

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Skript – Erste Vorlesungswoche

Prof. Dr. Vladimir Matveev
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Wintersemester 2026/27

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zum Skript	3
1 Lineare Gleichungssysteme und Beweismethoden	4
1.1 Einführung und Beweismethoden	4
1.2 Lineare Gleichungssysteme	4
1.3 Elementare Zeilenumformungen	5
1.4 Widerspruchsbeweis und vollständige Induktion	9
1.5 Stufenform und Gaußscher Satz	10
1.6 Gauß-Algorithmus und Rückwärtseinsetzen	15
2 Mengen und Abbildungen	19
2.1 Mengen und logische Schreibweisen	19
2.2 Abbildungen	21
3 Vektorräume	25
3.1 Definition und Axiome	25
3.2 Das Beispiel $\mathbb{R}^2$	26
3.3 Vergleich mit den Rechengesetzen in $\mathbb{R}$	29

Hinweise zum Skript

Dieses Skript begleitet die Vorlesung *Lineare Algebra und analytische Geometrie I*. Es enthält den Stoff der ersten Vorlesungswoche und ist als fortlaufendes Skript angelegt. Die Nummerierung der Sätze, Definitionen und Gleichungen erfolgt kapitelweise. Verweise auf Resultate und Gleichungen sind im PDF anklickbar und können zusätzlich die Seitenzahl angeben. Die organisatorischen Einzelheiten und aktuellen Übungsinformationen finden Sie auf der <https://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA26/>.

1 Lineare Gleichungssysteme und Beweismethoden

1.1 Einführung und Beweismethoden

In der Mathematik genügt es nicht, Aussagen zu kennen: Man muss sie verstehen, beweisen und die Beweise verständlich aufschreiben können. Wir werden insbesondere den direkten Beweis und die vollständige Induktion benutzen; auch den Widerspruchsbeweis lernen wir kennen.

1. *Direkter Beweis*: aus bekannten Aussagen durch logische Folgerungen eine neue Aussage herleiten.
2. *Widerspruchsbeweis*: die Negation der Behauptung annehmen und daraus einen Widerspruch ableiten.
3. *Vollständige Induktion*: zunächst den Anfang zeigen und dann von n auf $n + 1$ schließen.

Wir beginnen mit einem direkten Beweis über lineare Gleichungssysteme.

1.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Die Zahlen a_{ij} und b_i sind *bekannt* (vorgegeben). Gesucht sind die Zahlen $x_1, \dots, x_n$, die alle Gleichungen erfüllen.

Die x_j heißen *Unbekannte* oder *Variablen*. Die Zahlen a_{ij} heißen *Koeffizienten*, die b_i bilden die *rechten Seiten*.

Definition 1.1 (Lösung eines linearen Gleichungssystems). Ein Tupel $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt Lösung des Systems (S) , wenn $a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n = b_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt.

Ein Beispiel mit zwei Gleichungen

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4. \end{cases}$$

Hier sind $\boxed{m = 2}$ Gleichungen und $\boxed{n = 2}$ Unbekannte.

Die bekannten Koeffizienten und rechten Seiten lauten:

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{21} = 3, \quad a_{22} = -6, \quad b_1 = 8, \quad b_2 = 4.$$

Gesucht sind alle Paaren $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, das *beide* Gleichungen erfüllt.

Überprüfung einer Lösung

Eine *Lösung* von (S) ist ein geordnetes n -Tupel

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n,$$

so dass *alle* Gleichungen erfüllt sind:

$$a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Beispiel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4. \end{cases}$$

$(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ ist eine Lösung, denn

$$2 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 8, \quad 3 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

1.3 Elementare Zeilenumformungen

Definition 1.2 (Elementare Zeilenumformungen). Es gibt drei Typen elementarer Operationen an den Gleichungen eines Systems: Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen (Typ 1), Multiplikation einer Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl (Typ 2) und Vertauschen zweier Gleichungen (Typ 3).

Elementare Zeilenumformungen: Typ 1

Typ 1: Addiere das c -Fache der i -ten Gleichung zur k -ten Gleichung ($i \neq k$, $c \neq 0$).

$$\boxed{Z_k \leftarrow Z_k + cZ_i}$$

Ist die k -te Gleichung $\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = b_k$, so lautet sie danach

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj} + ca_{ij})x_j = b_k + cb_i.$$

Alle anderen Gleichungen bleiben unverändert. Das so entstehende System nennen wir $(S1)$.

Zeilenumformungen sind Operationen auf Systemen

Eine Zeilenumformung nimmt als *Eingabe* ein Gleichungssystem (S) und liefert ein *neues* Gleichungssystem $(S1)$.

Dabei sind die Daten m, n, a_{ij}, b_i des Ausgangssystems bekannt.

- Die Anzahl m der Gleichungen und n der Unbekannten bleiben gleich.
- Bei Typ 1 ändern sich nur die Koeffizienten und die rechte Seite der k -ten Gleichung:

$$a_{kj} \mapsto a_{kj} + ca_{ij} \quad (j = 1, \dots, n), \quad b_k \mapsto b_k + cb_i.$$

- Alle übrigen Gleichungen bleiben unverändert.

Auch Typ 2 und Typ 3 sind solche Operationen auf der Menge der Gleichungssysteme.

Typ 1: Beispiel

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$$

Wir ersetzen Z_2 durch $Z_2 - \frac{3}{2}Z_1$:

$$\xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{3}{2}Z_1} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ -12x_2 = -8. \end{cases}$$

Man merke: ich habe " $0 \cdot x_1$ " in der zweiten Spalte nicht geschrieben. Formal sollte ich $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 0x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$ schreiben.

Das ist rein kosmetisch: in einigen Fällen (und sie bekommen später die Intuition wann) schreiben wir die Summanten mit 0-Koeffizient nicht.

In diesem Fall werden wir damit hervorheben, dass der Wert der Variablen x_1 in der zweiten Gleichung nicht wichtig ist, weil mit 0 multipliziert wird.

Elementare Zeilenumformungen: Typ 2

Typ 2: Multipliziere die k -te Gleichung mit $c \neq 0$.

$$\boxed{Z_k \leftarrow cZ_k}$$

Die k -te Gleichung wird zu

$$\sum_{j=1}^n ca_{kj}x_j = cb_k.$$

Die übrigen Gleichungen bleiben unverändert. Das neue System heißt $(S2)$.

