Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Skript – Vorlesungswochen 1–5

Prof. Dr. Vladimir Matveev
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Wintersemester 2026/27

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zum Skript **3**

1 Lineare Gleichungssysteme und Beweismethoden **4**
- 1.1 Einführung und Beweismethoden . . . 4
- 1.2 Lineare Gleichungssysteme . . . 4
- 1.3 Elementare Zeilenumformungen . . . 5
- 1.4 Widerspruchsbeweis und vollständige Induktion . . . 9
- 1.5 Stufenform und Gaußscher Satz . . . 11
- 1.6 Gauß-Algorithmus und Rückwärtseinsetzen . . . 16

2 Mengen und Abbildungen **20**
- 2.1 Mengen und logische Schreibweisen . . . 20
- 2.2 Abbildungen . . . 23

3 Vektorräume **26**
- 3.1 Definition und Axiome . . . 26
- 3.2 Das Beispiel $\mathbb{R}^2$ . . . 27
- 3.3 Vergleich mit den Rechengesetzen in $\mathbb{R}$ . . . 30

4 Weitere Rechenregeln in Vektorräumen **32**
- 4.1 Die acht Axiome als Ausgangspunkt . . . 32
- 4.2 Eindeutigkeit und elementare Rechenregeln . . . 32
- 4.3 Das Beispiel $\mathbb{R}^n$ . . . 34

5 Untervektorräume und Mengenoperationen **36**
- 5.1 Untervektorräume . . . 36
- 5.2 Durchschnitt, Vereinigung und disjunkte Mengen . . . 37
- 5.3 Einschränkungen von Abbildungen und Operationen . . . 39

6 Linearkombinationen und lineare Hülle **40**
- 6.1 Summen und Linearkombinationen . . . 40
- 6.2 Lineare Hülle . . . 40

7 Basen, Dimension und Austausch von Vektoren **43**
- 7.1 Lineare Unabhängigkeit und Basen . . . 43
- 7.2 Charakterisierung von Basen . . . 44
- 7.3 Existenz endlicher Basen . . . 45
- 7.4 Dimension und das Austauschlemma von Steinitz . . . 46

8 Austauschsatz, Dimension und Koordinaten **48**
- 8.1 Vom Austauschlemma zum Austauschsatz . . . 48
- 8.2 Die Dimension ist wohldefiniert . . . 49
- 8.3 Summe von Untervektorräumen . . . 50
- 8.4 Koordinaten bezüglich einer Basis . . . 52

9 Lineare Abbildungen und Isomorphismen **55**
9.1 Definition und erste Beispiele 55
9.2 Injektivität, Surjektivität, Bild und Kern 55
9.3 Verkettung und inverse Abbildungen 57
9.4 Isomorphismen und Dimension 60
9.5 Die erste Dimensionsformel 61

Hinweise zum Skript

Dieses Skript begleitet die Vorlesung *Lineare Algebra und analytische Geometrie I*. Es enthält den Stoff der ersten fünf Vorlesungswochen und ist als fortlaufendes Skript angelegt. Die Sätze und Lemmata behalten die Nummern der Vorlesungsfolien; Definitionen sind fortlaufend nummeriert. Folgerungen tragen die Nummer des zugehörigen Satzes sowie eine eigene laufende Nummer. Gleichungen sind nach Kapiteln nummeriert. Verweise auf Resultate und Gleichungen sind im PDF anklickbar und können zusätzlich die Seitenzahl angeben. Die organisatorischen Einzelheiten und aktuellen Übungsinformationen finden Sie auf der https://users.fmi.uni-jena.de/~matveev/Lehre/LA26/.

1 Lineare Gleichungssysteme und Beweismethoden

1.1 Einführung und Beweismethoden

In der Mathematik genügt es nicht, Aussagen zu kennen: Man muss sie verstehen, beweisen und die Beweise verständlich aufschreiben können. Wir werden insbesondere den direkten Beweis und die vollständige Induktion benutzen; auch den Widerspruchsbeweis lernen wir kennen.

