Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $B = (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $B = (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$,

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $B = (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*,* $w \in V$*.*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* *Koordinaten* *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *so dass*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = w.$$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* Koordinaten *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* *Koordinaten* *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i,

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$,

$C_B(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$,
$C_B(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$,

$C_B(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* Koordinaten *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Def 26 - Vortsetzung Die Abbildung $C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt die Koordinatenabbildung.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis?

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis?

Antwort:

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, weil

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bsp. Man betrachte die Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis?

Antwort: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$,

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor.

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix},$$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix},$$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = u$.

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = u$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}$$

Wie findet man die Koordinaten eines Vektors in einem Basis (z.B. in $\mathbb{R}^n$)?

Z.B. nach Definition:
Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, u sei ein Vektor. Alle Vektoren $v_1, ..., v_n$, u seien explizit gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, ..., v_n := \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

wobei alle v_i^j explizit gegebene Zahlen sind.
Nach definition sind die Koordinaten des Vektors u die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ so dass $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = u$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

und das ist das System

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

und das ist das System

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_2^1 + \dots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \lambda_2 v_2^n + \dots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{cases}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

und das ist das System

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_2^1 + \dots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \lambda_2 v_2^n + \dots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{cases}$$

von n Gleichungen auf Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

und das ist das System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_2^1 + \ldots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \lambda_2 v_2^n + \ldots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{array} \right.$$

von n Gleichungen auf Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (Die v_i^j und u^j sind gegeben.)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

und das ist das System

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_2^1 + \dots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \lambda_2 v_2^n + \dots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{cases}$$

von n Gleichungen auf Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (Die v_i^j und u^j sind gegeben.) Die Lösung existiert, ist eindeutig (Satz 25)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix},$$

und das ist das System

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 v_1^1 + \lambda_2 v_2^1 + \ldots + \lambda_n v_n^1 & = & u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2 & = & u^2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1 v_1^n + \lambda_2 v_2^n + \ldots + \lambda_n v_n^n & = & u^n \end{array} \right.$$

von n Gleichungen auf Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (Die v_i^j und u^j sind gegeben.) Die Lösung existiert, ist eindeutig (Satz 25) und ist die Koordinten vom Vektor u in der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

Aufgabe:

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} +$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach addieren von Vektoren bekommen wir

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach addieren von Vektoren bekommen wir

$$\left(\begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach addieren von Vektoren bekommen wir

$$\left(\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ \end{array} \right.$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach addieren von Vektoren bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach addieren von Vektoren bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so dass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach addieren von Vektoren bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ & & \\ & & \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{lcr} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 \\ & & \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 \end{array} \right. \qquad Eq_1$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & \qquad Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} Eq_1 \\ Eq_2 \\ Eq_3 \end{array}$$

Wir lösen das System.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} Eq_1 \\ Eq_2 - Eq_1 \\ Eq_3 - 2Eq_1 \end{array}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{array} \right.$$

Wir lösen das System.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & \qquad Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$.
Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{array} \right.$$

Wir lösen das System.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & \qquad Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & \qquad Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & \qquad Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2-3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2-Eq_1 \\ \lambda_2-\lambda_3 & = & -2 & & Eq_3-2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{array} \right.$$

Wir lösen das System.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ in der ersten Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ in der ersten Gleichung bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{cases}$$

Wir lösen das System.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{cases}$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ in der ersten Gleichung bekommen wir $\lambda_1 - 1 + 2 = 2$,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & & Eq_3 \end{array} \right.$$

Wir lösen das System.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & & Eq_3 - 2Eq_1 \end{array} \right.$$

Die letzte Gleichungen minus die vorletzte gibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ in der letzte Gleichung bekommen wir $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$. Nach einsetzen $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ in der ersten Gleichung bekommen wir $\lambda_1 - 1 + 2 = 2$, also $\lambda_1 = 1$.