Beispiel: Multipliziere die zweite Gleichung mit $-\frac{1}{12}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ -12x_2 = -8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ x_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Man merke: Wir haben, kosmetisch, statt $1x_2$ nur x_2 geschrieben.

Elementare Zeilenumformungen: Typ 3

Typ 3: Vertausche zwei Gleichungen Z_i und Z_k ($i \neq k$).

$$\boxed{Z_i \longleftrightarrow Z_k}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Wir bezeichnen das vertauschte System mit $(S3)$.

Frage: Verändern diese Operationen die Lösungsmenge?

Satz 1.3 (Erhaltung von Lösungen). *Ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung von (S) , so ist dieses Tupel auch eine Lösung jedes aus (S) durch eine elementare Zeilenumformung entstehenden Systems $(S1)$, $(S2)$ oder $(S3)$.*

Beweis. Wir führen die Argumentation zunächst für Typ 1 und dann für Typ 2 und Typ 3.

Beweis für Typ 1 im allgemeinen Fall (1)

Annahme: $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ sei eine Lösung von (S) .

Zu zeigen: Dieses Tupel erfüllt auch alle Gleichungen von $(S1)$.

Insbesondere sind die i -te und die k -te Gleichung von (S) erfüllt:

$$\begin{aligned} a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n &= b_i, \\ a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n &= b_k. \end{aligned}$$

Wir addieren das c -Fache der ersten dieser beiden Gleichungen zur zweiten.

Beweis für Typ 1 im allgemeinen Fall (2)

Wir erhalten

$$\begin{aligned} (a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n) \\ + c(a_{i1}\bar{x}_1 + \dots + a_{in}\bar{x}_n) &= b_k + cb_i. \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassen der Terme:

$$(a_{k1} + ca_{i1})\bar{x}_1 + \dots + (a_{kn} + ca_{in})\bar{x}_n = b_k + cb_i.$$

Das ist die neue k -te Gleichung von $(S1)$, mit $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eingesetzt.

Die übrigen Gleichungen sind unverändert und daher ebenfalls erfüllt. Somit ist unser Tupel auch eine Lösung von $(S1)$.

Beweis für Typ 2 (1)

Annahme: $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S) .

Zu zeigen: Es ist auch eine Lösung von $(S2)$.

Wir betrachten die k -te Gleichung von $(S2)$. Setzen wir unser Tupel ein, müssen wir zeigen, dass

$$(*) \quad ca_{k1}\bar{x}_1 + \dots + ca_{kn}\bar{x}_n = cb_k$$

gilt.

Warum stimmt diese Gleichung?

Beweis für Typ 2 (2)

Aufgrund des Distributivgesetzes ist die linke Seite von $(*)$ gleich

$$c(a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n).$$

Da $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung von (S) ist, gilt

$$a_{k1}\bar{x}_1 + \dots + a_{kn}\bar{x}_n = b_k.$$

Somit ist $(*)$ erfüllt. Die anderen Gleichungen von $(S2)$ stimmen mit denen von (S) überein und sind ebenfalls erfüllt.

Also ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Lösung von $(S2)$.

Beweis für Typ 3

Annahme: $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S) .

Zu zeigen: Es ist auch eine Lösung von $(S3)$.

Man könnte dies direkt nachprüfen: Die beiden vertauschten Gleichungen waren bereits erfüllt, und alle anderen Gleichungen sind unverändert.

Wir wählen aber einen *anderen Beweis*, wie in der ursprünglichen Vorlesung: Wir führen die Vertauschung auf Operationen der Typen 1 und 2 zurück, für die wir die Aussage schon bewiesen haben.

Typ 3: Vertauschung zweier Gleichungen

Wir schreiben nur die beiden betroffenen Gleichungen ausdrücklich; die *anderen Gleichungen bleiben in jedem Schritt unverändert*.

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ziel: Die *i-te Gleichung* und die *j-te Gleichung* vertauschen, ohne eine Operation vom Typ 3 zu verwenden.

Typ 3 durch bekannte Operationen (1)

Schritt 1: $Z_j \leftarrow Z_j + Z_i$ (Typ 1).

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ (a_{j1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + a_{in})x_n = b_j + b_i \\ \vdots \end{array} \right.$$

Schritt 2: $Z_i \leftarrow Z_i - Z_j$ (Typ 1; mit der neuen *j*-ten Gleichung).

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ -a_{j1}x_1 - \cdots - a_{jn}x_n = -b_j \\ \vdots \\ (a_{j1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + a_{in})x_n = b_j + b_i \\ \vdots \end{array} \right.$$

Alle durch $\vdots$ bezeichneten Gleichungen bleiben unverändert.

Typ 3 durch bekannte Operationen (2)

Schritt 3: $Z_j \leftarrow Z_j + Z_i$ (Typ 1).

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ -a_{j1}x_1 - \cdots - a_{jn}x_n = -b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \end{array} \right.$$

Schritt 4: $Z_i \leftarrow -Z_i$ (Typ 2).

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \end{array} \right.$$

Die beiden Gleichungen sind vertauscht, alle übrigen sind unverändert. Daher folgt Typ 3 aus Typ 1 und Typ 2. □

Typ 1 – ein konkretes Beispiel (1)

Wir erinnern uns an die Umformung

$$(S) \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{3}{2}Z_1} (S1) \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ -12x_2 = -8. \end{cases}$$

Frage: Warum ist *jede* Lösung von (S) auch eine Lösung von $(S1)$?

Nehmen wir eine beliebige Lösung $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ von (S) . Nach Definition gelten

$$2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 = 8, \quad 3\bar{x}_1 - 6\bar{x}_2 = 4.$$

Was müssen wir zeigen? Dass das *gleiche Tupel* auch die beiden Gleichungen von $(S1)$ erfüllt.

Typ 1 – ein konkretes Beispiel (2)

Die erste Gleichung ist unverändert; sie gilt also bereits.

Aus den beiden Gleichungen von (S) folgt

$$(3\bar{x}_1 - 6\bar{x}_2) - \frac{3}{2}(2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2) = 4 - \frac{3}{2} \cdot 8, \\ -12\bar{x}_2 = -8.$$

Dies ist genau die zweite Gleichung von $(S1)$ mit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ eingesetzt.