1. *Direkter Beweis*: aus bekannten Aussagen durch logische Folgerungen eine neue Aussage herleiten.
2. *Widerspruchsbeweis*: die Negation der Behauptung annehmen und daraus einen Widerspruch ableiten.
3. *Vollständige Induktion*: zunächst den Anfang zeigen und dann von n auf $n+1$ schließen.

Wir beginnen mit einem direkten Beweis über lineare Gleichungssysteme.

1.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Die Zahlen a_{ij} und b_i sind *bekannt* (vorgegeben). Gesucht sind die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, die alle Gleichungen erfüllen.

Die x_j heißen *Unbekannte* oder *Variablen*. Die Zahlen a_{ij} heißen *Koeffizienten*, die b_i bilden die *rechten Seiten*.

Definition 1 (Lösung eines linearen Gleichungssystems)**.** Ein Tupel $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt Lösung des Systems (S), wenn $a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$ gilt.

Ein Beispiel mit zwei Gleichungen

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4. \end{cases}$$

Hier sind $\boxed{m = 2}$ Gleichungen und $\boxed{n = 2}$ Unbekannte.
Die bekannten Koeffizienten und rechten Seiten lauten:

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{21} = 3, \quad a_{22} = -6, \qquad b_1 = 8,\ b_2 = 4.$$

Gesucht sind alle Paaren $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, das *beide* Gleichungen erfüllt.

Überprüfung einer Lösung

Eine *Lösung* von (S) ist ein geordnetes n-Tupel

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n,$$

so dass *alle* Gleichungen erfüllt sind:

$$a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Beispiel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4. \end{cases}$$

$(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ ist eine Lösung, denn

$$2 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 8, \qquad 3 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

1.3 Elementare Zeilenumformungen

Definition 2 (Elementare Zeilenumformungen)**.** Es gibt drei Typen elementarer Operationen an den Gleichungen eines Systems: Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen (Typ 1), Multiplikation einer Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl (Typ 2) und Vertauschen zweier Gleichungen (Typ 3).

Elementare Zeilenumformungen: Typ 1

Typ 1: Addiere das c-Fache der i-ten Gleichung zur k-ten Gleichung ($i \neq k$, $c \neq 0$).

$$\boxed{Z_k \longleftarrow Z_k + cZ_i}$$

Ist die k-te Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$, so lautet sie danach

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{kj} + ca_{ij})x_j = b_k + cb_i.$$

Alle anderen Gleichungen bleiben unverändert. Das so entstehende System nennen wir $(S1)$.

Zeilenumformungen sind Operationen auf Systemen

Eine Zeilenumformung nimmt als *Eingabe* ein Gleichungssystem (S) und liefert ein *neues* Gleichungssystem $(S1)$.

Dabei sind die Daten m, n, a_{ij}, b_i des Ausgangssystems bekannt.

- Die Anzahl m der Gleichungen und n der Unbekannten bleiben gleich.
- Bei Typ 1 ändern sich nur die Koeffizienten und die rechte Seite der k-ten Gleichung:

$$a_{kj} \longmapsto a_{kj} + ca_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad b_k \longmapsto b_k + cb_i.$$

- Alle übrigen Gleichungen bleiben unverändert.

Auch Typ 2 und Typ 3 sind solche Operationen auf der Menge der Gleichungssysteme.

Typ 1: Beispiel

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$$

Wir ersetzen Z_2 durch $Z_2 - \frac{3}{2}Z_1$:

$$\xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{3}{2}Z_1} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ -12x_2 = -8. \end{cases}$$

Man merke: ich habe "$0 \cdot x_1$" in der zweiten Spalte nicht geschrieben. Formal sollte ich $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 0x_1 - 12x_2 = -8 \end{cases}$ schreiben.

Das ist rein kosmetisch: in einigen Fällen (und sie bekommen später die Intuition wann) schreiben wir die Summanten mit 0-Koeffiizient nicht.

In diesem Fall werden wir damit hervorheben, dass der Wert der Variablen x_1 in der zweiten Gleichung nicht wichtig ist, weil mit 0 multipliziert wird.

