Euklids Elemente – Buch I

Definitionen

1. Punkt ist, was ohne Teil ist.
2. Linie ist Länge ohne Breite.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Strecke ist eine Linie, die gleichmäßig zu den Punkten auf ihr liegt.
5. Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Ebene ist eine Fläche, die gleichmäßig zu den Strecken auf ihr liegt.
8. Ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene, die sich treffen und nicht gerade fortsetzen.
9. Sind die Linien Geraden, heißt der Winkel geradlinig.
10. Bildet eine Gerade, auf eine andere Gerade gestellt, gleiche Nebenwinkel, so sind die beiden gleichen Winkel Rechte. Die Gerade heißt senkrecht zu der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, der größer als ein Rechter ist.
12. Spitz ist ein Winkel, der kleiner als ein Rechter ist.
13. Grenze ist das, worin etwas endet.
14. Figur ist, was von Grenzen umfasst wird.
15. Kreis ist eine ebene Figur, von einer Linie umfasst, so da alle Strecken, die von einem Punkt im Inneren bis zur Linie laufen, einander gleich sind.
16. Mittelpunkt des Kreises heißt ebenjener Punkt.
17. Durchmesser des Kreises ist jede Strecke, die durch den Mittelpunkt geht und auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzt ist; eine solche Strecke halbiert den Kreis.
18. Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur. Der Mittelpunkt des Halbkreises ist gleich mit dem Mittelpunkt des Kreises.
19. Geradlinige Figuren sind von Strecken umfasste Figuren: dreiseitige Figuren bei 3 Strecken, vierseitige Figuren bei 4 Strecken, vielseitige Figuren bei mehr umfassenden Strecken.
20. Unter den dreiseitigen Figuren hat das gleichseitige Dreieck drei gleiche Seiten, das gleichschenklige Dreieck nur zwei gleiche Seiten, das ungleichseitige Dreieck drei verschiedene Seiten.
21. Unter den dreiseitigen Figuren gibt es auch das rechtwinklige Dreieck, das einen rechten Winkel hat, das stumpfwinklige Dreieck mit einem stumpfen Winkel und das spitzwinklige Dreieck, das 3 spitze Winkel hat.
22. Unter den vierseitigen Figuren ist das Quadrat sowohl gleichseitig als rechtwinklig; ein Rechteck ist rechtwinklig, aber nicht gleichseitig; ein Rhombus ist gleichseitig, aber nicht rechtwinklig; ein Rhomboid hat gleiche Gegenseiten und Gegenwinkel, ohne rechtwinklig oder gleichseitig zu sein; die anderen Vierseite heißen Trapeze.
23. Parallelen sind Geraden, die in derselben Ebene liegen und sich auch bei Verlangerung nach beiden Seiten ins Unendliche nicht treffen.

Postulate

1. Von jedem Punkt zu jedem anderen kann man die Strecke ziehen.
2. Jede Strecke kann man zu einer Geraden verlängern.
3. Zu Mittelpunkt und Radius (Abstand) kann man den Kreis zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind gleich.
5. [Das bis zu Beginn des 19. Jh. umstrittene, fundamentale Parallelenaxiom]

   Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann werden sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Allgemeingültige Aussagen

1. Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
2. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
3. Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, so bleibt Gleiches übrig.
4. Was sich deckt, ist gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.

Propositionen (Auszug, leicht bearbeitet)

1. *Konstruiere auf einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck.*

   Sei AB die gegebene Strecke. Beschreibe einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius AB (Post. 3); beschreibe weiter einen Kreis mit Mittelpunkt B und Radius BA (Post. 3). Von dem Punkt C, in dem die Kreise sich schneiden, ziehe die Strecken CA und CB (Post. 1).

   Da A der Mittelpunkt des ersten Kreises ist, ist AC gleich AB (Def. 15). Weiter ist B der Mittelpunkt des zweiten Kreises und somit BC gleich BA (Def. 15).

   Auch ist CA gleich CA, da beide gleich AB sind (A. A. 1). Somit ist ABC ein gleichseitiges Dreieck über der Strecke AB.

