

Affine Geometrie (Einfachere, konstruktive Version)

Def. *Affiner Raum* der Dimension n über Körper \mathbb{K} ist nach Definition \mathbb{K}^n .

Bemerkung. Man könnte Theorie von affinen Räumen auch axiomatisch aufbauen – mit Hilfe von Axiomen; danach kann man beweisen, dass jeder endlichdimensionale affine Raum zu \mathbb{K}^n affin-isomorph ist. Wir werden es aus Zeitgründen nicht tun.

Bemerkung. Wenn es für Sie komfortabler ist, können Sie fast überall den Körper \mathbb{K} mit \mathbb{R} ersetzen – es gibt zwei Stellen wo die Wahl des Körpers eine Rolle spielt; Ich werde diese zwei Stellen deutlich anzeigen.

Def. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt ein *affiner Unterraum*, falls ein Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{K}^n$ und ein $a_0 \in \mathbb{K}^n$ existieren, so dass

$$\mathcal{U} = \{a_0 + v, \text{ wobei } v \in V\}.$$

$\dim(\mathcal{U}) := \dim(V)$. Die affinen Unterräume der Dimension 1 heißen *Gerade*, die affinen Unterräume der Dimension 2 heißen *Ebenen*. Die affinen Unterräume der Dimension $n - 1$ heißen *Hyperebenen*.

Triviales Bsp. Jede 1-Punkt-Menge $\{\vec{a}\} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein affiner Unterraum (Weil $\{\vec{0}\}$ ein Vektorraum ist, und $a + \vec{0} = a$) der Dimension 0. \mathbb{K}^n selbst ist auch ein affiner Unterraum (über Vektorraum \mathbb{K}^n).

Bsp. Unterräume von \mathbb{R}^2

Unteräume von Ebene

A

Punkt ist ein 0-dim. aff. Unterraum

B



Gerade = $\{ B + t v, \text{ wobei } t \text{ aus } \mathbb{R} \text{ ist} \}$

ist ein 1-dim. aff. Unterraum

=Hyperebene

Die ganze Ebene ist ein 2-dim. aff. Unterraum

Bsp. Unterräume von \mathbb{R}^3

Unterräume vom Raum

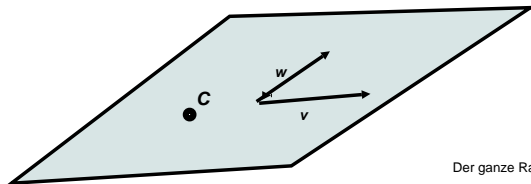
●
A

Punkt ist ein 0-dim. aff. Unterraum

●
B

Gerade = $\{B + t v, \text{ wobei } t \text{ aus } \mathbb{R} \text{ ist}\}$

ist ein 1-dim. aff. Unterraum



Der ganze Raum

ist ein 3-dim. aff. Unterraum

Die Ebene $\{C + t v + r w, \text{ wobei } t, r \text{ aus } \mathbb{R} \text{ sind}\}$

und v, w linear unabhängig sind

ist ein 2-dim. aff. Unterraum

ist ein Hyperebene

Als Fusspunkt können wir einen beliebigen Punkt wählen

Lemma 6. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum (mit zugehörigen Vektorraum $V_{\mathcal{U}}$). Sei $a_1 \in \mathcal{U}$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt:
 $\mathcal{U} = \{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$.

In Worten: Als Fusspunkt eines affinen Raums können wir einen beliebigen Punkt des Unterraums wählen.

Geraden $\{A+tv\}$,
 $\{B+tv\}$, $\{C+tv\}$
sind gleich



Beweis. Wir zeigen: Jeder Punkt a aus $\{a_0 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$ liegt auch in $\{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$. Tatsächlich, $a = a_0 + v$, wobei $v \in V_{\mathcal{U}}$. Dann ist

$$a_0 + v = a_0 + v + \vec{0} = a_0 + v + a_1 - a_0 + a_0 - a_1 = \underbrace{(a_0 + a_1 - a_0)}_{a_1} + \underbrace{(v + a_0 - a_1)}_{\in V_{\mathcal{U}}} \in \{a_1 + u, \text{ wobei } u \in V_{\mathcal{U}}\}.$$

Ähnlich: Jedes a aus $\{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$ liegt auch in $\{a_0 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$. Also sind die Mengen gleich. □

Wiederholung. Der Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ ist eine lineare Kombination der Vektoren $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$.

Def. Gibt es solche Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, so ist der Punkt $x \in \mathbb{K}^n$ eine **affine Kombination** der Punkte $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^n$.

Eine affine Kombination ist also eine Linearkombination, sodass die Summe der Koeffizienten gleich 1 ist (hat in jedem Körper Sinn, da 1 in jedem Körper wohldefiniert ist, als neutrales Element der Gruppe $(\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$).

