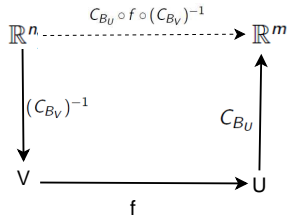


# Wiederholung und Plan:

- ▶ Ziel: alle linearen  $f : V \rightarrow U$  zu beschreiben, wobei  $V, U$  Vektorräume sind, s.d.  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $\dim(U) = m < \infty$ .
- ▶ Wir benutzen: Hauptsatz 11' der linearen Algebra:
  - ▶  $V \stackrel{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^n$ ,  $U \stackrel{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^m$ .
  - ▶ Die Koordinatenabbildungen  $C_{B_V} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C_{B_U} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind Isomorphismen, wobei  $B_V, B_U$  Basen in  $V$  bzw.  $U$  sind.
- ▶ Strategie:
  - ▶ Wir haben alle linearen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  beschrieben (Satz 13)
  - ▶ Wir untersuchen jetzt, wie sich die Beschreibung ändert, wenn wir andere Basen  $B'_V, B'_U$  in  $V$  bzw.  $U$  wählen.

**Def.** Sei  $f : \underbrace{V}_{\dim=n} \rightarrow \underbrace{U}_{\dim=m}$  eine lineare Abbildung,

$B_V$  bzw.  $B_U$  Basis-Tupel in  $V$  bzw.  $U$ . Dann ist die Abbildung  $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Ihre Matrix heisst die **darstellende Matrix der Abbildung  $f$  bzgl. der Basen  $B_V$  und  $B_U$ .**



## Wie findet man die darstellende Matrix?

Seien  $V$  und  $U$  Vektorräume mit  $\dim(V) = n$  ;  $\dim(U) = m$  und sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

Seien  $B_V = (v_1, \dots, v_n)$  bzw.  $B_U = (u_1, \dots, u_m)$  Basis-Tupel in  $V$  bzw.  $U$ .

**Frage.** Wie findet man die darstellende Matrix von  $f$  bzgl.  $B_V$  und  $B_U$  ?

**Antwort:** Mit Hilfe von Satz 13. Nach Definition, müssen wir die Matrix von  $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  finden. Nach Satz 13 sind die Spalten dieser Matrix die Bilder von  $e_j$ .

Wir haben:  $(C_{B_V})^{-1}(e_j) = v_j$ . In der Tat,  $C_{B_V}(v_j)$  ist  $e_j$ , weil  $0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_j + \dots + 0 \cdot v_n = v_j$ , also ist  $e_j$  der Koordinatenvektor von  $v_j$  in der Basis  $B_V$ . Dann ist

$C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}(e_j) = C_{B_U}(f(v_j)) \stackrel{\text{Def.}}{\longleftarrow} \text{Koordinatenvektor von } f(v_j) \text{ in der Basis } B_U.$

**Also, die  $i$ -te Spalte der darstellenden Matrix ist der Koordinatenvektor von  $f(v_i)$  in der Basis  $B_U$ .**

Wir betrachten  $Mat(2, 2)$  mit der in Vorl. 10 eingeführten Vektorraumstruktur. Als Basis in diesem Raum wählen wir die ebenfalls in Vorl. 10 eingeführte Basis aus den Matrizen  $B_{ij}$ ; wir werden diese Matrizen in einem Basis-Tupel wie folgt anordnen:

$$B = \left( b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Frage.** Was sind die Koordianten von  $X := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$  in dieser Basis?  
( $\iff$  Was ist  $C_B(X)$ )

**Antwort.** Die Koordinaten von  $X$  sind nach Definiton die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  sodass  $X = \sum \lambda_i b_i$ .  
In unserem Fall ist

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deswegen ist  $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$  der Koordiantenvektor von  $X$

Jetzt sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine fest gewählte Matrix. Wir betrachten die Abbildung

$F : \text{Mat}(2, 2) \rightarrow \text{Mat}(2, 2), F(X) = AX \longleftarrow$  die übliche Matrizenmultiplikation.

Die Abbildung ist linear. In der Tat,

- $F(X + Y) = A(X + Y) \stackrel{\text{Distributivität}}{=} AX + AY$
- $F(\lambda X) = A(\lambda X) \stackrel{\text{Linearität von } f_A}{=} \lambda AX$

Ermitteln wir jetzt die darstellende Matrix der Abbildung bzgl. der Basis  $B = \left( b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Das ist eine  $4 \times 4$ -Matrix. Die  $i$ -te Spalte dieser Matrix ist der Koordinatenvektor von  $F(b_i)$  in der Basis  $B$ . Rechnen wir sie aus:

$$F(b_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Koordinatenvektor von  $F(b_1)$  ist deswegen  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ ; das ist die erste

Spalte der darstellenden Matrix.

$$F(b_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Koordinatenvektor von  $F(b_2)$  ist deswegen  $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ ; das ist die zweite

Spalte. Analog bekommen wir die dritte und die vierte Spalte:  $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$  und

$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ . Die darstellende Matrix ist dann  $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ .

# Die darstellende Matrix einer Abbildung $f : V \rightarrow U$ hängt von Wahl der Basen in $V$ und $U$ ab

**Beispiel.** Wir betrachten den Endomorphismus  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ .

Wählen wir in beiden Vektorräumen die Standard-Basis  $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , erhalten wir die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Wählen wir nur im „ersten“  $\mathbb{R}^2$  die Standard-Basis

$B_1 = B = \left( e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  und im „zweiten“  $\mathbb{R}^2$  die Basis

$B_2 = \left( b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Dann ist  $f(e_1) = b_1$  und  $f(e_2) = b_2$  und damit die darstellende Matrix von  $f$  bzgl. dieser Basen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(Weil der Koordinatenvektor von  $b_1 = f(e_1)$  in der Basis  $B_2$  gleich  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, weil  $1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 = b_1 = f(e_1)$  ist. Also der erste Spalte (der darstellenden Matrix) ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  wie in  $Id$ )

Wir hatten bereits gesehen, dass die darstellende Matrix einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow U$  zwischen zwei Vektorräumen von den gewählten Basen abhängt.

Auf den ersten Blick scheint es die beste Idee zu sein, stets immer die Standardbasis zu wählen, weil diese eine besonders einfache Gestalt hat. Allerdings lässt sich daraus keineswegs folgern, dass dann auch die darstellende Matrix besonders einfach ist. Im Bsp. oben ist die darstellende Matrix besonders einfach (Einheitsmatrix), wenn wir die Basen günstig gewählt haben.

Wir werden hier zuerst untersuchen, was genau bei einem Wechsel der jeweils betrachteten Basis eigentlich passiert.

Der Vektor  $x \in V$  habe den Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  in der Basis

$(v_1, \dots, v_n)$ , d.h.,  $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ .

**Frage** Welche Koordinaten hat  $x$  in einer anderen Basis  $B := (b_1, \dots, b_n)$ ?

Die Koordinaten des Vektors  $b_i$  in der Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  seien

$\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$ . Man betrachte die  $(n \times n)$ -Matrix  $T$  s.d.  $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$  (d.h.,  $i$ -te

Spalte von  $T$  ist der Vektor  $b_i$ ):  $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$ .

Diese Matrix  $T$  heißt **Transformationsmatrix** (oder **Übergangsmatrix**). Die Matrix  $T$  ist nach Satz 15 nicht ausgeartet, also ist  $T^{-1}$  wohldefiniert.

**Satz 25** Der Vektor  $x \in V$  habe den Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  in der

Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ . Dann gilt: Der Koordinatenvektor des Vektors  $x$  in der

Basis  $B := (b_1, \dots, b_n)$  ist  $T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(Oder: für jedes  $x$  gilt:  $C_B(x) = T^{-1} C_{(v_1, \dots, v_n)}(x)$ .)



**Satz 25** Der Koordinatenvektor des Vektors  $x$  in der Basis

$$B := (b_1, \dots, b_n) \text{ ist } T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ (oder: } C_B(x) = T^{-1} C_{(v_1, \dots, v_n)}(x))$$

**Beweis:** nach Definition sind die Koordinaten von  $x$  die Skalare  $y_1, \dots, y_n$  s.d.  $x = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$ . Wir wenden  $C_{(v_1, \dots, v_n)}$  an: Wegen

$C_{(v_1, \dots, v_n)}(b_i) = T e_i$  gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1 T e_1 + \dots + y_n T e_n \stackrel{\text{Linearitat}}{=} T(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n).$$

Also  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Wir multiplizieren die beiden Seiten dieser Gleichung

von links mit  $T^{-1}$  und bekommen  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  wie wir

behauptet, □

**Beweis von Satz 25 anhand eines Beispiels.** Wir betrachten  $V = \mathbb{R}^2$  mit Standardbasis  $(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ .

Als eine andere Basis nehmen wir  $(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ .

**Bemerkung.** Wir haben in Vorl.7-8 mit Hilfe der Folgerungen aus dem Austauschsatz bewiesen, dass  $(b_1, b_2)$  eine Basis ist. Mit dem heutigen Wissen können wir dasselbe viel schneller tun. Tatsächlich, da  $\mathbb{R}^2$  2-dimensional ist, genügt es zu zeigen dass die Vektoren  $b_1, b_2$  linear unabhängig sind. Nach den Folgerungen aus Satz 15/Satz 18/Lemma 20 genügt es zu prüfen, dass die Determinante  $\det[b_1, b_2] = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  nicht 0 ist, was der Fall ist, weil  $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$  ist.