Schluss: Jedes Tupel, das (S) löst, löst auch $(S1)$. Wir haben nicht nur eine einzelne Lösung überprüft, sondern mit einer *beliebigen* Lösung argumentiert.

Folgerung 1.4 (Gleichheit der Lösungsmengen). *Elementare Zeilenumformungen verändern die Lösungsmenge nicht.*

Beweis. Jede der drei Operationen kann durch elementare Operationen rückgängig gemacht werden: Typ 1 mit $-c$, Typ 2 mit $1/c$ und Typ 3 durch erneutes Vertauschen. Auf beide Richtungen wenden wir [Satz 1.3 \(S. 6\)](#) an. □

1.4 Widerspruchsbeweis und vollständige Induktion

Widerspruchsbeweis: Unendlich viele Primzahlen



Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Setze $m = p_1 \cdots p_n$. Jeder Primteiler von $m + 1$ ist verschieden von allen p_i , da er andernfalls sowohl m als auch $m + 1$ und somit 1 teilen würde. Widerspruch.

Vollständige Induktion

Induktion dient oft zum Beweis einer Aussage $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n ab einem Anfangswert n_0 .

1. *Induktionsanfang (IA)*: Zeige $P(n_0)$.
2. *Induktionsvoraussetzung (IV)*: Nimm an, dass $P(n)$ gilt.
3. *Induktionsschritt (IS)*: Beweise daraus $P(n+1)$.

Das erinnert an einen Dominoeffekt: Der erste Stein fällt, und jeder fallende Stein stößt den nächsten an.

Induktion als Dominoeffekt



Picture from Wikipedia common

- Induktionsanfang: Der erste Stein fällt.
- Induktionsschritt: Fällt Stein n , so fällt auch Stein $n+1$.

1.5 Stufenform und Gaußscher Satz

Anschauliche Idee: Die Gleichungen bilden eine *Treppe*.

- In der ersten Gleichung beginnt die Rechnung weiter links.
- In jeder folgenden nichttrivialen Gleichung beginnt sie weiter rechts.
- Gleichungen mit lauter Nullkoeffizienten stehen am Ende.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 0x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1. \end{cases}$$

Nun *formalisieren* wir diese Vorstellung durch eine genaue Definition. So können wir danach auch *formal beweisen*, dass jedes System in diese Form gebracht werden kann.

Definition 1.5 (Stufenform). Ein lineares Gleichungssystem heißt in *Stufenform*, wenn die jeweils erste Variable mit nichtverschwindendem Koeffizienten in jeder folgenden nichttrivialen Gleichung weiter rechts steht und Gleichungen mit lauter Nullkoeffizienten nur am Ende vorkommen. Äquivalent dazu gelten die drei in den folgenden Formeln beschriebenen Bedingungen (a)–(c).

Formale Bedingungen

Definition 1. Das System (S) hat *Stufenform*, wenn für $i = 1, \dots, m - 1$ gilt:

(a) Aus $a_{i1} = \dots = a_{ik} = 0$ für ein $1 \leq k < n$ folgt

$$a_{i+1,1} = \dots = a_{i+1,k+1} = 0.$$

(b) Aus $a_{i1} = \dots = a_{in} = 0$ folgt

$$a_{i+1,1} = \dots = a_{i+1,n} = 0.$$

(c) Ist $a_{i1} \neq 0$, dann ist $a_{i+1,1} = 0$.

Stufenform: Beispiele und Gegenbeispiele

Definition (zur Erinnerung). Die erste nichtverschwindende Variable jeder nichttrivialen Gleichung steht weiter rechts als in der vorherigen; eine Gleichung mit lauter Nullkoeffizienten darf nur vor weiteren solchen Gleichungen stehen.

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

Nicht in Stufenform:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 2. \end{array} \right.$$

(a) *verletzt*: Die zweite Gleichung beginnt weiter links als die erste.

Stufenform: Gegenbeispiel mit einer Nullzeile

Definition (zur Erinnerung). Nach einer Gleichung mit lauter Nullkoeffizienten dürfen nur weitere Gleichungen mit lauter Nullkoeffizienten stehen.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2. \end{array} \right.$$

(b) *verletzt*: Auf eine Nullzeile folgt eine Gleichung, in der der Koeffizient vor x_3 von null verschieden ist.

Stufenform: Weitere Gegenbeispiele**Beispiel 1:**

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

(c) verletzt: Die ersten beiden Gleichungen enthalten einen von null verschiedenen Koeffizienten vor x_1 .

Beispiel 2:

$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_4 = 2, \\ 4x_3 = 3. \end{cases}$$

(a) verletzt: Die dritte Gleichung beginnt bei x_3 statt rechts von x_4 .

Stufenform: Welche Koeffizienten sind erlaubt?

Definition (Wiederholung). Ein Gleichungssystem ist in Stufenform, wenn für benachbarte Gleichungen gilt: (a) Sind in Gleichung i die ersten k Koeffizienten null, so sind in Gleichung $i + 1$ mindestens die ersten $k + 1$ null; (b) unter einer Gleichung mit lauter Nullkoeffizienten stehen nur solche Gleichungen; (c) ist $a_{i1} \neq 0$, dann ist $a_{i+1,1} = 0$.

Die ersten beiden Gleichungen sind bereits in Stufenform:

$$\begin{cases} \boxed{2}x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \boxed{4}x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 2. \end{cases}$$

Frage: Welche Werte dürfen a, b, c, d, e haben, damit das gesamte Gleichungssystem in Stufenform ist?

Stufenform: Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 2. \end{cases}$$

Antwort: $a = b = 0$; die Koeffizienten $c, d, e \in \mathbb{R}$ sind beliebig.

Warum? In der zweiten Gleichung ist der Koeffizient von x_1 null. Nach (a) müssen deshalb in der dritten Gleichung die Koeffizienten von x_1 und x_2 null sein.

Die rechte Seite ($= 2$) spielt für die Stufenform keine Rolle.

Satz 1.6 (Satz von Gauß). *Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Stufenform bringen.*

*Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Gleichungen. **Induktionsanfang und -voraussetzung***

Induktionsanfang ($m = 1$): Jedes System, das aus nur einer Gleichung besteht, ist bereits in Stufenform.

Induktionsvoraussetzung: Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen lässt sich durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Stufenform bringen.

Zu zeigen: Das gilt auch für Systeme aus $m + 1$ Gleichungen.