Antwort:

Antwort: Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Antwort: Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Antwort: Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lineare Abbildung

Lineare Abbildung

Definition 27

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume.*

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume.*
Eine Abbildung

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume.*
Eine Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume.*
Eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear,*

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren*

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume.*
Eine Abbildung $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt* *linear*, *falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt* *linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:*

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:*

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$,

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:*

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$,
  (d.h., $f : V_1 \to V_2$ *ein Gruppenhomomorphismus ist)*

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt* *linear*, *falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:*

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$,
  (d.h., $f : V_1 \to V_2$ *ein Gruppenhomomorphismus ist)*
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Lineare Abbildung

Definition 27 *Es seien* $(V_1, +, \bullet)$ *und* $(V_2, +, \bullet)$ *zwei* $\mathbb{K}-$*Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:*

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$,
  (d.h., $f : V_1 \to V_2$ *ein Gruppenhomomorphismus ist)*
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Bsp.

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear,

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right)$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right)$$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, weil $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$
$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right),$

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

Bsp: Siehe Hausaufgabe 4, Blatt 7.

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum,

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) =$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) =$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 =$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) =$$

Bsp. Sei $(V,+,\bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha\in\mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f:V\to V$, $f(x):=\alpha\bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1+v_2)=\alpha(v_1+v_2)=\alpha v_1+\alpha v_1=f(v_1)+f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1)=\alpha(\lambda v_1)=$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 =$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f: V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 =$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) =$$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp.

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine Lineare Abbildung?

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine Lineare Abbildung?
Ja!

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine Lineare Abbildung?
Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$,

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine Lineare Abbildung?
Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, Weil $f(\lambda v_1) = \vec{0} =$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine Lineare Abbildung?
Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, Weil $f(\lambda v_1) = \vec{0} = \lambda\vec{0} =$

Bsp. Sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(x) := \alpha \bullet v$ linear.
Tatsächlich,

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_1 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$ eine Lineare Abbildung?
Ja! Weil $f(v_1) + f(v_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, Weil $f(\lambda v_1) = \vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda f(v_1)$.

Lemma 18

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$.*

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis.

Lemma 18 $B := (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis in* $(V, +, \bullet)$*. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V$,

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$;

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow}$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow}$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$.

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w =$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i +$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *linear.*

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i.$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i.$$

Also, $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$.

λu

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i.$$

Also, $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$.

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

Lemma 18 *$B := (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Dann ist die Koordinatenabbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ linear.}$$

Beweis. Z.z.:$\forall u, w \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt
(i) $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$; (ii) gilt $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$

Der Vektor u hat Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Der Vektor w hat Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{Def.26}}{\Leftrightarrow} w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. Dann $u + w$ und λu sind

$$u + w = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i.$$

Also, $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$.

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i v_i.$$

Also, $C_B(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet C_B(u)$. $\square$

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$,

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u + v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an,

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u + v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u + v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f$

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\})$

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.
(a) $\Longleftarrow$ Satz 7 (a)

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.
(a) $\Longleftarrow$ Satz 7 (a)
(b) $\Longleftarrow$ Satz 7 (b)

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.
(a) $\Longleftarrow$ Satz 7 (a)
(b) $\Longleftarrow$ Satz 7 (b)
(c) $\Longleftarrow$ Satz 9

Aus Def. 27 Ist $f : V \to W$ linear, so ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, also $f : V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wenden die Sätze aus dem Abschnitt Gruppentheorie an, und bekommen:

Lemma 19 *$f : V \to U$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$*

(c) $Kern_f := Urbild_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\} \iff f$ *injektiv.*

Beweis.
(a) $\Longleftarrow$ Satz 7 (a)
(b) $\Longleftarrow$ Satz 7 (b)
(c) $\Longleftarrow$ Satz 9

Lemma 20

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung.*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume.*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V')$

Lemma 20 *Sei* $f : V \to U$ *eine lineare Abbildung.* $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ *Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$\mathrm{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$\mathrm{Urbild}_f(U') :=$*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von U.*
- $\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von U.*
- $\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von V.*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von U.*
- $\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5:

Lemma 20 *Sei* $f : V \to U$ *eine lineare Abbildung.* $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ *Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5:

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus.*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen.*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$*

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$\mathrm{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$\mathrm{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $\mathrm{Bild}_\phi(G')$ und $\mathrm{Urbild}_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Lemma 20 *Sei* $f : V \to U$ *eine lineare Abbildung.* $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ *Untervectorräume. Dann gilt:*

- $\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Seien* $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ *Untergruppen. Dann sind* $\mathit{Bild}_\phi(G')$ *und* $\mathit{Urbild}_\phi(H')$ *Untergruppen von jeweils* H *und* G.