Die Transformationsmatrix haben wir definiert als diejenige Matrix deren Spalten die Koordinatenvektoren von  $b_i$  in der Basis  $(e_1, e_2)$  sind; also in unserem Bsp.  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Diese Matrix hat nach Konstruktion die Eigenschaft  $Te_1 = b_1$ ;  $Te_2 = b_2$ . Sei jetzt  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^2$ .

**Frage.** Welche Koordinaten hat der Vektor in der Basis  $(b_1, b_2)$ ?

**Antwort.** Nach Definition sind die Koordinaten die Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2$  sodass  $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = v$ . (\*)

Nach Konstruktion von  $T$  ist  $b_1 = Te_1$ ;  $b_2 = Te_2$ . Wir setzen dies in (\*) und bekommen  $\lambda_1 Te_1 + \lambda_2 Te_2 = v$ . Umformung gibt

$T(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = v$ . Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit  $T^{-1}$  und bekommen  $\underbrace{(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}} = T^{-1}v$ , wie wir im Satz 25

behauptet haben.

Rechnen wir jetzt das Transformationsgesetz in diesem Beispiel bis zum Ende aus. Wir berechnen  $T^{-1}$ , z.B. mit Leibnitz-...-Cramer Formeln:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen  $T^{-1}$  und  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  in die Formel oben ein und bekommen

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , also ist  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$  der Koordinatenvektor des Vektors  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  in der Basis  $(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ .

**Folgerung:** Sei  $f : V \rightarrow U$  eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von  $f$  bzgl. der Basen  $B_V$  (in  $V$ ) und  $B_U$  (in  $U$ ) sei  $A \in \text{Mat}(m, n)$ .

Seien  $B'_V, B'_U$  andere Basen in  $V$  bzw.  $U$ ,  $T_U, T_V$  die Transformationsmatrizen. Dann gilt:

Die darstellende Matrix von  $f$  bzgl. der Basen  $B'_V, B'_U$  ist  $A' := T_U^{-1}AT_V$ .

**Beweis:**  $A$  ist darstellende Matrix  $\iff$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\begin{array}{rcc}
 Ax & = & C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}(x) \\
 \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \underbrace{T_U^{-1}AT_V}_{A'} \underbrace{T_V^{-1}x}_y & = & \underbrace{T_U^{-1}C_{B_U}}_{C_{B'_U}} \circ f \circ \underbrace{(C_{B_V})^{-1}(T_V T_V^{-1}x)}_{(T_V^{-1}C_{B_V})^{-1} y}
 \end{array}$$

Wir Multiplizieren von links mit  $T_U^{-1}$  und benutzen, dass  $T_V T_V^{-1} = \text{Id}$ .

Also,  $\forall y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $A'y = C_{B'_U} \circ f \circ (C_{B'_V})^{-1}(y)$ , □

# Beweis der Folgerung aus Satz 25 in Worten

Seien  $f : V \rightarrow U$  linear,  $B_V$  und  $B'_V$  zwei Basen in  $V$  mit der Transformationsmatrix  $T_V$  sowie  $B_U$  und  $B'_U$  zwei Basen in  $U$  mit der Transformationsmatrix  $T_U$ . Wir nehmen an, dass  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(U) = m$ .

Ferner sei  $A \in \text{Mat}(m, n)$  die darstellende Matrix von  $f$  bzgl.  $B_V$  und  $B_U$ ,

d.h.,  $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$Ax = C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}(x) \quad (*)$$

Außerdem wissen wir nach Satz 25, dass  $\forall v \in V$  und  $\forall u \in U$  gilt:

$$C_{B'_V}(v) = T_V^{-1} \underbrace{C_{B_V}(v)}_{\in \mathbb{R}^n} \quad \text{und} \quad C_{B'_U}(u) = T_U^{-1} \underbrace{C_{B_U}(u)}_{\in \mathbb{R}^m}. \quad (**)$$

Wir „invertieren“ (nach Coxeter) die 1. Formel in  $(**)$  und bekommen

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \left(C_{B'_V}\right)^{-1}(x) = (C_{B_V})^{-1}(T_V x). \quad (***)$$

Jetzt benutzen wir (\*), (\*\*) und (\*\*\*) um die darstellende Matrix von  $f$  bzgl.  $B'_V$  und  $B'_U$  zu „basteln“.

