. Wenn es jedoch keine periodische Normalform gibt, so ist $\mathbb{Z}_p^{(n)}$ ein freier $\mathbb{Z}\mathbb{Z}_p$-Modul mit Erzeugenden $\{(a_0, \dots, a_n) |\ 1 \le a_i, \sum a_i = p,\ (a_0, \dots, a_n) \text{ in Normalform } \}$.

Korollar 5.19: *Wenn p nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar ist, so ist $\mathcal{P}_3(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$.*

Beweis: Ich zeige, daß die Moduln $G^{(0)}$ bis $G^{(4)}$ frei (insbesondere projektiv) sind; nach Sätzen aus der homologischen Algebra folgt dann $\mathcal{P}_3(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_3(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$. Als Normalformen kommen Tupel der Länge 1 bis 5 vor; wenn eine davon periodisch ist, muß die Anzahl der Perioden die Länge des Tupels teilen. Gleichzeitig wird dadurch aber p geteilt, da die Summe der Einträge p ergibt. Nach Voraussetzung ist das unmöglich, es gibt also keine periodische Normalform, und damit sind die $G^{(0)}$ bis $G^{(4)}$ frei. $\square$

Abbildung 5.2 zeigt eine Linse, wobei das Oberteil zum Betrachter hinzeigt; Ober- und Unterseite werden mit Twist verklebt. Das Ergebnis ist der Linsenraum $L(p,1)$ in einer Triangulation mit einer Ecke, die mit g bzw. g^{p-1} markierten Kanten werden zu einer Kante identifiziert; es ist $\mathcal{T}M \approx M \approx L(p,1)$. Der Linsenraum $L(p,q)$ entsteht durch q gestapelte Kopien dieser Linse; jede Linse führt auf einen $\frac{1}{p}$-Twist, also insgesamt einen $\frac{q}{p}$-Twist. Wenn die Farbe einer Kante gegeben ist (hier g), sind die anderen festgelegt, und man erhält

$$\kappa(L(p,q))_g = q \cdot \sum_{i=2}^{p-2} [1, g, g^i, g^{i+1}].$$

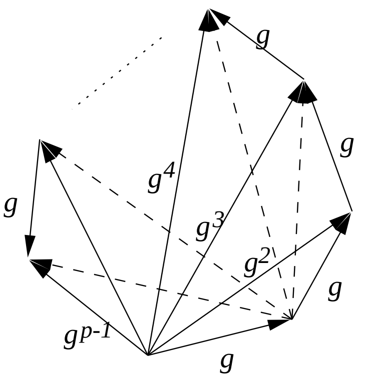


Abbildung 5.2: Eine Linse, von oben betrachtet

Als nächstes muß natürlich dieser Ausdruck als Element in $\mathcal{P}_3(\mathbb{Z}_p)$ interpretiert werden und g alle Elemente von $\mathbb{Z}_p$ durchlaufen. Ich möchte die Beispiele $p = 5$ und $p = 7$ vorrechnen.

p=5: $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} G^{(3)}$ und $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} G^{(4)}$ werden jeweils von einem Element erzeugt, nämlich

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} G^{(3)} &= \langle(1,1,1,2)\rangle = \mathbb{Z}\\ \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} G^{(4)} &= \langle(1,1,1,1,1)\rangle = \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\partial(1,1,1,2) &= (1,1,3) - (2,1,2) + (1,2,2) - (1,1,3) = 0 \quad \text{und}\\ \partial(1,1,1,1,1) &= (1,1,1,2) - (2,1,1,1) + (1,2,1,1) - (1,1,2,1) + (1,1,1,2)\\ &= 5 \cdot (1,1,1,2),\end{aligned}$$

nachdem die Tupel in Normalform gebracht wurden und dabei zum Teil Vorzeichen wechselten, also ist

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}) = \langle(1,1,1,2)\rangle = \mathbb{Z}_5.$$

Beim Ersetzen von g durch g^i $(i = 2, \ldots, 4)$ wird aus $(1,1,1,2) = [1, g, g^2, g^3]$ jeweils

$$\begin{aligned}[1, g^2, g^4, g] &= -(1,1,1,2),\\ [1, g^3, g, g^4] &= -(1,1,1,2) \quad \text{und}\\ [1, g^4, g^3, g^2] &= (1,1,1,2).\end{aligned}$$