Bemerkung. Dies ist äquivalent zu „ $x - x_1$ ist lineare Kombination der Vektoren $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1$.“

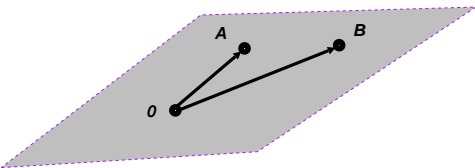
Tatsächlich, in diesem Fall ist $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_k$, und

$$\begin{aligned}x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k \\&= x_1 + (-\lambda_2 - \dots - \lambda_k) x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k \\&= x_1 + \lambda_2 (x_2 - x_1) + \lambda_3 (x_3 - x_1) + \dots + \lambda_k (x_k - x_1)\end{aligned}$$

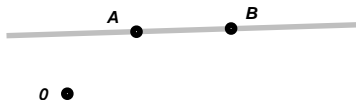
Wiederholung. Für $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist die **lineare Hülle $\text{Span}(A)$** die Menge aller (endlichen) linearen Kombinationen von Elementen von A . $\text{Span}(A)$ ist zugleich der kleinste lineare Untervektorraum von \mathbb{K}^n , der A enthält, und die Schnittmenge von allen linearen Untervektorräumen von \mathbb{K}^n , die A enthalten (siehe Satz 6 Vorl. 5 LAAG I und dessen Folgerung).

Def. Für $A \subseteq \mathbb{K}^n$ ist **die affine Hülle $\text{Aff}(A)$** die Menge aller (endlichen) affinen Kombinationen von Elementen von A .

*Lineare Hülle von A und B :
eine Ebene, die A , B und
Null-Nunkt 0 enthält.*



*Affine Hülle von A und B :
die Gerade durch A und B*



Lemma 7. Sei $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann gilt: $Aff(A)$ ist ein affiner Unterraum über Untervektorraum $span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)$.
(**Wiederhol.** – aff. Raum über U ist die Menge $\{a_0 + u \mid u \in U\}$.)
Ferner gilt: Enthält ein affiner Unterraum \mathcal{U} alle Punkte x_1, \dots, x_k , so gilt $Aff(A) \subseteq \mathcal{U}$.

Bemerkung. Die letzte Aussage des Lemmas kann man wie folgt umformulieren: $Aff(A)$ ist der kleinste affine Unterraum von \mathbb{K}^n , der A enthält (vergl. Folg. Satz 6 LAAG 1).

Bemerkung. Wir sehen, dass die Dimension von $Aff(A)$ höchstens $k - 1 = \#A - 1 = \#\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1\}$ ist.

Beweis. Z.z.:

- (i) $Aff(A) \subseteq \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\}$, d.h.,
Jedes $x \in Aff(A)$ kann man als $x_1 + v$ darstellen, wobei
 $v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)$.
- (ii) $Aff(A) \supseteq \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\}$, d.h.,
für jedes $v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)$ gilt:
 $x_1 + v \in Aff(A)$.
- (iii) Für jeden affinen Unterraum \mathcal{U} mit $A \subseteq \mathcal{U}$ gilt: $Aff(A) \subseteq \mathcal{U}$.

Beweis von (i):

$$\text{Aff}(A) \subseteq \{x_1 + v \mid v \in \text{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\}$$

Wir haben diese Aussage praktisch in der Bemerkung nach der Definition der affinen Hülle gezeigt.

Angenommen $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ wobei $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

Dann ist $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_k$, und

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + (-\lambda_2 - \dots - \lambda_k) x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + \lambda_2 (x_2 - x_1) + \lambda_3 (x_3 - x_1) + \dots + \lambda_k (x_k - x_1) \end{aligned}$$

Dann ist $x - x_1$ eine lineare Kombination der Vektoren $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1$, also ein Element (z.B. v) von $\text{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)$. Also, $x = x_1 + v$, □

Beweis von (ii):

$$\text{Aff}(A) \supseteq \{x_1 + v \mid v \in \text{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\}$$

Z.z.: für jedes $v = \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + \dots + \lambda_k(x_k - x_1)$ liegt $x_1 + v$ in $\text{Aff}(A)$.

$$\begin{aligned}x_1 + v &= x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + \dots + \lambda_k(x_k - x_1) \\&= \underbrace{(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_k)}_{\lambda_1} x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k)x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) + \\&\quad \lambda_3(x_3 - x_1) + \dots + \lambda_k(x_k - x_1) \\&= \lambda_1 x_1 + \lambda_2(x_1 + (x_2 - x_1)) + \lambda_3(x_1 + (x_3 - x_1)) + \dots + \lambda_k(x_1 + (x_k - x_1)) = \\&\quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k.\end{aligned}$$

Da die Summe der Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gleich

$(1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_k) + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k = 1$ ist, ist $x_1 + v$ eine affine Kombination von x_1, \dots, x_k .