Nach Definition ist die Matrix  $A' \in \text{Mat}(m, n)$  eine Matrix, sodass  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$A'x = C_{B'_U} \circ f \circ (C_{B'_V})^{-1}(x).$$

Wir setzen die Formeln für  $C_{B'_U}$  und  $(C_{B'_V})^{-1}$  aus (\*\*\*) und (\*\*\*) ein und bekommen:

$$A'x = \underbrace{T_U^{-1} C_{B_U}}_{C_{B'_U}} \circ f \circ \underbrace{(C_{B_V})^{-1}}_{(C_{B'_V})^{-1}}(T_V x).$$

Jetzt benutzen wir, dass nach (\*) die Abbildung  $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}$  Vektoren mit der Matrix  $A$  multipliziert.

D.h.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $A'x = T_U^{-1} A T_V x$  wie behauptet. □

**Satz 26.** Sei  $f : V \rightarrow U$  eine lineare Abbildung;  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(U) = m$ . Dann gilt: es gibt eine Basis  $B_V$  in  $V$  und  $B_U$  in  $U$ , sodass die Matrix der Abbildung die Form  $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} =$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right) \leftarrow k\text{-te Zeile}$$

bezüglich dieser Basen hat. (Automatisch muss  $k + r = m$  und  $k + p = n$  gelten).

**Beweis.** Der Beweis wiederholt einen wesentlichen Teil des Beweises von Satz 12(c) (1. Dimensionsformel).

$\text{Kern}_f$  ist ein Untervektorraum des endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  und ist deswegen auch nach Folgerung (d) aus Satz 10 endlichdimensional. Sei  $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$  eine Basis von  $\text{Kern}_f$ . Nach Folgerung (c) können wir die Basis  $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$  zu einer Basis in  $V$  ergänzen: es gibt  $b_1 := v_{n-k+1}, \dots, b_k := v_n$  so dass  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis in  $V$  ist.

In Beweis von Satz 12(c) haben wir gezeigt, dass  $\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  eine Basis in  $\text{Bild}_f \subseteq U$  ist. Wir wiederholen die Schritte des Beweises.

$\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  ist eine Basis in  $Bild_f \subseteq U$

$\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  erzeugend in  $Bild_f$  ist weil  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  ist erzeugend, und  $f(v_1) = \dots = f(v_{n-k}) = \vec{0}$ .

$\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  ist linear unabhängig, weil sonst für bestimmte  $(\lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$  gilt

$$\lambda_{n-k+1}f(v_{n-k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}. \quad (*)$$

Wegen der Linearität von  $f$  ist dann  $f(\lambda_{n-k+1}v_{n-k+1} + \dots + \lambda_n v_n) = \vec{0}$ , folglich  $\lambda_{n-k+1}v_{n-k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in Kern_f$ .

Dann hat der Vektor  $w := \lambda_{n-k+1}v_{n-k+1} + \dots + \lambda_n v_n$  zwei Darstellungen als Linearkombination von paarweise verschiedenen Basisvektoren der Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ :

$$w = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{n-k} + \lambda_{n-k+1}v_{n-k+1} + \dots + \lambda_n v_n \quad \text{nach Definition}$$

$$w = \mu_1 \cdot v_1 + \dots + \mu_{n-k}v_{n-k} + 0 \cdot v_{n-k+1} + \dots + 0v_n \quad \text{weil } w \in Kern_f$$

Da die Darstellung von  $w$  als Linearkombination von paarweise verschiedenen Basisvektoren nach Satz 7(b) eindeutig ist, ist

$\lambda_{n-k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ , also sind die Vektoren  $\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  linear unabhängig.



Also ist  $\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  eine Basis in  $Bild_f \subseteq U$ . Insbesondere gilt, dass  $\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\} \subseteq U$  linear unabhängig ist. Dann kann man  $\{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)\}$  zu einer Basis ergänzen (Folg. (c) aus dem Austauschsatz): es gibt Vektoren  $u_1, \dots, u_{m-k}$ , sodass das  $m$ -Tupel  $B_U = (\underbrace{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)}_{k \text{ Vektoren}}, \underbrace{u_1, \dots, u_{m-k}}_{m-k \text{ Vektoren}})$  ein Basis-Tupel ist.

Als Basis-Tupel in  $V$  nehmen wir

$B_V := (\underbrace{b_1 := v_{n-k+1}, \dots, b_k := v_n}_{k \text{ Vektoren}}, \underbrace{v_1, \dots, v_{n-k}}_{n-k \text{ Vektoren}})$ . Ich behaupte, dass die

darstellende Matrix von  $f$  bzgl. dieser Basis gleich

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & 1 & \\ & & & & & \end{array} \right) \leftarrow k\text{-te Zeile} \quad \text{ist.}$$

In der Tat, die erste Spalte der Matrix ist nach Satz 13 der Koordinatenvektor von  $f(b_1)$  in der Basis

$B_U = (f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n), u_1, \dots, u_{m-k})$ .