$\kappa(L(5,1))_g = [1, g, g^2, g^3] + [1, g, g^3, g^4] = 2 \cdot (1,1,1,2)$. Man erhält als Ergebnis die Tupel

$$\begin{aligned}\kappa(L(5,1)) = \{0,2,3,3,2\} &= \{0,3,2,2,3\} = \kappa(L(5,4))\\ \kappa(L(5,2)) = \{0,4,1,1,4\} &= \{0,1,4,4,1\} = \kappa(L(5,3)),\end{aligned}$$

wobei die 0 von der trivialen Färbung stammt $(g = 1)$.

p=7: Wir wissen schon, daß $\mathcal{P}_3(\mathbb{Z}_7) \cong \mathbb{Z}_7$ ist; eine detaillierte Berechnung ist dennoch nötig. $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} G^{(4)}$ wird von $(1,1,1,1,3)$, $(1,1,1,2,2)$ und $(1,1,2,1,2)$ frei über $\mathbb{Z}$ erzeugt, ebenso $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} G^{(3)}$ von $(1,1,1,4)$, $(1,1,2,3)$, $(1,2,1,3)$, $(2,1,1,3)$ und $(1,2,2,2)$.

$$\begin{aligned}
\partial(1,1,1,4) &= (1,1,5)-(2,1,4)+(1,2,4)-(1,1,5) = (1,2,4)-(2,1,4)\\
\partial(1,1,2,3) &= (1,2,4)-(2,2,3)+(1,3,3)-(1,1,5)\\
\partial(1,2,1,3) &= (2,1,4)-(1,3,3)+(1,3,3)-(1,2,4) = (2,1,4)-(1,2,4)\\
\partial(2,1,1,3) &= (1,1,5)-(1,3,3)+(2,2,3)-(2,1,4)\\
\partial(1,2,2,2) &= (2,2,3)-(2,2,3)+(2,1,4)-(1,2,4) = (2,1,4)-(1,2,4),
\end{aligned}$$

$\ker\partial$ wird also von den sechs möglichen Differenzen von $(1,1,1,4)$, $-(1,2,1,3)$, $-(1,2,2,2)$ und $(1,1,2,3)+(2,1,1,3)$ erzeugt.

$$\begin{aligned}
\partial(1,1,1,1,3) &= (1,1,1,4)-(2,1,1,3)+(1,2,1,3)-(1,1,2,3)+(1,1,1,4)\\
\partial(1,1,1,2,2) &= (1,1,2,3)+(1,2,2,2)+(1,2,2,2)+(2,1,1,3)+(1,1,1,4)\\
\partial(1,1,2,1,2) &= (1,2,1,3)-(1,2,2,2)+(1,2,1,3)+(2,1,1,3)+(1,1,2,3)
\end{aligned}$$

Ich wähle als Erzeugendes für $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_7,\mathbb{Z})$ $t := (1,1,1,4)+(1,2,1,3)$; aus den drei obigen Gleichungen ergibt sich $(1,1,1,4)+(1,2,2,2) = 3t$ und $(1,2,1,3)-(1,2,2,2) = 5t$. Beim Ersetzen von g durch g-Potenzen wird aus $(1,1,1,4)$ jeweils

$$\begin{aligned}
&[1,g^2,g^4,g^6] = -(1,2,2,2), && [1,g^3,g^6,g^2] = -(1,2,1,3),\\
&[1,g^4,g,g^5] = -(1,2,1,3), && [1,g^5,g^3,g] = -(1,2,2,2) \quad \text{und}\\
&[1,g^6,g^5,g^4] = (1,1,1,4),
\end{aligned}$$

und aus $(1,2,1,3)$ jeweils

$$\begin{aligned}
&[1,g^2,g^6,g] = -(1,1,1,4), && [1,g^3,g^2,g^5] = (1,2,2,2),\\
&[1,g^4,g^5,g^2] = (1,2,2,2), && [1,g^5,g,g^6] = -(1,1,1,4) \quad \text{und}\\
&[1,g^6,g^4,g^3] = (1,2,1,3).
\end{aligned}$$

t geht also jeweils über in $4t$, $2t$, $2t$, $4t$ und t.