Beweis:

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition:

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$,

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U,+)$ bzw. $(V,+)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$,

Lemma 20 *Sei $f: V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von U.*
- $\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi: G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $\mathit{Bild}_\phi(G')$ und $\mathit{Urbild}_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $\mathit{Bild}_f(V')$ und $\mathit{Urbild}_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $\mathit{Bild}_f(V')$ und $\mathit{Urbild}_f(U')$ Untergruppen von $(U,+)$ bzw. $(V,+)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in \mathit{Bild}_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$.

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $\mathit{Bild}_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von U.*
- $\mathit{Urbild}_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $\mathit{Bild}_\phi(G')$ und $\mathit{Urbild}_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $\mathit{Bild}_f(V')$ und $\mathit{Urbild}_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\stackrel{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $\mathit{Bild}_f(V')$ und $\mathit{Urbild}_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in \mathit{Bild}_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist

λu

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist

$\lambda u = \lambda f(v)$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\stackrel{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(\ \lambda v$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\stackrel{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'})$

Lemma 20 *Sei* $f : V \to U$ *eine lineare Abbildung.* $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ *Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Seien* $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ *Untergruppen. Dann sind* $Bild_\phi(G')$ *und* $Urbild_\phi(H')$ *Untergruppen von jeweils* H *und* G.

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$,

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$, d.h., $f(v) \in U'$.

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$, d.h., $f(v) \in U'$. Dann ist
$f(\lambda v)$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- *$Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ist ein Untervektorraum von U.*
- *$Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\stackrel{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U,+)$ bzw. $(V,+)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$, d.h., $f(v) \in U'$. Dann ist
$f(\lambda v) \stackrel{\text{Linearität}}{=}$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist
$\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$, d.h., $f(v) \in U'$. Dann ist
$f(\lambda v) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda \underbrace{f(v)}_{\in U'} \in U'$.

Lemma 20 *Sei* $f: V \to U$ *eine lineare Abbildung.* $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ *Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von* U.
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von* V.

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Seien* $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ *Untergruppen. Dann sind* $Bild_\phi(G')$ *und* $Urbild_\phi(H')$ *Untergruppen von jeweils* H *und* G.

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\overset{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist $\lambda u = \lambda f(v) \overset{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$, d.h., $f(v) \in U'$. Dann ist $f(\lambda v) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda \underbrace{f(v)}_{\in U'} \in U'$. $\square$

Lemma 20 *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. $V' \subseteq V$, $U' \subseteq U$ Untervectorräume. Dann gilt:*

- $Bild_f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ *ist ein Untervektorraum von U.*
- $Urbild_f(U') := \{v \in V \mid f(v) \in U'\}$ *ist ein Untervektorraum von V.*

Vergleichen Sie: Satz 8, Vorlesung 5: *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann sind $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Beweis: Z.z.: $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Addition: $\stackrel{\text{Satz 8}}{\Longleftarrow}$, weil $Bild_f(V')$ und $Urbild_f(U')$ Untergruppen von $(U, +)$ bzw. $(V, +)$ sind, und deswegen abgeschlossen bzgl. $+$ sind.

(ii) Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{K}$.

Sei $u \in Bild_f(V')$, d.h., $\exists v \in V'$ mit $f(v) = u$. Dann ist $\lambda u = \lambda f(v) \stackrel{\text{Linearität}}{=} f(\underbrace{\lambda v}_{\in V'}) \in Bild_f(V')$.

Ähnlich, sei $v \in Urbild_f(U')$, d.h., $f(v) \in U'$. Dann ist $f(\lambda v) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda \underbrace{f(v)}_{\in U'} \in U'$. $\square$

Lemma 21

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen.

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen.

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen.
Dann ist $g \circ f : V \to W$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten:

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$g \circ f(v + u)$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=}$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \overset{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u))$$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \overset{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \overset{\text{Linearität von } g}{=}$$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \overset{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \overset{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u))$$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \stackrel{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \stackrel{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \stackrel{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u)) \stackrel{\text{Definition}}{=} g \circ f(v) + g \circ f(u)$$

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \overset{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \overset{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u)) \overset{\text{Definition}}{=} g \circ f(v) + g \circ f(u)$$

Ähnlich mit λv.