Aber  $b_1 = v_{n-k+1}$  und

$f(b_1) = f(v_{n-k+1}) = 1 \cdot f(v_{n-k+1}) + 0 \cdot f(v_{n-k+2}) + \dots$ . Dann ist

$e_1 \in \mathbb{R}^m$  der Koordinatenvektor von  $f(b_1)$ , also ist die erste Spalte der Matrix wie wir behaupten.

$$B_V := \left( \underbrace{b_1 := v_{n-k+1}, \dots, b_k := v_n}_{k \text{ Vektoren}}, \underbrace{v_1, \dots, v_{n-k}}_{m-k \text{ Vektoren}} \right).$$

$$B_U = \left( \underbrace{f(v_{n-k+1}), \dots, f(v_n)}_{k \text{ Vektoren}}, \underbrace{u_1, \dots, u_{m-k}}_{m-k \text{ Vektoren}} \right)$$

Dasselbe für  $b_2 = v_{n-k+2}$ : wir haben

$f(b_2) = f(v_{n-k+2}) = 0 \cdot f(v_{n-k+1}) + 1 \cdot f(v_{n-k+2}) + \dots$ , also ist  $e_2 \in \mathbb{R}^m$  der Koordinatenvektor von  $f(b_2)$ , wie wir behauptet haben.

Dasselbe für alle  $i$  von 1 bis  $k$ : die Spalten von 1 bis  $k$  sind wie wir behaupten.

Jetzt die Spalten ab  $k$ : der  $k+1$ -te Basisvektor ist  $v_1$ ; dann ist die  $k+1$ -te Spalte unserer Matrix der Koordinatenvektor von  $f(v_1)$ . Aber  $v_1 \in \text{Kern}_f$ . Deswegen ist  $f(v_1) = \vec{0}$  und  $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$  der Koordinatenvektor von  $f(v_1)$ . Dann ist die  $k+1$ -te Spalte unserer Matrix eine 0-Spalte, wie wir behaupten. Dasselbe gilt für alle Basisvektoren ab  $k$ . Also ist die darstellende Matrix wie wir behaupten.  $\square$

**Bemerkung.** Man bemerke auch, dass die Zahl  $k$  (in  $Id_{k,k}$ ) einen geometrischen Sinn hat: Sie ist die Dimension des Bildes  $Bild_f(V)$ .

Satz 26 sagt uns, dass wir für eine beliebige lineare Abbildung  $f : V \rightarrow U$  (wobei  $\dim(V) = n$  und  $\dim(U) = m$  sind) Basen  $B_V$  in  $V$  und  $B_U$  in  $U$  so wählen können, dass die Matrix der Abbildung die folgende einfache Form hat:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \hline & & & \end{array} \right) \leftarrow k\text{-te Zeile}$$

Der einzige wesentliche Parameter hier ist die Zahl  $k$ , weil man die Zahlen  $p$  und  $r$  aus  $k + r = m$  und  $k + p = n$  bekommt. Wie wir oben gesehen haben, ist  $k = \dim(\text{Bild}_f)$ .

**Frage.** Wie bestimmt man die Zahl  $k = \dim(\text{Bild}_f)$ ? Zum Beispiel in dem Fall wenn die Abbildung  $f$  gleich  $f_A$  (=Multiplikation mit einer  $(m \times n)$ -Matrix  $A$ ) ist?

Sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m, n)$

**Def** **Rang** der Matrix  $A$  (Bezeichnung:  $rk$ ) ist die Dimension von  $\text{span} \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \right)$  in  $\mathbb{R}^m$ .

**Bsp:** Rang der  $\mathbf{0}$ -Matrix ist gleich 0 (weil  $\text{span}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$ ).

**Bsp:** Rang der  $(n \times n)$   $Id$ -Matrix ist gleich  $n$ .

Tatsächlich, die Spalten sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  und damit die

Standard-Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$ .

**Bsp.**  $A := \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ , wobei  $Id_{k,k}$  die  $(k \times k)$ -Einheits-Matrix ist und  $\mathbf{0}_{k,p}$ ,  $\mathbf{0}_{r,k}$ ,  $\mathbf{0}_{r,p}$   $(k \times p)$ - bzw.  $(r \times k)$ - bzw.  $(r \times p)$ -Matrizen sind, deren Einträge alle gleich 0 sind.

$$A := \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & & & & \end{array} \right) \leftarrow k\text{-te Zeile}$$

Dann ist  $rk(A) = k$  (Weil die ersten  $k$  Spalten die Standard-Basisvektoren  $e_1, \dots, e_k$ , und die anderen  $\vec{0}$  sind.)