Elementare Zeilenumformungen: Typ 2

Typ 2: Multipliziere die k-te Gleichung mit $c \neq 0$.

$$\boxed{Z_k \longleftarrow cZ_k}$$

Die k-te Gleichung wird zu

$$\sum_{j=1}^{n} ca_{kj}x_j = cb_k.$$

Die übrigen Gleichungen bleiben unverändert. Das neue System heißt $(S2)$.

Beispiel: Multipliziere die zweite Gleichung mit $-\frac{1}{12}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ -12x_2 = -8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ x_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Man merke: Wir haben, kosmetisch, statt $1x_2$ nur x_2 geschrieben.

Elementare Zeilenumformungen: Typ 3

Typ 3: Vertausche zwei Gleichungen Z_i und Z_k $(i \neq k)$.

$$\boxed{Z_i \longleftrightarrow Z_k}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Wir bezeichnen das vertauschte System mit $(S3)$.

Frage: Verändern diese Operationen die Lösungsmenge?

Satz 1 (Erhaltung von Lösungen)**.** *Ist $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ eine Lösung von (S), so ist dieses Tupel auch eine Lösung jedes aus (S) durch eine elementare Zeilenumformung entstehenden Systems $(S1)$, $(S2)$ oder $(S3)$.*

Beweis. Wir führen die Argumentation zunächst für Typ 1 und dann für Typ 2 und Typ 3.

Beweis für Typ 1 im allgemeinen Fall (1)

Annahme: $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ sei eine Lösung von (S).

Zu zeigen: Dieses Tupel erfüllt auch alle Gleichungen von $(S1)$.

Insbesondere sind die i-te und die k-te Gleichung von (S) erfüllt:

$$a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n = b_i,$$
$$a_{k1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{kn}\bar{x}_n = b_k.$$

Wir addieren das c-Fache der ersten dieser beiden Gleichungen zur zweiten.

Beweis für Typ 1 im allgemeinen Fall (2)

Wir erhalten

$$\begin{aligned}&(a_{k1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{kn}\bar{x}_n)\\ &\quad + c(a_{i1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{in}\bar{x}_n) = b_k + cb_i.\end{aligned}$$

Nach Zusammenfassen der Terme:

$$(a_{k1} + ca_{i1})\bar{x}_1 + \cdots + (a_{kn} + ca_{in})\bar{x}_n = b_k + cb_i.$$

Das ist die neue k-te Gleichung von $(S1)$, mit $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ eingesetzt.

Die übrigen Gleichungen sind unverändert und daher ebenfalls erfüllt. Somit ist unser Tupel auch eine Lösung von $(S1)$.

Beweis für Typ 2 (1)

Annahme: $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S).

Zu zeigen: Es ist auch eine Lösung von $(S2)$.

Wir betrachten die k-te Gleichung von $(S2)$. Setzen wir unser Tupel ein, müssen wir zeigen, dass

$$(*) \qquad ca_{k1}\bar{x}_1 + \cdots + ca_{kn}\bar{x}_n = cb_k$$

gilt.

Warum stimmt diese Gleichung?

Beweis für Typ 2 (2)

Aufgrund des Distributivgesetzes ist die linke Seite von $(*)$ gleich

$$c\,(a_{k1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{kn}\bar{x}_n).$$

Da $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ eine Lösung von (S) ist, gilt

$$a_{k1}\bar{x}_1 + \cdots + a_{kn}\bar{x}_n = b_k.$$

Somit ist $(*)$ erfüllt. Die anderen Gleichungen von $(S2)$ stimmen mit denen von (S) überein und sind ebenfalls erfüllt.

Also ist $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ eine Lösung von $(S2)$.

Beweis für Typ 3

Annahme: $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ist eine Lösung von (S).

Zu zeigen: Es ist auch eine Lösung von $(S3)$.

Man könnte dies direkt nachprüfen: Die beiden vertauschten Gleichungen waren bereits erfüllt, und alle anderen Gleichungen sind unverändert.

Wir wählen aber einen *anderen Beweis*, wie in der ursprünglichen Vorlesung: Wir führen die Vertauschung auf Operationen der Typen 1 und 2 zurück, für die wir die Aussage schon bewiesen haben.