Die erste nichtverschwindende Spalte

Wir betrachten ein System mit $m + 1$ Gleichungen. Sei k die erste Stelle, an der *mindestens einer* der Koeffizienten $a_{1k}, \dots, a_{m+1,k}$ von null verschieden ist.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0x_1 + \dots + 0x_{k-1} & +a_{1k}x_k & +a_{1,k+1}x_{k+1} & + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \dots + 0x_{k-1} & +a_{2k}x_k & +a_{2,k+1}x_{k+1} & + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0x_1 + \dots + 0x_{k-1} & +a_{m+1,k}x_k & +a_{m+1,k+1}x_{k+1} & + \dots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1}. \end{array} \right.$$

Blau: In allen Gleichungen verschwinden die Koeffizienten vor $x_1, \dots, x_{k-1}$. Falls *alle* Koeffizienten null sind, ist das System bereits in Stufenform.

Beispiel für die Wahl von k

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2, \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1. \end{array} \right.$$

Alle Koeffizienten vor x_1 sind null. Bei x_2 gibt es dagegen nichtverschwindende Koeffizienten. Also ist $\boxed{k = 2}$.

k kann auch gleich 1 sein

Zweites Beispiel: Ein System mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 0x_1 + 4x_2 = 1. \end{array} \right.$$

Schon in der *ersten Spalte* steht der von null verschiedene Koeffizient 2.

$$\boxed{k = 1}.$$

Bemerkung: Selbstverständlich kann $k = 1$ sein.

Die erste Gleichung wählen

Nach der Wahl von k gibt es mindestens ein j mit $a_{jk} \neq 0$. Falls $a_{1k} = 0$, vertauschen wir die erste Gleichung mit einer solchen j -ten Gleichung (Typ 3).

Danach gilt $\boxed{a_{1k} \neq 0}$, und das System hat die Form

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0x_1 + \dots + 0x_{k-1} & +\boxed{a_{1k}}x_k & +a_{1,k+1}x_{k+1} & + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \dots + 0x_{k-1} & +a_{2k}x_k & +a_{2,k+1}x_{k+1} & + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0x_1 + \dots + 0x_{k-1} & +a_{m+1,k}x_k & +a_{m+1,k+1}x_{k+1} & + \dots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1}. \end{array} \right.$$

Nullen unter a_{1k} erzeugen

Für jede Gleichung $j \geq 2$ mit $a_{jk} \neq 0$ bilden wir

$$Z_j \leftarrow Z_j - \frac{a_{jk}}{a_{1k}} Z_1.$$

Der Koeffizient bei x_k in der neuen j -ten Gleichung ist

$$\underbrace{a_{jk}}_{\text{alter Koeffizient}} - \frac{a_{jk}}{a_{1k}} \underbrace{a_{1k}}_{\text{aus Gleichung 1}} = 0.$$

Ist $a_{jk} = 0$, bleibt Gleichung j unverändert. Auch die Koeffizienten vor x_k bleiben null, denn dort werden nur Nullen voneinander subtrahiert.

Was ist mit den Koeffizienten passiert?

Wir betrachten die zweite Gleichung:

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2. \end{cases}$$

Wir ersetzen Z_2 durch $Z_2 - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} Z_1$. Dabei wird der Koeffizient von x_k gleich

$$a_{2k} - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} a_{1k} = 0.$$

Deshalb lautet die neue zweite Gleichung:

$$0x_1 + \cdots + 0x_k + \tilde{a}_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2.$$

Hier sind $\tilde{a}_{2\ell} = a_{2\ell} - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} a_{1\ell}$ und $\tilde{b}_2 = b_2 - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} b_1$.

Konkretes Eliminationsbeispiel

$$\begin{cases} 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ x_3 = 2, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Für die dritte Gleichung nehmen wir $Z_3 \leftarrow Z_3 - \frac{1}{3}Z_1$:

$$1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0, \quad 0 - \frac{1}{3}(-5) = \frac{5}{3}, \quad 1 - \frac{1}{3} \cdot 6 = -1.$$

$$\begin{cases} 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ x_3 = 2, \\ 0x_2 + \frac{5}{3}x_3 = -1. \end{cases}$$

Jetzt greift die Induktion

Nach der Elimination hat unser System die folgende Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k + \tilde{a}_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k + \tilde{a}_{m+1,k+1}x_{k+1} + \cdots + \tilde{a}_{m+1,n}x_n = \tilde{b}_{m+1}. \end{array} \right.$$

Unteres System: Die letzten m Gleichungen bilden ein System aus genau m Gleichungen. Darauf wenden wir die Induktionsvoraussetzung an.

Abschluss des Induktionsschritts

Nach der Induktionsvoraussetzung können wir das Untersystem (Gleichungen 2 bis $m+1$) durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Stufenform bringen.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k + c_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k + c_{m+1,k+1}x_{k+1} + \cdots + c_{m+1,n}x_n = d_{m+1}. \end{array} \right.$$

Die Koeffizienten $c_{j\ell}$ und d_j entstehen bei der Umformung des unteren Systems. Dieses hat nun Stufenform.

Die Operationen betreffen nur die letzten m Gleichungen; dort bleiben die Koeffizienten von $x_1, \dots, x_k$ gleich null. Die erste Gleichung beginnt bei x_k , die nichttrivialen Gleichungen darunter frühestens bei x_{k+1} und sind untereinander in Stufenform.

Somit steht das gesamte System in Stufenform.

□

1.6 Gauß-Algorithmus und Rückwärtseinsetzen**Gauß-Algorithmus: Ausgangssystem**

Der Beweis liefert einen Algorithmus, um Gleichungssysteme in Stufenform zu bringen.

Beispiel:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 4, \\ \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 1. \end{array} \right.$$

Als Erstes eliminieren wir x_1 aus der zweiten und dritten Gleichung.

Gauß-Algorithmus: Erste Elimination

$$Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{3}{2}Z_1, \quad Z_3 \leftarrow Z_3 - \frac{1}{2}Z_1.$$

Wir erhalten

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Die erste Spalte enthält von null verschiedene Koeffizienten; wir können (und sollen) mit dieser Spalte beginnen. Da der Koeffizient vor x_1 in der ersten Gleichung schon $2 \neq 0$ ist, müssen wir die Zeilen nicht vertauschen (dürften es aber).