Lemma 21 Seien $f : V \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

In Worten: *Die Verkettung von linearen Abbildungen ist linear.*
Beweis:

$$g \circ f(v+u) \overset{\text{Definition}}{=} g(f(v+u)) \overset{\text{Linearität von } f}{=} g(f(v)+f(u)) \overset{\text{Linearität von } g}{=}$$

$$g(f(v)) + g(f(u)) \overset{\text{Definition}}{=} g \circ f(v) + g \circ f(u)$$

Ähnlich mit λv. $\square$

Definition von Isomorphismus

Definition von Isomorphismus

Definition 28

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume.*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V,+,\bullet)$, $(U,+,\bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \rightarrow U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*
Isomorphismus	

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*
Isomorphismus	*falls bijektiv*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V,+,\bullet)$, $(U,+,\bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*
Isomorphismus	*falls bijektiv*
Endomorphismus	

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*
Isomorphismus	*falls bijektiv*
Endomorphismus	*falls* $V = U$

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*
Isomorphismus	*falls bijektiv*
Endomorphismus	*falls* $V = U$

Die Vektorräume V *und* U *heißen Isomorph,*

Definition von Isomorphismus

Definition 28 $(V, +, \bullet)$, $(U, +, \bullet)$ *seien Vektorräume. Eine lineare Abbildung* $f : V \to U$ *heißt*

Monomorphismus	*falls injektiv*
Epimorphismus	*falls surjektiv*
Isomorphismus	*falls bijektiv*
Endomorphismus	*falls* $V = U$

Die Vektorräume V *und* U *heißen Isomorph, falls ein Isomorphismus* $f : V \to U$ *existiert.*

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Satz 28

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$

Beweis.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$

Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)**

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$

Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)**

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen.

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen. Dann ist $g \circ f : U \to W$

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen. Dann ist $g \circ f : U \to W$

  - bijektiv nach Hausaufgabe 3c, Blatt 2

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen. Dann ist $g \circ f : U \to W$

  - bijektiv nach Hausaufgabe 3c, Blatt 2 (Verkettung von Bijektionen ist eine Biektion),

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen. Dann ist $g \circ f : U \to W$

  - bijektiv nach Hausaufgabe 3c, Blatt 2 (Verkettung von Bijektionen ist eine Biektion),
  - linear nach Lemma 21

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$

Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen. Dann ist $g \circ f : U \to W$

  - bijektiv nach Hausaufgabe 3c, Blatt 2 (Verkettung von Bijektionen ist eine Biektion),
  - linear nach Lemma 21 (Verkettung von linearen Abbildungen ist linear).

Isomorphiphie als Äquialenzrelation

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathbb{V}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
Satz 28 Isomorphie ist eine Äquialenzrelation auf $\mathbb{V}$
Beweis. Für $V, U \in \mathbb{V}$ wir schreiben $V \sim U$, falls $\exists$ Isomorphismus $f : V \to U$. Z.z.:

- **(Reflexivität)** $\forall V \in \mathbb{V}$ ist $V \sim V$. Offensichtlich, da $Id : V \to V$ Isomorphismus ist.
- **(Transitivität)** $\forall U, V, W \in \mathbb{V}$ gilt: ist $U \sim V$ und ist $V \sim W$ so ist $U \sim W$.

  Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ Isomorphismen. Dann ist $g \circ f : U \to W$

  - bijektiv nach Hausaufgabe 3c, Blatt 2 (Verkettung von Bijektionen ist eine Biektion),
  - linear nach Lemma 21 (Verkettung von linearen Abbildungen ist linear).

  Also ist sie ein Isomorphismus.