Typ 3: Vertauschung zweier Gleichungen

Wir schreiben nur die beiden betroffenen Gleichungen ausdrücklich; die *anderen Gleichungen bleiben in jedem Schritt unverändert.*

$$\begin{cases} \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \end{cases}$$

Ziel: Die i-te Gleichung und die j-te Gleichung vertauschen, ohne eine Operation vom Typ 3 zu verwenden.

Typ 3 durch bekannte Operationen (1)

Schritt 1: $Z_j \leftarrow Z_j + Z_i$ (Typ 1).

$$\begin{cases} \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ (a_{j1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + a_{in})x_n = b_j + b_i \\ \vdots \end{cases}$$

Schritt 2: $Z_i \leftarrow Z_i - Z_j$ (Typ 1; mit der neuen j-ten Gleichung).

$$\begin{cases} \vdots \\ -a_{j1}x_1 - \cdots - a_{jn}x_n = -b_j \\ \vdots \\ (a_{j1} + a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + a_{in})x_n = b_j + b_i \\ \vdots \end{cases}$$

Alle durch $\vdots$ bezeichneten Gleichungen bleiben unverändert.

Typ 3 durch bekannte Operationen (2)

Schritt 3: $Z_j \leftarrow Z_j + Z_i$ (Typ 1).

$$\begin{cases} \vdots \\ -a_{j1}x_1 - \cdots - a_{jn}x_n = -b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \end{cases}$$

Schritt 4: $Z_i \leftarrow -Z_i$ (Typ 2).

$$\begin{cases} \vdots \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen sind vertauscht, alle übrigen sind unverändert. Daher folgt Typ 3 aus Typ 1 und Typ 2.

□

Typ 1 – ein konkretes Beispiel (1)

Wir erinnern uns an die Umformung

$$(S)\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases} \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - \frac{3}{2}Z_1} (S1)\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8, \\ -12x_2 = -8. \end{cases}$$

Frage: Warum ist *jede* Lösung von (S) auch eine Lösung von $(S1)$?
Nehmen wir eine beliebige Lösung $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ von (S). Nach Definition gelten

$$2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 = 8, \qquad 3\bar{x}_1 - 6\bar{x}_2 = 4.$$

Was müssen wir zeigen? Dass das *gleiche Tupel* auch die beiden Gleichungen von $(S1)$ erfüllt.

Typ 1 – ein konkretes Beispiel (2)

Die erste Gleichung ist unverändert; sie gilt also bereits.
Aus den beiden Gleichungen von (S) folgt

$$\begin{aligned} (3\bar{x}_1 - 6\bar{x}_2) - \frac{3}{2}(2\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2) &= 4 - \frac{3}{2} \cdot 8, \\ -12\bar{x}_2 &= -8. \end{aligned}$$

Dies ist genau die zweite Gleichung von $(S1)$ mit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ eingesetzt.
Schluss: Jedes Tupel, das (S) löst, löst auch $(S1)$. Wir haben nicht nur eine einzelne Lösung überprüft, sondern mit einer *beliebigen* Lösung argumentiert.

Folgerung 1.1 (Gleichheit der Lösungsmengen)**.** *Elementare Zeilenumformungen verändern die Lösungsmenge nicht.*

Beweis. Jede der drei Operationen kann durch elementare Operationen rückgängig gemacht werden: Typ 1 mit $-c$, Typ 2 mit $1/c$ und Typ 3 durch erneutes Vertauschen. Auf beide Richtungen wenden wir Satz 1 (S. 6) an. □

1.4 Widerspruchsbeweis und vollständige Induktion

Widerspruchsbeweis: Unendlich viele Primzahlen

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Setze $m = p_1 \cdots p_n$. Jeder Primteiler von $m + 1$ ist verschieden von allen p_i, da er andernfalls sowohl m als auch $m + 1$ und somit 1 teilen würde. Widerspruch.

Vollständige Induktion

Induktion dient oft zum Beweis einer Aussage $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n ab einem Anfangswert n_0.

1. *Induktionsanfang (IA):* Zeige $P(n_0)$.



Abbildung 1.1: Illustration zum Widerspruchsbeweis.