Gauß-Algorithmus: Stufenform

Jetzt führen wir aus:

$$Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2.$$

Das Ergebnis lautet, mit allen Nullkoeffizienten:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Das System ist in Stufenform. Weil alle verwendeten Zeilenumformungen umkehrbar sind, hat es genau dieselben Lösungen wie das Ausgangssystem.

Rückwärtseinsetzen: erst das Beispiel, dann die Regel

Ein Gleichungssystem in *Stufenform* kann man unmittelbar lösen, indem man die Gleichungen *von unten nach oben* betrachtet.

Wir erklären dieses Verfahren zuerst *an unserem Beispiel*. Danach formulieren wir den allgemeinen Algorithmus und begründen, warum er alle Lösungen liefert.

Rückwärtseinsetzen: x_3 und x_2

Wir setzen $x_4 = r$ mit einem beliebigen $r \in \mathbb{R}$.

Aus der dritten Gleichung folgt

$$-2x_3 + 2r = -1 \quad \implies \quad x_3 = r + \frac{1}{2}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$x_2 - x_3 = 1 \quad \implies \quad x_2 = r + \frac{3}{2}.$$

Rückwärtseinsetzen: x_1

Die erste Gleichung ergibt

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2,$$

also

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4.$$

Einsetzen von $x_2 = r + \frac{3}{2}$, $x_3 = r + \frac{1}{2}$ und $x_4 = r$ liefert

$$x_1 = -7r - 3.$$

Alle Lösungen des Ausgangssystems

Wir erhalten die Lösungsmenge

$$\left\{ \left(-7r - 3, r + \frac{3}{2}, r + \frac{1}{2}, r \right) : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jeder Wert $r \in \mathbb{R}$ ergibt eine Lösung des Systems in Stufenform, und jede Lösung entsteht auf diese Weise.

Da elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge nicht ändern, sind dies *genau alle Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems*.

Warum ist jedes Tupel tatsächlich eine Lösung?

Wir setzen für ein *beliebiges* $r \in \mathbb{R}$ das Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-7r - 3, r + \frac{3}{2}, r + \frac{1}{2}, r \right)$$

in **jede der drei Gleichungen in Stufenform** ein.

$$3. \text{ Gleichung: } -2 \left(r + \frac{1}{2} \right) + 2r = \boxed{-1},$$

$$2. \text{ Gleichung: } \left(r + \frac{3}{2} \right) - \left(r + \frac{1}{2} \right) = \boxed{1}.$$

Auch die erste Gleichung muss noch überprüft werden.

Probe: Die erste Gleichung

Für die erste Gleichung gilt

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ &= 2(-7r - 3) + 4 \left(r + \frac{3}{2} \right) + 4 \left(r + \frac{1}{2} \right) + 6r \\ &= (-14r + 4r + 4r + 6r) + (-6 + 6 + 2) \\ &= \boxed{2}. \end{aligned}$$

Damit erfüllt **jedes** Tupel dieser Form alle drei Gleichungen und ist somit eine Lösung.

Warum gibt es keine weiteren Lösungen? Jede Lösung hat irgendeinen Wert $x_4 = r$. Die dritte, zweite und erste Gleichung bestimmen dann nacheinander x_3 , x_2 und x_1 eindeutig. Damit ist die Lösungsmenge vollständig bestimmt.

Algorithmus 1.7 (Rückwärtseinsetzen). **Algorithmus: Rückwärtseinsetzen (1)**

Gegeben: Ein lineares Gleichungssystem in Stufenform.

Schritt 1: Prüfen, ob eine Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad b \neq 0,$$

vorkommt. In diesem Fall hat das System *keine Lösung*.

Schritt 2: Wir nennen die erste Variable mit einem von null verschiedenen Koeffizienten in einer Gleichung ihre *führende Variable*.

Variablen, die in keiner Gleichung führend sind, heißen *freie Variablen*. Ihnen geben wir beliebige reelle Werte (Parameter).

Algorithmus: Rückwärtseinsetzen (2)

Schritt 3: Wir beginnen mit der letzten Gleichung, deren linke Seite nicht identisch null ist.

Da die Werte aller Variablen rechts von ihrer führenden Variablen schon bekannt sind, können wir diese führende Variable *eindeutig bestimmen*.

Schritt 4: Wir gehen zur vorherigen Gleichung. Wieder sind die Variablen rechts von der führenden Variablen bereits bestimmt. Wir bestimmen nun diese führende Variable.

So fahren wir fort, bis wir die erste Gleichung erreicht haben.

Ergebnis. Für jede Wahl der freien Parameter erhalten wir ein Tupel von Zahlen.

Satz 1.8 (Korrektheit des Rückwärtseinsetzens). *Ist ein Gleichungssystem in Stufenform lösbar, so erzeugt das Rückwärtseinsetzen für jede Wahl der freien Parameter eine Lösung. Umgekehrt lässt sich jede Lösung durch eine solche Parameterwahl erhalten.*

Beweis. **Existenz der konstruierten Lösungen**

Wir müssen zeigen, dass das konstruierte Tupel **alle Gleichungen** erfüllt.

Die unterste nichttriviale Gleichung ist erfüllt, weil wir ihre führende Variable gerade so bestimmt haben.

Bei der vorherigen Gleichung bestimmen wir eine neue Variable so, dass auch diese Gleichung erfüllt wird.

Warum bleibt die untere Gleichung erfüllt? Wegen der Stufenform hat die neu bestimmte Variable in allen darunterliegenden Gleichungen den Koeffizienten null.

Indem wir so von unten nach oben vorgehen, erfüllen wir schließlich alle Gleichungen. Auch die Gleichungen $0 = b$ mit $b = 0$ sind automatisch erfüllt.

Warum erhalten wir *alle* Lösungen?

Sei $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine **beliebige** Lösung des Systems.

Wir wählen die freien Parameter gleich den entsprechenden Komponenten dieses Lösungstupels.

Die unterste nichttriviale Gleichung bestimmt ihre führende Variable eindeutig. Daher muss der durch den Algorithmus berechnete Wert gleich der entsprechenden Komponente von $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ sein.

Dasselbe Argument wenden wir nacheinander auf alle darüberliegenden Gleichungen an. Somit erhalten wir genau das vorgegebene Lösungstupel.

Folgerung. Ist das System lösbar, so beschreibt das Rückwärtseinsetzen mit freien Parametern *genau alle Lösungen*.