- **(Symmetrie)**

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.
  Wiederholung: Satz 7c

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.
  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus,

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus,*

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung:

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.:

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear,

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\stackrel{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

  $f^{-1}(\lambda f(v)) \qquad \lambda f^{-1}(f(v))$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

  $$f^{-1}(\lambda f(v)) \qquad \lambda f^{-1}(f(v))$$
  $$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$ s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\lambda f(v)) & \qquad & \lambda f^{-1}(f(v)) \\ \| & & \| \\ f^{-1}(f(\lambda v)) & & \end{array}$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\stackrel{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\lambda f(v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\ \| & & \| \\ f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \end{array}$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

Z.z.:

Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

Bemerkung: f bijektiv $\stackrel{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

- $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
- $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\lambda f(v)) & \qquad & \lambda f^{-1}(f(v)) \\ \| & & \| \\ f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\ \| & & \| \end{array}$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$ s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$
\begin{array}{ccc}
f^{-1}(\lambda f(v)) & \qquad & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1} \circ f(\lambda v) & &
\end{array}
$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\stackrel{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$ s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V$, $\quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\lambda f(v)) & \qquad & \lambda f^{-1}(f(v)) \\ \| & & \| \\ f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\ \| & & \| \\ f^{-1} \circ f(\lambda v) & & \lambda f^{-1} \circ f(v) \end{array}$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$
\begin{array}{ccc}
f^{-1}(\lambda f(v)) & \qquad & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1} \circ f(\lambda v) & & \lambda f^{-1} \circ f(v) \\
\| & & \| \\
\lambda v & &
\end{array}
$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \to V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \to V$ s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u + v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$
\begin{array}{ccc}
f^{-1}(\lambda f(v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1} \circ f(\lambda v) & & \lambda f^{-1} \circ f(v) \\
\| & & \| \\
\lambda v & = & \lambda v,
\end{array}
$$

- **(Symmetrie)** $\forall V, U \in A$ gilt: ist $V \sim U$, so ist $U \sim V$.

  Wiederholung: Satz 7c Ist $\phi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \longrightarrow G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

  Z.z.:

  Lemma 22 *Ist $f : V \longrightarrow U$ ein Isomorphismus, so ist $f^{-1} : U \longrightarrow V$ auch ein Isomorphismus.*

  Bemerkung: f bijektiv $\overset{\text{Lemma 3}}{\Longrightarrow}$ die Abbildung $f^{-1} : U \longrightarrow V$s.d. $f^{-1} \circ f = Id_V, \quad f \circ f^{-1} = Id_U$ wohldefiniert und bijektiv ist.

  Beweis: Z.z.: f^{-1} ist linear, d.h.,

  - $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \Longleftarrow$ Satz 7c.
  - $f^{-1}(\lambda u) = \lambda f^{-1}(u)$

  Da f surjektiv ist, $\exists v \in V$ mit $f(v) = u$.

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(\lambda f(v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1}(f(\lambda v)) & & \lambda f^{-1}(f(v)) \\
\| & & \| \\
f^{-1} \circ f(\lambda v) & & \lambda f^{-1} \circ f(v) \\
\| & & \| \\
\lambda v & = & \lambda v,
\end{array}$$

$\square$

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 29

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra)

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen* $\mathbb{K}-$*Vektorräume*

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen* $\mathbb{K}-$*Vektorräume sind genau dann isomorph,*

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen* $\mathbb{K}-$*Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.*

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen* $\mathbb{K}-$*Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. In besonderem gilt: jeder* $\mathbb{K}-$*Vektorraum der Dimension* n *ist zu* $\mathbb{K}^n$ *isomorph.*

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. In besonderem gilt: jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph.*

Beweis $\Longleftarrow$.

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. In besonderem gilt: jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph.*

Beweis $\Longleftarrow$. Da Isomorphie eine Äqiuvalenzrelation ist,

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen* $\mathbb{K}-$*Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. In besonderem gilt: jeder* $\mathbb{K}-$*Vektorraum der Dimension* n *ist zu* $\mathbb{K}^n$ *isomorph.*

Beweis $\Longleftarrow$**.** Da Isomorphie eine Äqiuvalenzrelation ist, genügend es zu zeigen,

Haupsatz der linearen Algebra

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. In besonderem gilt: jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph.*

Beweis $\Longleftarrow$. Da Isomorphie eine Äqiuvalenzrelation ist, genügend es zu zeigen, dass

(*) jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$ der Dimension n zu $\mathbb{K}^n$ isomorph ist.

Satz 29(Hauptssatz der linearen Algebra) *Zwei endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. In besonderem gilt: jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph.*

Beweis $\Longleftarrow$. Da Isomorphie eine Äqiuvalenzrelation ist, genügend es zu zeigen, dass

(*) jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$ der Dimension n zu $\mathbb{K}^n$ isomorph ist.