Beweis (iii): Ist $A \subseteq \mathcal{U}$, so ist $Aff(A) \subseteq \mathcal{U}$

Wied. – Lemma 6. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^n$ affiner Unterraum über Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$, d.h., $\mathcal{U} = \{a_0 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\}$. Sei $a_1 \in \mathcal{U}$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt: $\mathcal{U} = \{a_1 + v, \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\}$.

Wegen Lemma 6 können wir oBdA annehmen, dass

$$\mathcal{U} = \{x_1 + u \mid u \in V_{\mathcal{U}}\}.$$

Dann sind alle Punkte $x_2, \dots, x_k \in A$ gleich $x_2 = x_1 + u_2, x_3 = x_1 + u_3, \dots, x_k = x_1 + u_k$ wobei $u_2, \dots, u_k \in V_{\mathcal{U}}$. Dann sind $(x_2 - x_1), (x_3 - x_1), \dots, (x_k - x_1) \in V_{\mathcal{U}}$. Dann ist

$$\text{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1) \subseteq V_{\mathcal{U}}. \quad (*)$$

Dann gilt $Aff(A) \stackrel{(i)}{\subseteq} \{x_1 + v \mid v \in \text{span}(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\} \stackrel{(*)}{\subseteq} \{x_1 + v \mid v \in V_{\mathcal{U}}\} = \mathcal{U},$ □

Lemma 7. Sei $A = \{x_1, \dots, x_k\}$. Dann gilt: $Aff(A)$ ist ein affiner Raum über Untervektorraum $span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)$. Ferner gilt: Enthält ein affiner Unterraum \mathcal{U} alle Punkte x_1, \dots, x_k , so gilt $Aff(A) \subseteq \mathcal{U}$.

Folgerung. Jeden affinen Unterraum von \mathbb{K}^n kann man als affine Hülle einer endlichen Teilmenge darstellen.

Beweis. In der Tat, sei $\mathcal{U} = \{x_1 + v \mid v \in V\}$. Wir nehmen eine Basis $(v_2, \dots, v_k) \in V$ (endlich, weil $dim(\mathbb{K}^n)$ endlich ist). Sei $x_i := x_1 + v_i$, $i = 2, \dots, k$. Dann ist $Aff(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{Lem. 7}}{=} \{x_1 + v \mid v \in span(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1)\} = \{x_1 + v \mid v \in V\}$.

Lemma 8. Seien $A \in \text{Mat}(m, n, \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Man betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Angenommen, das System ist lösbar (= es gibt mind. ein $x_0 \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax_0 = b$). Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ ein affiner Unterraum und $V_{\mathcal{U}} = \text{Kern}_A$.

Wiederholung. $\text{Kern}_A := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \vec{0}\}$.

Wiederholung – Def. Ein *affiner Unterraum* ist eine Teilmenge \mathcal{U} der Form $\mathcal{U} = \{x_0 + v, \text{ wobei } v \in V\}$, wobei V ein Untervektorraum ist.

Bemerkung. Vergleichen Sie bitte das Lemma mit dem Satz 27 LAAG I – die sind äquivalent (und die Beweise sind gleich).

Beweis des Lemmas: Z.z.: $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum über Kern_A . Sei $x_0 \in \mathcal{U}$. Z.z.:

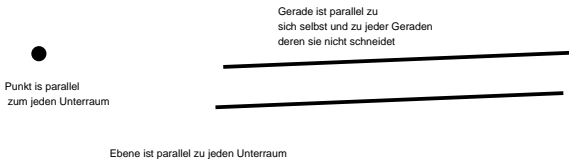
- (i) Jedes $x \in \mathcal{U}$ ist die Summe $x_0 + v$, wobei $v \in \text{Kern}_A$.
- (ii) Für jedes $v \in \text{Kern}_A$ liegt $x_0 + v$ auch in \mathcal{U} .

Beweis (i): Angenommen, $x \in \mathcal{U}$, d.h., $Ax = b$. Dann gilt für den Vektor $v := (x - x_0) \in \mathbb{K}^n$: $A(v) = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = \vec{0}$, d.h., $v \in \text{Kern}_A$.

Beweis (ii): Angenommen, $v \in \text{Kern}_A$, $x_0 + v \in \mathcal{U}$, d.h., $Av = \vec{0}$ und $Ax_0 = b$. Dann ist $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + \vec{0} = b$. d.h., $x_0 + v \in \mathcal{U}$.

Def. Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Unterräume von \mathbb{K}^n zu Untervektorräumen $V_{\mathcal{U}_1}$ bzw. $V_{\mathcal{U}_2}$. Sie heißen *parallel* zueinander, falls $V_{\mathcal{U}_1} \subseteq V_{\mathcal{U}_2}$ oder $V_{\mathcal{U}_2} \subseteq V_{\mathcal{U}_1}$.