□

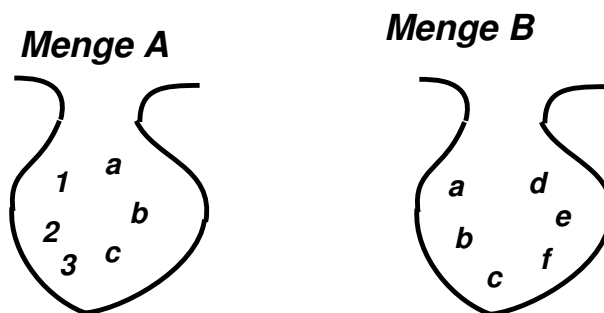
2 Mengen und Abbildungen

2.1 Mengen und logische Schreibweisen

Exkurs in die Mengenlehre: Mengen und Elemente

Der Begriff *Menge* wird hier nicht formal definiert.

Anschaulich: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten. Diese Objekte heißen *Elemente*. Jedes Element kommt in der Menge nur einmal vor.



Beispiele: {Montag, Dienstag}, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen).

Mengen: Reihenfolge und leere Menge

Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle:

$$\{\text{Montag, Dienstag}\} = \{\text{Dienstag, Montag}\}.$$

$\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

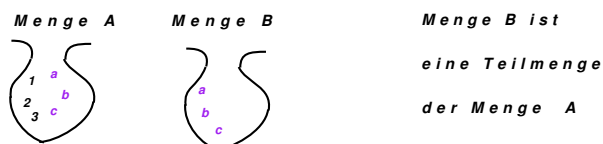
Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Für ein Element a und eine Menge A schreiben wir $a \in A$ (oder $A \ni a$), wenn a Element von A ist.

Beispiele: $1 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Teilmengen und Gleichheit von Mengen

B heißt *Teilmenge* von A , wenn jedes Element von B auch Element von A ist. Schreibweise: $B \subseteq A$ (oder $A \supseteq B$).



Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Beispiele: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ und $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A .

Zur Sprache der Mathematik: Folgerung

Das Symbol $A \implies B$ bedeutet: *Aus Aussage A folgt Aussage B.*

Beispiel: $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0$.

Andere Formulierungen: »A impliziert B«, »A ist hinreichend für B«, »B ist notwendig für A«.

$A \iff B$ heißt: $A \implies B$ und $B \implies A$.

Man sagt: A und B sind *äquivalent*; A gilt *genau dann*, wenn B gilt.

Quantoren: »Es existiert« und »Für alle«

$\exists$ bedeutet: »Es existiert mindestens ein ...«

Beispiel:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2.$$

Die Aussage ist wahr, etwa für $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$.

$\forall$ bedeutet: »Für alle ...«

Beispiel:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0.$$

Die Bedeutung von »oder«

In der Mathematik ist »oder« *nicht ausschließend*.

Die Aussage » $1 + 1 = 2$ oder $1 - 1 = 0$ « ist wahr, obwohl *beide* Teilaussagen wahr sind.

Für »oder« benutzt man auch $\vee$:

$$1 + 1 = 2 \quad \vee \quad 1 - 1 = 0 \quad \vee \quad 1 + 1 = 0.$$

Auch diese Aussage ist wahr.

Dies unterscheidet sich von »entweder ... oder«.

Definition 2.1 (Kartesisches Produkt). Produkt von Mengen

Für Mengen A, B ist das *kartesische Produkt*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Es besteht aus *geordneten* Paaren.

Beispiel: $A = \{1, 2\}$, $B = \{+, -\}$.

$$A \times B = \{(1, +), (1, -), (2, +), (2, -)\}.$$

Analog besteht $A \times B \times C$ aus geordneten Tripeln (a, b, c) .

Produkt von Mengen: eine Frage

Frage: Was ist $\emptyset \times A$?

Antwort.

$$\emptyset \times A = \emptyset.$$

Warum? Ein Paar $(a, b) \in \emptyset \times A$ müsste ein erstes Element $a \in \emptyset$ besitzen. Ein solches Element gibt es nicht.

Lösungsmengen: eine neue Formulierung

Definition: Lösungsmenge. Eine Lösung eines Systems mit n Unbekannten ist ein Tupel $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ reeller Zahlen, das *alle* Gleichungen erfüllt. Die *Lösungsmenge* ist die Menge aller dieser Tupel.

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}}.$$

Satz 1: Jede Lösung von (S) ist auch Lösung von $(S1)$, $(S2)$ und $(S3)$.

Umkehrung: Da die Zeilenumformungen rückgängig gemacht werden können, ist auch jede Lösung von $(S1)$, $(S2)$ oder $(S3)$ eine Lösung von (S) .

Was folgt für die Lösungsmengen?

Bezeichnen wir die Lösungsmengen mit $L(S)$, $L(S1)$ usw.

Nach Satz 1 gilt $L(S) \subseteq L(Si)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aus der Umkehrbarkeit folgt $L(Si) \subseteq L(S)$.

Satz 1' (äquivalente Formulierung).

$$L(S) = L(S1) = L(S2) = L(S3).$$

Die elementaren Zeilenumformungen verändern die Lösungsmenge nicht.

Definition 2.2 (Potenzmenge). Die Menge aller Teilmengen

Sei A eine Menge. Mit 2^A bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge).

Für $A = \{1, 2\}$ gilt

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Für $A = \{1, 2, 3\}$ gilt

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Warum die Bezeichnung 2^A ?

Mathematisch gilt: Eine Bezeichnung dürfen wir grundsätzlich frei wählen; wichtig ist, dass wir sie *genau definieren*.

Für das Verständnis ist es allerdings besser, wenn die Namen und Symbole gut gewählt sind.

Bei einer *endlichen* Menge A mit n Elementen besitzt 2^A genau 2^n Elemente.

$$|A| = n \implies |2^A| = 2^n.$$

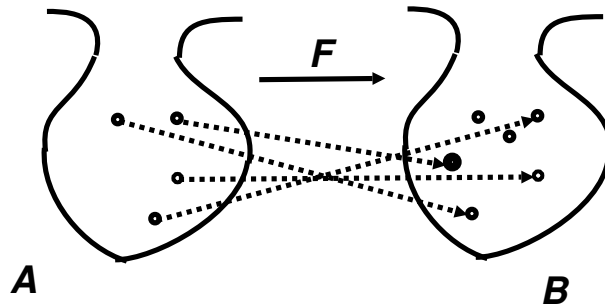
Das sieht man schon an den Beispielen: Zwei Elemente liefern $4 = 2^2$ Teilmengen, drei Elemente $8 = 2^3$.