In der Tat, haben U und V gleiche Dimension n, dann sind sie nach (*) zu $\mathbb{K}^n$ isomorph:

$$(V \overset{\text{Isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n, \ \mathbb{K}^n \overset{\text{Isomorph}}{\sim} U) \ , \ \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} \ V \overset{\text{Isomorph}}{\sim} U.$$

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n,$

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$$C_B : V \to \mathbb{K}^n, \; C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen,

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n,\ C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist,

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear,

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität:

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität:

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \right)$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0$

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen,

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \implies v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$,

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \implies v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität:

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen,

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Bild eines $v \in V$ ist.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \implies v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Bild eines

  $v \in V$ ist. Aber $C_B(\lambda_1 \bullet v_1 + ... + \lambda_n \bullet v_n)$

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Bild eines $v \in V$ ist. Aber $C_B(\lambda_1 \bullet v_1 + ... + \lambda_n \bullet v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \implies v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Bild eines $v \in V$ ist. Aber $C_B(\lambda_1 \bullet v_1 + ... + \lambda_n \bullet v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

□

Warum war beweis do einfach?

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \Longrightarrow v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Bild eines $v \in V$ ist. Aber $C_B(\lambda_1 \bullet v_1 + ... + \lambda_n \bullet v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\square$

Warum war beweis do einfach? Weil wir Vorarbeit vorher gemacht haben, hauptsächlich im Sätze 25,27.

Sei $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis in $(V, +, \bullet)$. Wir betrachten die Koordinatenabbildung

$C_B : V \to \mathbb{K}^n$, $C_B(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und zeigen, dass C_B ein Isomorphismus ist, d.h., C_B linear, injektiv und surjektiv ist.

- Linearität: Lemma 18.
- Injektivität: Nach Lemma 19c genugend es zu zeigen, dass $Kern_{C_B} = \{\vec{0}\}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $C_B(v) = 0 \implies v = \vec{0}$.
  D.h., wir mussen zeigen, dass $0 \bullet v_1 + \cdots + 0 \bullet v_n = \vec{0}$, was offensichtlich ist.
- Surjektivität: Wir mussen zeigen, dass jedes $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ Bild eines $v \in V$ ist. Aber $C_B(\lambda_1 \bullet v_1 + ... + \lambda_n \bullet v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\square$

Warum war beweis do einfach? Weil wir Vorarbeit vorher gemacht haben, hauptsächlich im Sätze 25,27.

Beweis $\Longrightarrow$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.:

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph,

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis,

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$
$dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist (*)
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig.

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$
$dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n =$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ *linear unabhängig, so ist*
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ *auch linear unabhängig.* (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\stackrel{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$
$dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$,

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$. Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*).

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ *linear unabhängig, so ist*
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ *auch linear unabhängig.* (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i: $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$.

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:
$f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) \quad + ... + \quad \lambda_n f(v_n))$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\stackrel{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$. Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) \quad +...+ \quad \lambda_n f(v_n)) = \quad f^{-1}(\vec{0})$$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) \quad +...+ \quad \lambda_n f(v_n)) = \quad f^{-1}(\vec{0}) \overset{\text{Lemma 19a}}{=} \quad \vec{0}$$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$
$dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) & +...+ & \lambda_n f(v_n)) & = & f^{-1}(\vec{0}) & \overset{\text{Lemma 19a}}{=} & \vec{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \| \\ \lambda_1 v_1 & & & & & & \end{array}$$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.

Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:

Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\stackrel{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.

Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.

Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i: $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) & +...+ & \lambda_n f(v_n)) = & f^{-1}(\vec{0}) & \stackrel{\text{Lemma 19a}}{=} & \vec{0} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \| \\
\lambda_1 v_1 & +...+ & \lambda_n v_n & & &
\end{array}$$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc}
f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) & +...+ & \lambda_n f(v_n)) = & f^{-1}(\vec{0}) & \overset{\text{Lemma 19a}}{=} & \vec{0} \\
\downarrow & & \downarrow & & & \| \\
\lambda_1 v_1 & +...+ & \lambda_n v_n & & = & \vec{0}.
\end{array}$$