Auf der Ebene



Bsp. (Trivialfall) Jeder Unterraum ist zu sich selbst, zum ganzen Raum und zu einem Punkt parallel.

Einfach zu sehen: Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ parallele affine Unterräume. Dann gilt: Entweder enthält ein Unterraum den anderen, oder sie haben keine Schnittpunkte.

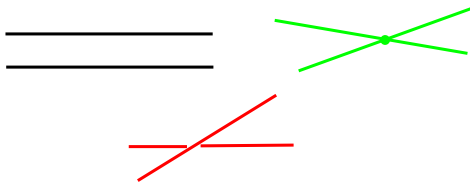
Bsp. Eigenschaft aus zwei Unterräumen zu bestehen, die keine Schnittpunkte haben, ist eine affine Eigenschaft.

Lemma 9. Sei \mathbb{K}^n ein n -dimensionaler affiner Raum, \mathcal{U} affiner Unterraum und \mathcal{H} affine Hyperebene. Gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, so sind \mathcal{U} und \mathcal{H} parallel. (Körper ist \mathbb{K})

Bemerkung. Die Bedingung, dass \mathcal{H} Hyperebene ist, also dass $\dim(V_{\mathcal{H}}) = n - 1$, ist wichtig:

Zwei verschiedene Geraden in \mathbb{R}^3 können

- ▶ parallel sein,
- ▶ **windschief sein**
- ▶ **einander schneiden**



Windschiefe Geraden sind nicht parallel, haben aber keinen Schnittpunkt.

Lemma 9 –Wiederh. Sei \mathcal{U} affiner Unterraum (zu $V_{\mathcal{U}}$) des n -dimensionalen affinen Raums \mathbb{K}^n , und $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{K}^n$ affine Hyperebene (zu $V_{\mathcal{H}}$ der Dimension $n - 1$). Gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, so sind \mathcal{U} und \mathcal{H} parallel.

Widerspruchsbeweis. Angenommen sie sind nicht parallel. Man nehme ein $v \in V_{\mathcal{U}}$, $v \notin V_{\mathcal{H}}$. Man nehme eine Basis (h_1, \dots, h_{n-1}) in $V_{\mathcal{H}}$, und betrachte $\{h_1, \dots, h_{n-1}, v\}$. Die Menge ist linear unabhängig. Tatsächlich, sei

$$\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \lambda v = \vec{0} \quad (*)$$

Dann ist $\lambda = 0$, sonst kann man v als Linearkombination von h_1, \dots, h_{n-1} darstellen, was den Voraussetzungen widerspricht. Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$ und ist trivial, weil $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$ linear unabhängig ist. Dann ist $\{h_1, \dots, h_{n-1}, v\}$ linear unabhängig, und deswegen eine Basis.

Nehmen wir ein $a \in \mathcal{U}$ und ein $b \in \mathcal{H}$. Da (h_1, \dots, h_{n-1}, v) eine Basis ist, gilt $b - a = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \lambda v$. Dann

$b = a + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \lambda v$, und deswegen

$$b - (\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1}) = a + \lambda v. \quad (**)$$

Da $b \in \mathcal{H}$ und $(\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_{n-1} h_{n-1}) \in V_{\mathcal{H}}$, liegt die linke Seite von $(**)$ in \mathcal{H} . Da $b \in \mathcal{H}$ und $\lambda v \in V_{\mathcal{U}}$, liegt die rechte Seite von $(**)$ in \mathcal{U} . Also $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Widerspruch beweist das Lemma. □

Lemma 9. Sei \mathcal{U} affiner Unterraum (zu $V_{\mathcal{U}}$) des n -dimensionalen affinen Raums \mathbb{K}^n , und $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{K}^n$ affine Hyperebene (zu $V_{\mathcal{H}}$ der Dimension $n - 1$). Gilt $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, so sind \mathcal{U} und \mathcal{H} parallel.

Folgerung. Sei \mathcal{E} eine Ebene (= 2-dim affiner Raum). Dann gilt: zwei Geraden $L_1 \neq L_2$ sind genau dann parallel, wenn sie keinen Schnittpunkt haben.

D.h., in 2-dim affinen Raum können wir Begriff „parallel“ wie in Schulgeometrie definieren

(d.h., zwei Geraden in einer Ebene sind parallel, wenn sie zusammenfallen oder keine Schnittpunkte haben; eine Gerade und eine Ebene im 3D Raum sind genau dann parallel, wenn Gerade in der Ebene liegt, oder keine Schnittpunkte mit der Ebene hat) auch wenn das Raum über einen beliebigen Körper \mathbb{K} ist.