# Geometrische Bedeutung des Rangs

**Lemma 22.**  $rk(A) = \dim(\text{Bild}_{f_A})$

**Beweis.**  $\text{Bild}_{f_A} = \{Av \mid \text{wobei } v \in \mathbb{R}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \mid \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

$= \{\lambda_1 A e_1 + \dots + \lambda_n A e_n \mid \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ .

Aber  $A e_j$  ist die  $j$ -te Spalte von  $A$ .

Dann ist  $\text{Bild}_{f_A} = \text{span} \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \right)$  und dessen Dimension ist  $rk(A)$ .

weil jedes  $v$  in der Form  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$  darstellbar ist

**Lemma 23** Seien  $B \in \text{Mat}(m, m)$ ,  $C \in \text{Mat}(n, n)$  nicht ausgeartet.

Dann gilt  $\text{rk}(BA) \stackrel{(i)}{=} \text{rk}(A) \stackrel{(ii)}{=} \text{rk}(AC)$  für jedes  $A \in \text{Mat}(m, n)$ .

In Worten: Multiplizieren von rechts oder links mit nicht ausgearteten Matrizen ändert den Rang nicht.

**Ich gebe zwei Beweise. Beweis 1:** Wir beweisen zuerst (i). Wir zeigen:

$\text{Kern}_{f_{BA}} = \text{Kern}_{f_A}$ . Tatsächlich, falls  $x \in \text{Kern}_{f_A}$ , dann

$$Ax = \vec{0} \xrightarrow{\text{Multipl. mit } B} BAx = \vec{0}, \text{ also } x \in \text{Kern}_{f_{BA}}.$$

Ähnlich, falls  $x \in \text{Kern}_{f_{BA}}$ , dann  $BAx = \vec{0}$ , dann  $B^{-1}BAx = B^{-1}\vec{0}$ , also  $Ax = \vec{0}$ , also  $x \in \text{Kern}_{f_A}$ . Dann ist  $\dim(\text{Kern}_{f_{BA}}) = \dim(\text{Kern}_{f_A})$ .

Nach der Dimensionsformel ist

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathbb{R}^n) & = & \dim(\text{Bild}_{f_A}) + \dim(\text{Kern}_{f_A}) \\ \parallel & & \parallel \\ \dim(\mathbb{R}^n) & = & \dim(\text{Bild}_{f_{BA}}) + \dim(\text{Kern}_{f_{BA}}) \end{array} .$$

Dann ist  $\dim(\text{Bild}_{f_A}) = \dim(\text{Bild}_{f_{BA}})$  und deswegen  $\text{rk}(A) = \text{rk}(BA)$ .

Wir beweisen jetzt (ii):  $rk(A) \stackrel{(ii)}{=} rk(AC)$  für jedes  $A \in Mat(m, n)$ .

$$Bild_{f_A} := \{Av \mid \text{wobei } v \in \mathbb{R}^n\}$$

$$Bild_{f_{AC}} := \{ACu \mid \text{wobei } u \in \mathbb{R}^n\}$$

Da  $C$  nicht ausgeartet ist, gibt es für jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  ein  $u \in \mathbb{R}^n$  mit  $Cu = v$ , nämlich  $u = C^{-1}v$ , und deswegen

$\{ACu \mid \text{wobei } u \in \mathbb{R}^n\} = \{Av \mid \text{wobei } v \in \mathbb{R}^n\}$  und schließlich

$$Bild_{f_A} = Bild_{f_{AC}}.$$

Also  $dim(Bild_{f_A}) \stackrel{\text{Lem. 22}}{=} rk(A) = rk(AC) \stackrel{\text{Lem. 22}}{=} dim(Bild_{f_{AC}})$ . □

## Beweis 2 von Lemma 23

**Lemma 23** Seien  $B \in \text{Mat}(m, m)$ ,  $C \in \text{Mat}(n, n)$  nicht ausgeartet.

Dann gilt  $\text{rk}(BA) \stackrel{(i)}{=} \text{rk}(A) \stackrel{(ii)}{=} \text{rk}(AC)$  für jedes  $A \in \text{Mat}(m, n)$ .

**Beweis 2.** Wir zeigen, dass  $\text{rk}(BAC) = \text{rk}(A)$ . (Die Aussage (i) bekommt man, wenn man  $C = Id$  setzt. Die Aussage (ii) bekommt man wenn man  $B = Id$  setzt.)