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist
$Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\stackrel{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i: $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) & +...+ & \lambda_n f(v_n)) & = & f^{-1}(\vec{0}) & \stackrel{\text{Lemma 19a}}{=} & \vec{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \| \\ \lambda_1 v_1 & +...+ & \lambda_n v_n & & = & & \vec{0}. \end{array}$$

Da $\{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig ist,

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig, so ist $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ auch linear unabhängig. (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i:
$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) & +...+ & \lambda_n f(v_n)) & = & f^{-1}(\vec{0}) & \overset{\text{Lemma 19a}}{=} & \vec{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \| \\ \lambda_1 v_1 & +...+ & \lambda_n v_n & & = & & \vec{0}. \end{array}$$

Da $\{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig ist, sind alle $\lambda_i = 0$, also (**) ist trivial

Beweis $\Longrightarrow$

Z.z.: Sind V und U Isomorph, so ist $dim(U) = dim(V)$. Sei f der Isomorphismus.
Wegen Austauschsatz genügend es z.z.:
Ist $A = \{v_1, ..., v_n\}$ *linear unabhängig, so ist* $Bild_f(A) := \{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ *auch linear unabhängig.* (*)

Tatsächlich, ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis, so ist nach (*) die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_n)\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$ $dim(U) \geq \#\{f(v_1), ..., f(v_n)\} = n = dim(V)$. Also, $dim(U) \leq dim(V)$.
Wir wiederholen diese Überlegung für den Isomorphismus (Lemma 22) $f^{-1} : U \to V$, und bekommen $dim(U) \geq dim(V)$. Also, $dim(U) = dim(V)$.
Beweis (*). Wir betrachten eine beliebige Linearkombination von v_i: $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. (**)

Wir wenden den Isomorphismus $f^{-1} : U \to V$ an:

$$\begin{array}{ccccccc} f^{-1}(\lambda_1 f(v_1) & + ... + & \lambda_n f(v_n)) = & f^{-1}(\vec{0}) & \overset{\text{Lemma 19a}}{=} & \vec{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & & \| \\ \lambda_1 v_1 & + ... + & \lambda_n v_n & & = & \vec{0}. \end{array}$$

Da $\{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängig ist, sind alle $\lambda_i = 0$, also (**) ist trivial.

Logic des Abschnitts Vektorräume

- Definition

Logic des Abschnitts Vektorräume

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Beispiele ($\mathbb{K}^n$)

Logic des Abschnitts Vektorräume

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Beispiele ($\mathbb{K}^n$)
- Äquivalenzrelation (isomorphismen) auf der Menge von allen Vektorräumen

Logic des Abschnitts Vektorräume

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Beispiele ($\mathbb{K}^n$)
- Äquivalenzrelation (isomorphismen) auf der Menge von allen Vektorräumen
- Eine Aussage, dass alle endlich erzeugte Vektorräume die Vektorräumen aus der Familie von Beispiele äquivalent sind

Abschnitt 3: Matrizenkalkul

Satz 30

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,*

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V

$$=$$

Satz 30 $(V,+,\bullet)$ *und* $(U,+,\bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U.

$$=$$

Satz 30 $(V,+,\bullet)$ *und* $(U,+,\bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1,...,n$.

$=$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis:

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage**

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gelte:

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$=$$

Satz 30 $(V,+,\bullet)$ *und* $(U,+,\bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f:V\to U$ so dass $f(v_i)=u_i$ für alle $i=1,...,n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f:V\to\mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2\in V$ gelte: $f(v_1)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $f(v_2)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$=$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} \qquad\qquad =$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) =$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} +$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Satz 30 *$(V, +, \bullet)$ und $(U, +, \bullet)$ seien endlichdimensionale $\mathbb{K}-$Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren v_1, $v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$
Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.
$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Frage

Satz 30 $(V,+,\bullet)$ *und* $(U,+,\bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1,...,n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f: V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Was ist $f(v_1+v_2)$?

Antwort.

$f(v_1+v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort.

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.
$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2)$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(2v_1) + f((-3)v_2)$

Satz 30 *$(V,+,\bullet)$ und $(U,+,\bullet)$ seien endlichdimensionale $\mathbb{K}-$ Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1,...,n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f: V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Was ist $f(v_1+v_2)$?