2.2 Abbildungen

Definition 2.3 (Abbildung). Eine Abbildung $F : A \rightarrow B$ ist eine Zuordnung, die jedem $a \in A$ genau ein Element $F(a) \in B$ zuordnet. Dabei heißt A Definitionsmenge und B Zielmenge.

Abbildungen: anschauliche Definition

Eine *Abbildung* $F : A \rightarrow B$ ist eine Regel, die jedem Element von A *genau ein* Element von B zuordnet.



A heißt Definitionsmenge, B Zielmenge; das einem $a \in A$ zugeordnete Element heißt $F(a)$.

Wichtige auf der vorherigen Folie eingeführte Bezeichnung

$$F : A \longrightarrow B$$

- A ist die *Definitionsmenge*: Für jedes $a \in A$ muss $F(a)$ festgelegt sein.
- B ist die *Zielmenge*: Es muss $F(a) \in B$ für jedes $a \in A$ gelten.
- F ist die *Abbildung*, also die Zuordnungsvorschrift. Sie ordnet jedem $a \in A$ genau ein Element $F(a) \in B$ zu.

Beispiel: $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$. Hier sind $A = B = \mathbb{R}$ und $F(2) = 4$.

Abbildungen: Beispiele und Gegenbeispiel

- $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 3x + 13$ ist eine Abbildung.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (festes $c \in \mathbb{R}$) ist eine konstante Abbildung.
- $F : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $F(x) = x + 1$ ist *keine* Abbildung mit dieser Zielmenge: $F(1) = 2 \notin [-1, 1]$.
- $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x + 1$ ist dagegen eine Abbildung.

Warum sind das Abbildungen?

- $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 3x + 13$: *Ja*. Für jede reelle Zahl x ist $P(x)$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ mit festem $c \in \mathbb{R}$: *Ja*. Jedem x wird genau eine Zahl zugeordnet, nämlich immer dieselbe Zahl c .

Wichtig: Verschiedene Elemente der Definitionsmenge dürfen dasselbe Bild haben.

Warum ist das Gegenbeispiel keine Abbildung?

Betrachten wir die Zuordnung $F(x) = x + 1$.

Erster Versuch. $F : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ ist *keine Abbildung*: $1 \in [-1, 1]$, aber $F(1) = 2 \notin [-1, 1]$.

Mit einer anderen Zielmenge. $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abbildung: Für jedes $x \in [-1, 1]$ ist $x + 1$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.

Merke: Für eine Abbildung $F : A \rightarrow B$ muss jedem $a \in A$ *genau ein* Wert *aus* B zugeordnet werden.

Abbildungen müssen nicht durch Formeln gegeben sein

Die bisherigen Beispiele wurden durch *Formeln* beschrieben. Dabei ist die Eindeutigkeit der Zuordnung unmittelbar sichtbar.

Man kann eine Abbildung aber auch durch eine *Eigenschaft* ihres Wertes beschreiben. Zum Beispiel:

$$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) \geq 0, \quad F(x)^2 = x.$$

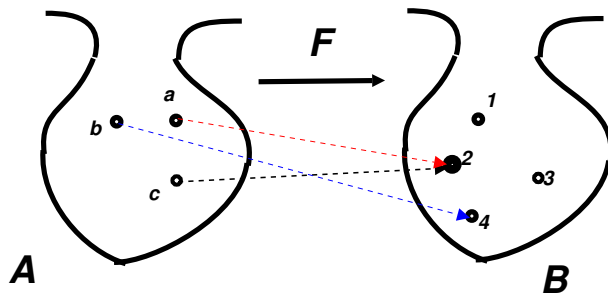
Warum ist das eine Abbildung? Zu jedem $x \geq 0$ gibt es *genau eine* nichtnegative reelle Zahl mit Quadrat x : die Zahl $\sqrt{x}$.

Bei einer solchen Beschreibung müssen wir also *Existenz und Eindeutigkeit* begründen.

Abbildungen als Teilmengen eines Produkts

Eine Abbildung $F : A \rightarrow B$ lässt sich durch eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ beschreiben.

Es gilt: Zu jedem $a \in A$ existiert *genau ein* $b \in B$ mit $(a, b) \in R$. Dieses b wird $F(a)$ genannt.



Beispielsweise: $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 2)\}$.

Beispiel: der Graph eines Polynoms

Für $P(x) = x^2 + 3x + 13$ ist die zugehörige Teilmenge

$$R = \{(x, x^2 + 3x + 13) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Beispiele: $(1, 17) \in R$ und $(0, 13) \in R$.

Aber $(2, 0) \notin R$, denn $2^2 + 3 \cdot 2 + 13 \neq 0$.

Die konstante Abbildung $f(x) = c$ entspricht $R = \{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Arithmetische Operationen als Abbildungen

Auch die Addition reeller Zahlen ist eine Abbildung:

$$+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad +(a, b) = a + b.$$

Als Teilmenge eines kartesischen Produkts:

$$R = \{((a, b), a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Beispiel: $((1, -2), -1) \in R$, denn $1 + (-2) = -1$.

3 Vektorräume

3.1 Definition und Axiome

Definition 3.1 (Reeller Vektorraum). Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V mit einer Addition $+: V \times V \rightarrow V$ und einer Skalarmultiplikation $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, für die die acht Axiome I–VIII gelten.

Definition: reeller Vektorraum

Ein *reeller Vektorraum* besteht aus einer Menge V mit zwei Abbildungen:

$$+: V \times V \rightarrow V, \quad (u, v) \mapsto u + v,$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v.$$

Sie heißen *Addition* und *Multiplikation mit Skalaren*.

Außerdem müssen acht Eigenschaften (Axiome) gelten.

Vektorraumaxiome: die Addition (I–IV)

Für alle $u, v, w \in V$ gilt:

I. **Assoziativität:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.

II. **Kommutativität:** $u + v = v + u$.

III. Es gibt einen **Nullvektor** $\vec{0} \in V$ mit $\vec{0} + v = v$.

IV. Zu jedem $v \in V$ gibt es einen **Gegenvektor** $-v \in V$ mit $(-v) + v = \vec{0}$.

Vektorraumaxiome: Skalare (V–VIII)

Für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

V. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.