$\kappa(L(7,1))_g = 2\cdot((1,1,1,4)+(1,2,1,3)) = 2t$, wie man leicht nachprüft; das Endergebnis ist:

$$\begin{aligned}
\kappa(L(7,1)) &= (0,2,1,4,4,1,2)\\
\kappa(L(7,2)) &= (0,4,2,1,1,2,4)
\end{aligned}$$

κ kann die Linsenräume $L(7,q)$ also nicht klassifizieren.

Fazit: Meine Invariante kann manche, aber nicht alle Linsenräume unterscheiden, insbesondere nicht die beiden homotopieäquivalenten Räume $L(7,1)$ und $L(7,2)$; ob die κ-Invariante generell nicht mehr als Homotopieäquivalenz mißt, muß hier offen bleiben, denn die Beantwortung dieser und anderer Fragen würde den Rahmen einer Diplomarbeit sprengen.

Literaturverzeichnis

[Ale24] James W. Alexander. On the subdivision of a 3-space by a polyhedron. *Proc. of Nat. Acad. of Sci.*, 10:6–8, 1924.

[BP95] Ricardo Benedetti und Carlo Petronio. A finite graphic calculus for 3-manifolds. *manuscripta mathematica*, (88):291–310, 1995.

[Cas65] B. G. Casler. An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16:559–566, 1965.

[DS82] James L. Dupont und Chih-Han Sah. Scissors congruences II. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 25:159–195, 1982.

[FR79] Roger Fenn und Colin Rourke. On kirby's calculus of links. *Topology*, 18:1–15, 1979.

[HAMS93] Cynthia Hog-Angeloni, Wolfgang Metzler und Allan J. Sieradski, Hrsg. *Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series 197. Cambridge University Press, 1993.

[Hem92] Geoffrey Hemion. *The Classification of Knots and 3-Dimensional Spaces.* Oxford University Press, 1992.

[Jac80] William Jaco. *Lectures on three-manifold topology.* Regional conference series in mathematics 43. amarican mathematical society, 1980.

[Kas95] Christian Kassel. *Quantum Groups.* Graduate Texts in Mathematics 155. Springer-Verlag, 1995.

[LL79] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Quantenmechanik.* Lehrbuch der theoretischen Physik III. Akademie-Verlag Berlin, 1979.

[Mat] Sergei V. Matveev. On the recognition problem for Haken 3-manifolds. Preprint 1997.

[Mat88] Sergei V. Matveev. Transformations of special spines and the Zeeman conjecture. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 31(2):423–434, 1988.

[MN94] Sergei V. Matveev und Tahl Nowik. On 3-manifolds having the same Turaev-Viro invariants. *Russian journal of mathematical physics*, 2(3):317–324, 1994.

[MS] Sergei V. Matveev und Maxim V. Sokolov. On a simple invariant of Turaev-Viro type.

[MV94] G. Masbaum und P. Vogel. 3-valent graphs and the Kauffman bracket. *Pacific journal of mathematics*, 164(2), 1994.

[Neu68] L. Neuwirth. An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 64:603–613, 1968.

[Pac78] Udo Pachner. Bistellare Äquivalenz kombinatorischer Mannigfaltigkeiten. *Archiv der Mathematik*, 30:89–91, 1978.

[Pet95] Carlo Petronio. Standard spines and 3-manifolds, Dissertation 1995.

[Pie88] R. Piergallini. Standard moves for standard polyhedra and spines. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 37(18):391–414, 1988.

[Thu] William Thurston. Lecture notes.

[Tur94] Vladimir G. Turaev. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds.* De Gruyter studies in mathematics 18. Walter de Gruyter, 1994.

[TV92] V. G. Turaev und O. Y. Viro. State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$-symbols. *Topology*, 31(4):865–902, 1992.

[Wal68] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Annals of Mathematics*, 87:56–88, 1968.

[Yet92] David N. Yetter. Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G-sets. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 1(1):1–20, 1992.

[Yet94] David N. Yetter. State-sum invariants of 3-manifolds associated to artinian semisimple tortile categories. *Topology and its Applications*, (58):47–80, 1994.

Index