Wir betrachten Basen  $B'_V = (v'_1, \dots, v'_n)$  (in  $V$ ) und  $B'_U = (u'_1, \dots, u'_m)$  (in  $U$ ), sodass die Transformationsmatrizen von der Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$  zu  $B'_V$  bzw.  $B'_U$  gerade  $C^{-1}$  bzw.  $B$  sind.

Solche Basen existieren: die Vektoren von  $B'_V$  sind die Spalten der Matrix  $C^{-1}$ , die Vektoren von  $B'_U$  sind die Spalten der Matrix  $B$ .

Ausserdem betrachten wir die Abbildung  $f = f_A$ .

Dann ist nach der Folgerung aus Satz 25 die darstellende Matrix von  $f$  bzgl. der neuen Basen gleich  $BA(C^{-1})^{-1} = BAC$ .

Nach Lemma 22 ist  $\text{rk}(A) = \dim(\text{Bild}_f)$ . Da die Abbildung  $f$  in den Basen  $B'_U, B'_V$  die Matrix  $BA(C^{-1})^{-1} = BAC$  hat, gilt auch  $\text{rk}(BAC) = \dim(\text{Bild}_f)$ . □



**Folgerung** *Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.*

**Beweis.** Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach Lemma 23 ändert dies nicht den Rang. Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix ist dasselbe wie eine elementare Spaltenumformung. (Man kann das direkt nachrechnen) Nach Lemma 23 ändert dies den Rang nicht. □

## Wie berechnet man den Rang einer Matrix?

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, bringt man diese mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen in eine Form, bei der die von  $\vec{0}$  verschiedenen Spalten linear unabhängig sind.

Die Anzahl der Spalten die ungleich  $\vec{0}$  sind entspricht dann dem Rang der Matrix.

**Bsp.** 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also  $\text{Rang}=2$ .

## Bemerkung.

Mit Elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen kann man die Matrix in der Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \hline & & & \end{array} \right) \leftarrow k\text{-te Zeile}$$

bringen. Die Zahl  $k$  ist dann der Rank der Matrix.

**Folgerung 1.**  $rk(A) = rk(A^t)$ .

Beweis.  $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,r} \\ \mathbf{0}_{p,k} & \mathbf{0}_{p,r} \end{pmatrix}$ . □

**Folgerung 2.** Anzahl von linear unabhängigen Spalten einer Matrix ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen der Matrix.

**Beweis.** Transponieren ändern den Rank nicht, macht aber aus Spalten Zeilen und aus Zeilen Spalten.

# Rank der Matrix ist die grösste Dimension der quadratischen nichtausgearteten Untermatrix

Man betrachte eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m, n)$ . Seien

$i_1 < i_2 < \dots < i_{m'} \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j_1 < j_2 < \dots < j_{n'} \in \{1, \dots, n\}$ . Dann die zu  $i_1, \dots, i_{m'}$ ,  $j_1, \dots, j_{n'}$  zugeordnete **Untermatrix** von  $A$  ist die  $(m' \times n')$  Matrix, deren  $(p, q)$ -Eintrag ist gleich  $a_{i_p j_q}$ .

**Bsp.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = 3$ ,  $j_1 = 2$ ,  $j_2 = 4$ . Dann die

zugehörige Untermatrix ist die  $(2 \times 2)$ - Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$ .

**Folgerung 3.** Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

**Beweis.** Z.z.:

- (i)  $rk(A) \leq$  die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
- (ii)  $rk(A) \geq$  die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

**Folgerung 3.** Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(i)  $rk(A) \leq$  die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

**Beweis (i):** Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension  $rk(A)$  von  $A$ , deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.

Sei  $rk(A) = k$ . Da nach Folgerung 2  $rk(A) = \dim(\text{span}(\{[a_1], \dots, [a_m]\}))$ , kann man aus  $\{[a_1], \dots, [a_m]\}$  nach Satz 8  $k$  linear unabhängige Zeilen  $[a_{i_1}], [a_{i_2}], \dots, [a_{i_k}]$  auswählen.

**Bsp.** In  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ , kann man z.B.  $i_1 = 1, i_2 = 3$  setzen.

Sei  $A'$  die  $(k \times n)$ -Untermatrix, deren Zeilen  $i_1, \dots, i_k$  sind (bzw. Spalten  $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_n = n$ ). (Im Bsp.:  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ .) Nach Konstruktion ist  $rk(A') = k = rk(A)$ .

Da  $k = rk(A') = \dim \left( \text{span} \left( \left\{ \begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix} \right\} \right) \right)$ , kann man aus den

Spalten von  $A'$  nach Satz 8  $k$  linear unabhängige Spalten (mit Nummern meinetwegen  $j_1, \dots, j_k$ ) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit  $A''$ .

