Schülerakademie Mathematik Sommer 1996 in Geraberg

Wie jedes Jahr in den Oster- und Sommerferien veranstaltete der Wurzel e.V. auch in diesem Juli die Schülerakademie Mathematik. Diesmal waren 35 Schüler und 6 Betreuer nebst einigen Gästen für 10 Tage im Schullandheim in Geraberg (bei Ilmenau/Thüringen).

Wir veröffentlichen in dieser $\sqrt{\text{WURZEL}}$ zu jedem Unterrichtsthema die entsprechende Aufgabe der SAM-Olympiade. (Es versteht sich, daß nicht alle Aufgaben Originale sind. Pro Aufgabe war eine Stunde Arbeitszeit vorgesehen.)

Während der Unterricht nach Altersgruppen getrennt war, gab es nach guter Tradition zusätzlich einen mathematischen Vortrag für alle Schüler. Herr Dr. Klaus Haberland (Universität Jena) sprach über den Satz von Fermat:

> Alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$
> sind für $n > 2$ trivial.

Von Fermat selbst ist kein Beweis überliefert, und auch viele Mathematiker nach ihm haben das Problem nicht lösen können. Das gelang erst in jüngster Zeit. Der Vortrag zeigte, wie weit man mit „elementaren“ Methoden in der algebraischen Zahlentheorie kommt.

Außer Mathematik gab es wie immer Wandern, Baden, Sport, Spiele und Musik.

Wir danken den Jugendämtern Jena und Gera, dem Land Thüringen, und der Jenoptik AG für finanzielle Unterstützung.

Lager-Olympiade

Klasse 8

Zahlentheorie. Auf welche Ziffer endet

$$17^{14} + 13^{17} - 29^{18}?$$

p_1 und p_2 heißen *Primzahlzwilling*, falls p_1 und p_2 Primzahlen mit $p_2 = p_1+2$ sind. Beweise, daß für solche Paare mit $p_1 > 3$ immer $12 \mid (p_1 + p_2)$ gilt!

Logik/Mengenlehre. Man vereinfache

$$(\neg A_1 \vee A_2) \wedge (A_2 \vee A_3) \wedge A_3$$

soweit wie möglich!

$[a, b]$ bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$. Sei ferner $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Man berechne $|\mathfrak{P}(\mathbb{N} \cap [4, 10] \setminus \mathbb{P})|$.

Geometrie. In einem Dreieck ABC sind D, E, F die Mittelpunkt der Seiten AB, BC, CA (in dieser Reihenfolge), und M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Zeige

$$|DBM| + |ECM| + |FAM| = |ABC|/2,$$

wobei $|XYZ|$ den Flächeninhalt des Dreiecks XYZ bezeichnet.

In einem Dreieck ABC ist W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, und D, E, F die Fußpunkte der Lote von W auf AB, BC, CA (in dieser Reihenfolge). Zeige

$$|DBW| + |ECW| + |FAW| = |ABC|/2.$$

Graphentheorie. Untersuche, ob man mit einem Springer alle $7 \times 7 = 49$ Felder eines Schachbrettes durchlaufen kann, so daß auf jedes Feld genau einmal gesetzt wird und der letzte Zug auf einem dem Ausgangsfeld benachbarten Feld endet.

Ist es möglich, eine Rundreise des Springers so zu finden, daß jedes Feld genau einmal berührt wird und der Springer auf das Ausgangsfeld zurückkehrt?

Klasse 9

Unendlichkeit. Beweise indirekt, daß die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen nicht abzählbar ist!

Dreiecke. Zu konstruieren ist ein Dreieck, in dem die Länge der Seite c, die Länge der Höhe h_a und die der Seitenhalbierenden s_a gegeben ist. Beschreibe die Konstruktion allgemein! Wann ist sie eindeutig ausführbar? Konstruiere das Dreieck für $c = 5$ cm, $h_a = 2.5$ cm, $s_a = 3$ cm!

Induktion. Wieviele Flächen können maximal durch n Kreise entstehen?

Wie groß ist die Summe der ersten n natürlichen Zahlen?

Zahlentheorie. In einem Mathelager spielen alle 40 Teilnehmer gegeneinander Tischtennis (jeder gegen jeden). Kann man nun alle Teilnehmer so hintereinander aufstellen, daß jeder gegen den Vordermann gewonnen und gegen den Hintermann verloren hat?

Klasse 10

Kegelschnitte. Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbachsen a, b, den Brennpunkten F_1, F_2 und ein beliebiger Punkt $P_1(x_1, y_1)$ auf der Kurve.

Der Punkt H liege auf der Verlängerung von F_1P_1 über P_1 hinaus. Beweise: Dann ist die Winkelhalbierende des Winkels F_2P_1H gleich der Tangente an die Ellipse im Punkt P_1.

Mittel. Wie ist das Mittel n-ten Grades definiert?

Wie lauten die Ungleichungen von Bernoulli?

Man beweise:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3,$$

falls $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ und $x > 0, y > 0, z > 0$. Wann gilt $x^3 + y^3 + z^3 = 3$?

Zahlentheorie. Man zerlege die Gaußsche Zahl $4 + 2i$ in Gaußsche Primzahlen. Wieviele verschiedene Zerlegungen gibt es?

Ist 12600 als Summe zweier Quadrate darstellbar?

Term-Ersetzungs-Systeme. Wir betrachten das System mit dem Alphabet $\Sigma = \{T, \cdot\}$, den Stelligkeiten $s(T) = 0, s(\cdot) = 2$ und der Regelmenge $R = \{(T \cdot x) \cdot y \to x \cdot (y \cdot T)\}$. Weiter bezeichne $k(t)$ die Anzahl der $\cdot$ in einem Term t.

Beschreibe die Menge der Normalformen.

Wenn t' Normalform von t ist, vergleiche $k(t')$ und $k(t)$.

Beweise: Wenn t_1 und t_2 Normalformen sind, dann benötigt $t_1 \cdot t_2$ genau $\left(2^{k(t_1)} - 1\right) 2^{k(t_2)}$ Schritte bis zur Normalform.

Klasse 11/12

Hyperbolische Geometrie. Man beweise, daß alle Horozyklen kongruent sind.

Analysis. Berechne die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$\left(\frac{n^4 - n^2 + 2}{n^4 + n^2 + 2}\right)^{\frac{2n^4+3}{3n+2}}, \quad \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}, \quad \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$$

Beweise folgende verallgemeinerte Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischen Mittel mittels der Ungleichung von Jensen

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta_1, \ldots, \theta_n > 0, \sum_1^n \theta_i = 1, \forall a_1, \ldots, a_n > 0$$
$$a_1^{\theta_1} \cdot a_2^{\theta_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\theta_n} \leq \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \ldots + \theta_n a_n$$

Graphentheorie. Man zeige, daß in jedem k-zusammenhängenden ($k \geq 2$) Graphen $G = (V, E)$ zu jeder k-elementigen Knotenmenge V' ein Kreis in G existiert, der alle Knoten aus V' enthält.

Knoten und Zöpfe. Durch den Zopf $\sigma = \sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_3^{-2}\sigma_2^3\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$, mit $\sigma \in B^4$, ist eine Verschlingung $L(\sigma)$ definiert.

Zeichne ein minimales Diagramm dieser Verschlingung!

Sind die Komponenten dieser Verschlingung Primknoten?

Sind die Komponenten 3-färbbar? Wenn ja, eine Färbung angeben.

Wie groß sind die Entknotungszahlen der einzelnen Komponenten der Verschlingung?

Johannes Waldmann, Jena