Antwort.
$$f(v_1+v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1)+f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(2v_1) + f((-3)v_2) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Satz 30 *$(V,+,\bullet)$ und $(U,+,\bullet)$ seien endlichdimensionale $\mathbb{K}-$ Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1,...,n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f: V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Was ist $f(v_1+v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1+v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1)+f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1-3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1-3v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(2v_1)+f((-3)v_2) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$2f(v_1)-3f(v_2) =$

Satz 30 $(V, +, \bullet)$ *und* $(U, +, \bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$ *Vektorräume,* $(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1, ..., u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ so dass $f(v_i) = u_i$ für alle $i = 1, ..., n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f : V \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren v_1, $v_2 \in V$ gelte: $f(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was ist $f(v_1 + v_2)$?

Antwort.
$$f(v_1 + v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1 - 3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1 - 3v_2) \overset{\text{Linearität}}{=} f(2v_1) + f((-3)v_2) \overset{\text{Linearität}}{=}$
$$2f(v_1) - 3f(v_2) = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 30 $(V,+,\bullet)$ *und* $(U,+,\bullet)$ *seien endlichdimensionale* $\mathbb{K}-$*Vektorräume,* $(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in V und $(u_1,...,u_n)$ sei ein $n-$Tupel der Vektoren aus U. Dann gilt: Es existiert genau eine lineare Abbildung $f:V\to U$ so dass $f(v_i)=u_i$ für alle $i=1,...,n$.

Vor dem Beweis: **Frage** $f:V\to\mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung. Für die Vektoren $v_1,\ v_2\in V$ gelte: $f(v_1)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\qquad f(v_2)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$

Was ist $f(v_1+v_2)$?

Antwort.

$$f(v_1+v_2)\overset{\text{Linearität}}{=}f(v_1)+f(v_2)=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.$$

Frage Was ist $f(2v_1-3v_2)$?

Antwort. $f(2v_1-3v_2)\overset{\text{Linearität}}{=}f(2v_1)+f((-3)v_2)\overset{\text{Linearität}}{=}$

$$2f(v_1)-3f(v_2)=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz 30.

Beweis von Satz 30. Existenz.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung

kostruieren.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung

kostruieren.Sei $w \in V$.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$,

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i):

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.

Wir zeigen (ii):

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1v_i$,also $f(v_i) = 1u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=}$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v).$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v).$

Ähnlich, nach Lemma 18,

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v).$

Ähnlich, nach Lemma 18, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 18, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) =$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 18, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i =$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w + u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 18, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i u_i$

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 18, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i u_i = \lambda f(w)$.

Beweis von Satz 30. Existenz. Wir werden diese Abbildung kostruieren.Sei $w \in V$. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ seien Koordinaten von w in der Basis $\{v_1, ..., v_n\}$, d.h. $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$$\text{Wir setzen} \quad f(w) := x_1 u_1 + x_2 u_2 + ... + x_n u_n = \sum_{i=1}^n x_i u_i. \qquad (\star)$$

Zu zeigen: (i) $f(v_i) = u_i$ und (ii) f ist linear.
Wir zeigen (i): $v_i = 1 v_i$,also $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.
Wir zeigen (ii): $w, u \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.Nach Lemma 18, die Koordinaten von $w + u$ sind $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(w+u) \overset{Lemma\ 18}{=} f(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i) \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) u_i = \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{i=1}^n y_i u_i \overset{(\star)}{=} f(u) + f(v)$.

Ähnlich, nach Lemma 18, die Koordinaten von λw sind $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$. Also,

$f(\lambda w) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i u_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i u_i = \lambda f(w)$.

Eindeutigkeit.

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$
$f(w) =$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$
$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n)$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$f(x_1 v_1)$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) +$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n)$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=}$

$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \stackrel{\text{Linearität}}{=}$

$x_1 f(v_1)$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$

$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2)$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$
$$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots +$$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

$$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots + x_n f(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1$$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

$$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots + x_n f(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1 + x_2 u_2 +$$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

$$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots + x_n f(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots +$$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

$$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots + x_n f(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n.$$

Eindeutigkeit. $w \in V$ habe Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d.h.

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$$

$$f(w) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$f(x_1 v_1) + f(x_2 v_2) + \ldots + f(x_n v_n) \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \ldots + x_n f(v_n) \overset{\text{Voraussetz.}}{=} x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n. \quad \square$$