(Im Bsp.:  $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$ . Nach Konstruktion ist  $rk(A'') = k = rk(A)$ .)

Wir zeigen:  $\det(A'') \neq 0$ . Tatsächlich, die Spalten von  $A''$  sind linear unabhängig. Dann ist  $A''$  nichtausgeartet, folglich  $\det(A'') \neq 0$ . (i) ist bewiesen.

## Beweis (ii)

(ii):  $rk(A) \geq$  die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei  $A'$  eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension  $k$  von  $A$ ,  $i_1, \dots, i_k$  bzw.  $j_1, \dots, j_k$  seien die Nummern der ersprochenen Zeilen bzw. Spalten. Z.z.:  $rk(A) \geq k$ .

Angenommen,  $rk(A) < k$ . Dann sind jede  $k$  von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$  mit  $\lambda_1[a_{i_1}] + \dots + \lambda_k[a_{i_k}] = 0$ . Dann sind die Zeilen von  $A'$  linear abhängig, was widerspricht, dass die Matrix  $A'$  nichtausgeartet ist.  $\square$

## Weitere Beispiele.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

unabhängige Spalten; Rang = 3

Wir sehen 3 linear



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(B) = 2$$

Rechnen Sie bitte selbst  $\text{rk}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem  $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

( In Matrixform:  $Ax = b$ , wobei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  )

**Wiederholung** Die  $(m \times n)$  Matrix  $A$  heißt die **Koeffizientenmatrix** des Systems. Die  $(m \times (n + 1))$ -Matrix  $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$  heißt die **erweiterte Matrix**.

**Bezeichnung** Die erweiterte Matrix für die Gleichung  $Ax = b$  werden wir mit  $(A, b)$  bezeichnen.

**Satz 27** Man betrachte das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ . Dann gilt:

- (a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist.
- (b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei  $\tilde{x}$  eine Lösung des Systems. Dann liegt für jede Lösung  $x$  der Vektor  $x - \tilde{x}$  in  $\text{Kern}_{f_A}$  und für jedes  $v \in \text{Kern}_{f_A}$  ist  $\tilde{x} + v$  auch eine Lösung. In anderen Worten, die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v, \text{ wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in \text{Kern}_{f_A}\}.$$

# Hilfsaussage vor dem Beweis

**Hilfsaussage**  $rk(A) = rk((A, b)) \iff b$  ist eine Linearkombination der Spalten von  $A$ .

Beweis der Hilfsaussage  $\Leftarrow$ . Sei  $b$  eine Linearkombination der Spalten,

d.h.  $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ . Dann besteht

$span \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\} \right)$  aus allen Vektoren der Form

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} b =$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left( \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_{n+1}\mu_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}\mu_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \text{ Dann ist}$$

$span \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\} \right) = span \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \right)$ , also

$rk(A) = rk((A, b))$ .

**Hilfsaussage**  $rk(A) = rk((A, b)) \iff b$  ist eine Linearkombination der Spalten von  $A$ .

Beweis der Hilfsaussage  $\implies$

Die Spalten von  $A$  bilden eine erzeugende Menge in

$span \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \right)$ . Nach Satz 9 kann man aus den Spalten von

$A$  eine Basis  $B'$  von  $span \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \right)$  auswählen, nach Def. ist

die Anzahl der Elemente in der Basis gleich  $rk(A)$ .

Es genügt zu zeigen:  $b$  ist eine Linearkombination der Basiselemente aus  $B'$ . Widerspruchsbeweis. Angenommen  $b$  ist keine Linearkombination der Basiselemente. Dann ist die Menge  $B' \cup \{b\}$  linear unabhängig, weil in der Linearkombination

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$$

dann  $\mu = 0$  ist (sonst kann man  $b$  als eine Linearkombination von Elementen aus  $B'$  darstellen), und dann sind alle  $\lambda_i = 0$ , weil die  $b_i$  linear unabhängig sind.

Dann ist die Dimension von  $span \left( \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\} \right)$  mindestens

$rk(A) + 1$ . Widerspruch. □

Beweis des Satzes 27: (a):  $Ax = b$  ist lösbar  $\iff$  existiert ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff b$  ist eine Linearkombination der Spalten  $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff} rk(A) = rk((A, b))$ .

Beweis von (b): Seien  $\tilde{x}, x$  Lösungen von  $Ax = B$ . Dann ist  $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$ , also  $x - \tilde{x} \in \text{Kern}_{f_A}$ . Ferner gilt: ist  $v \in \text{Kern}_{f_A}$ , so ist  $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + \vec{0} = b$ , also ist  $\tilde{x} + v$  auch eine Lösung.  $\square$