4. *Wenn zwei Dreiecke je zwei gleiche Seiten und den gleichen eingeschlossenen Winkel haben, so werden auch die restlichen Seiten und Winkel gleich sein.*

   Seien ABC, DEF die zwei Dreiecke mit den gleichen Seiten AB und DE, bzw. AC und DF und den gleichen Winkels BAC und EDF.

   Wenden wir nun das Dreieck ABC auf das Dreieck DEF an, und wird der Punkt A auf D sowie die Strecke AB auf DE abgebildet, so deckt sich der Punkt B mit E, weil AB gleich DE ist.

   Weiter wird sich die Strecke AC mit DF decken, da der Winkel BAC gleich EDF ist. Also wird sich auch der Punkt C mit F decken, weil AC gleich DF ist.

   Aber B deckt sich mit E, womit sich auch BC mit EF deckt. (Denn, falls sich B mit E und C mit F deckt, aber BC sich nicht mit EF deckt, werden zwei Strecken eine Fläche einschließen, was unmöglich ist.) Somit ist BC gleich EF (A. A. 4).

   Also deckt sich das ganze Dreieck ABC mit dem ganzen Dreieck DEF und ist gleich diesem, also sind auch die restlichen Winkel gleich.

Hilberts Axiome

Inzidenz – Gruppe I

I.1 Zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q bestimmen stets eine Gerade g.

I.2 Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I.3 Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.

I.4 Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte P, Q, R bestimmen stets eine Ebene.

I.5 Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene.

I.6 Wenn zwei Punkte P und Q einer Geraden g in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von g in α.

I.7 Wenn zwei Ebenen α und β einen Punkt P gemeinsam haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt Q gemeinsam.

I.8 Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Anordnung – Gruppe II

II.1 Wenn B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.

II.2 Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.

II.3 Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

II.5 (Axiom von Pasch) Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen dieser drei Punkte trifft; wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

Kongruenz – Gruppe III

III.1 Wenn A und B zwei Punkte auf einer Geraden a sind und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent (oder gleich) ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$.

III.2 Wenn eine Strecke zu zwei anderen Strecken kongruent ist, so sind diese auch zueinander kongruent; formaler: wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist $A'B' \equiv A''B''$.

III.3 Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

III.4 Es sei ein Winkel $\angle(h, g)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a'; dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl g', so dass der Winkel $\angle(h, g)$ kongruent (oder gleich) dem Winkel $\angle(h', g')$ ist und zugleich all inneren Punkte des Winkels $\angle(h', g')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen. In Zeichen: $\angle(h, g) \equiv \angle(h', g')$.

III.5 Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ und $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ gelten, so sind auch stets die Kongruenzen $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ und $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ erfüllt.

Parallelen – Gruppe IV

IV.1 (Euklidisches Axiom.) Es sei g eine beliebige Gerade und P ein Punkt außerhalb von g. Dann gibt es in der durch g und P bestimmten Ebene höchstens eine Gerade g', die durch P verläuft und g nicht schneidet.

Stetigkeit – Gruppe V

V.1 (Archimedisches Axiom) Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, dass das n-malige Hintereinanderabtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.

V.2 (Axiom der Vollständigkeit) Zu den Punkten einer Geraden können, bei Erhalt ihrer Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen, keine weiteren Punkte hinzugefügt werden, ohne dass die unter den vorherigen Elementen bestehenden Beziehungen, die aus den Axiomen I–III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnung und Kongruenz oder aber das Axiom V.1 verletzt wird.

redundantes Axiom

II.4 (Paschs Theorem) Je vier Punkte A, B, C und D auf einer Geraden lassen sich so anordnen, dass B zwischen A und C, sowie zwischen A und D liegt, und dass weiter auch C zwischen A und D, sowie zwischen B und D liegt.

2D-Geometrie

Für eine zweidimensionale Geometrie muss das Axiomsystem nur geringfügig geändert werden. Es gibt nur eine Ebene, die daher nicht explizit erwähnt werden muss (wie der eine Raum im dreidimensionalen Fall). I.3 wird entsprechend angepasst. I.4–I.8 werden ersatzlos gestrichen. In II.5, III.4 und IV.1 werden alle Bestimmungen von Ebenen gestrichen, da es ja nur eine gibt. Alle anderen Axiome werden unverändert übernommen.