VI. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

VII. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

VIII. $1 \cdot v = v$.

Frage. Gibt es überhaupt Mengen mit Operationen, die alle acht Axiome erfüllen?

3.2 Das Beispiel $\mathbb{R}^2$

Das Beispiel $\mathbb{R}^2$

Wir wählen $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Aus praktischen Gründen schreiben wir die Paare als Spalten:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jetzt müssen wir die beiden Operationen angeben und prüfen, dass ihre Ergebnisse wieder in V liegen (*Wohldefiniertheit*).

Addition in $\mathbb{R}^2$

Für $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ setzen wir

$$u + v := \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da beide Einträge reelle Zahlen sind, liegt die Summe wieder in $\mathbb{R}^2$. Die Addition ist also wohldefiniert.

Axiom I: Assoziativität der Addition

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Assoziativität in $\mathbb{R}$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} x_u + (x_v + x_w) \\ y_u + (y_v + y_w) \end{pmatrix} = u + (v + w).$$

Axiom II: Kommutativität der Addition

Für $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} u + v &= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_v + x_u \\ y_v + y_u \end{pmatrix} = v + u. \end{aligned}$$

Die entscheidende Gleichheit folgt aus der Kommutativität der Addition reeller Zahlen.

Axiom III: Nullvektor

Wir definieren

$$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{0} + v = \begin{pmatrix} 0 + x_v \\ 0 + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v.$$

Also besitzt $\mathbb{R}^2$ einen neutralen Vektor bezüglich der Addition.

Axiom IV: Gegenvektor

Zu $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ definieren wir

$$-v := \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$(-v) + v = \begin{pmatrix} -x_v + x_v \\ -y_v + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Multiplikation von Skalaren und Vektoren

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ definieren wir

$$\lambda v := \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Beide Koordinaten sind wieder reell, also liegt λv in $\mathbb{R}^2$. Auch diese Operation ist wohldefiniert.

Frage an Sie: Vektoraddition

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 37 \\ 21 \end{pmatrix}}.$$

Und wie lautet

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}.$$

Axiom V: Multiplikation von Skalaren

Zu zeigen: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda(\mu v) &= \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x_v \\ (\lambda\mu)y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu)v.\end{aligned}$$

Wir benutzen die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Axiom VI: Distributivität in den Skalaren

Zu zeigen: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)v &= \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_v \\ (\lambda + \mu)y_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} \\ &= \lambda v + \mu v.\end{aligned}$$

Axiom VII: Distributivität in den Vektoren

Zu zeigen: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

$$\begin{aligned}\lambda(u + v) &= \lambda \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x_u + x_v) \\ \lambda(y_u + y_v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix} \\ &= \lambda u + \lambda v.\end{aligned}$$

Axiom VIII: Multiplikation mit Eins

Für $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ gilt

$$1 \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_v \\ 1 \cdot y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v.$$

Damit ist auch das letzte Axiom erfüllt.

Alles zusammen: $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum

1. Wir haben die Operationen $+: V \times V \rightarrow V$ und $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ auf $V = \mathbb{R}^2$ definiert.
2. Wir haben überprüft, dass beide Operationen wohldefiniert sind.
3. Wir haben die Eigenschaften I–VIII bewiesen.

Ergebnis. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein reeller Vektorraum.

Satz 3.2. *Der Raum $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein reeller Vektorraum.*

Beweis. Die acht Vektorraumaxiome folgen komponentenweise aus den bekannten Rechengesetzen der reellen Zahlen, wie in den vorstehenden Rechnungen überprüft. $\square$

3.3 Vergleich mit den Rechengesetzen in $\mathbb{R}$

Was ist an den Vektorraumaxiomen vertraut? (informell)

Die Vektorraumaxiome erinnern an die Rechengesetze für reelle Zahlen.

Bei reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ kennen wir beispielsweise

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad a + b = b + a.$$

Für Vektoren $u, v, w \in V$ fordern wir entsprechend

$$(u + v) + w = u + (v + w), \quad u + v = v + u.$$

Wichtiger Unterschied. Bei den reellen Zahlen addieren wir *Zahlen*, bei der Vektoraddition *Vektoren*. Die Rechenregeln haben dieselbe Form.

Null und Gegenzahl: bei Zahlen und Vektoren

Für jede reelle Zahl a gibt es die Zahl 0 und die Gegenzahl $-a$:

$$a + 0 = a, \quad a + (-a) = 0.$$

Für jeden Vektor v gibt es den *Nullvektor* $\vec{0}$ und den *Gegenvektor* $-v$:

$$v + \vec{0} = v, \quad v + (-v) = \vec{0}.$$

In $\mathbb{R}^2$ sind das ganz konkret

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -v = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Multiplikation: zwei unterschiedliche Situationen

Bei reellen Zahlen gelten die Rechengesetze

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Im Vektorraum haben wir *zwei* Arten von Addition, aber nur die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor:

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v.$$

Beachten Sie. λ, μ sind reelle Zahlen; u, v sind Vektoren. Ein Produkt uv zweier Vektoren ist durch die Vektorraumaxiome *nicht* definiert.

Assoziativität der Skalarmultiplikation und die Eins

Für reelle Zahlen gilt

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \quad 1 \cdot a = a.$$

Die entsprechenden Axiome für Vektoren lauten

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \quad 1 \cdot v = v.$$

Warum konnten wir das für $\mathbb{R}^2$ beweisen? Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ sind *koordinatenweise* definiert. Jede Komponente ist eine reelle Zahl. Deshalb folgen die acht Axiome aus den bekannten Rechengesetzen in $\mathbb{R}$.

Rückblick auf die erste Woche

Wir haben den direkten Beweis und die vollständige Induktion an den [Satz 1.3 \(S. 6\)](#) und [Satz 1.6 \(S. 12\)](#) kennengelernt. Ferner haben wir Elemente der mathematischen Sprache eingeführt: Mengen, Tupel, Produkte und Abbildungen. Mit der [Satz 3.1 \(S. 25\)](#) begegnet uns erstmals eine abstrakte mathematische Struktur.

Die weiteren Kapitel können an diese Darstellung angeschlossen werden.