2. *Induktionsvoraussetzung (IV):* Nimm an, dass $P(n)$ gilt.
3. *Induktionsschritt (IS):* Beweise daraus $P(n+1)$.

Das erinnert an einen Dominoeffekt: Der erste Stein fällt, und jeder fallende Stein stößt den nächsten an.

Induktion als Dominoeffekt



Abbildung 1.2: Der Dominoeffekt als Veranschaulichung der vollständigen Induktion.

- Induktionsanfang: Der erste Stein fällt.
- Induktionsschritt: Fällt Stein n, so fällt auch Stein $n+1$.

1.5 Stufenform und Gaußscher Satz

Anschauliche Idee: Die Gleichungen bilden eine *Treppe*.

- In der ersten Gleichung beginnt die Rechnung weiter links.
- In jeder folgenden nichttrivialen Gleichung beginnt sie weiter rechts.
- Gleichungen mit lauter Nullkoeffizienten stehen am Ende.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 0x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1. \end{cases}$$

Nun *formalisieren* wir diese Vorstellung durch eine genaue Definition. So können wir danach auch *formal beweisen*, dass jedes System in diese Form gebracht werden kann.

Definition 3 (Stufenform)**.** Ein lineares Gleichungssystem heißt in *Stufenform*, wenn die jeweils erste Variable mit nichtverschwindendem Koeffizienten in jeder folgenden nichttrivialen Gleichung weiter rechts steht und Gleichungen mit lauter Nullkoeffizienten nur am Ende vorkommen. Äquivalent dazu gelten die drei in den folgenden Formeln beschriebenen Bedingungen (a)–(c).

Formale Bedingungen

Definition 1. Das System (S) hat *Stufenform*, wenn für $i = 1, \dots, m-1$ gilt:

(a) Aus $a_{i1} = \cdots = a_{ik} = 0$ für ein $1 \leq k < n$ folgt

$$a_{i+1,1} = \cdots = a_{i+1,k+1} = 0.$$

(b) Aus $a_{i1} = \cdots = a_{in} = 0$ folgt

$$a_{i+1,1} = \cdots = a_{i+1,n} = 0.$$

(c) Ist $a_{i1} \neq 0$, dann ist $a_{i+1,1} = 0$.

Stufenform: Beispiele und Gegenbeispiele

Definition (zur Erinnerung). Die erste nichtverschwindende Variable jeder nichttrivialen Gleichung steht weiter rechts als in der vorherigen; eine Gleichung mit lauter Nullkoeffizienten darf nur vor weiteren solchen Gleichungen stehen.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array} \right.$$

Nicht in Stufenform:

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

(a) verletzt: Die zweite Gleichung beginnt weiter links als die erste.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

Abbildung 1.3: Anschauliche Darstellung der Stufenform.

Stufenform: Gegenbeispiel mit einer Nullzeile

Definition (zur Erinnerung). Nach einer Gleichung mit lauter Nullkoeffizienten dürfen nur weitere Gleichungen mit lauter Nullkoeffizienten stehen.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

(b) verletzt: Auf eine Nullzeile folgt eine Gleichung, in der der Koeffizient vor x_3 von null verschieden ist.

Stufenform: Weitere Gegenbeispiele

Beispiel 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

(c) verletzt: Die ersten beiden Gleichungen enthalten einen von null verschiedenen Koeffizienten vor x_1.

Beispiel 2:

$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_4 = 2, \\ 4x_3 = 3. \end{cases}$$

(a) verletzt: Die dritte Gleichung beginnt bei x_3 statt rechts von x_4.

Stufenform: Welche Koeffizienten sind erlaubt?

Definition (Wiederholung). Ein Gleichungssystem ist in Stufenform, wenn für benachbarte Gleichungen gilt: (a) Sind in Gleichung i die ersten k Koeffizienten null, so sind in Gleichung $i+1$ mindestens die ersten $k+1$ null; (b) unter einer

Gleichung mit lauter Nullkoeffizienten stehen nur solche Gleichungen; (c) ist $a_{i1} \neq 0$, dann ist $a_{i+1,1} = 0$.

Die ersten beiden Gleichungen sind bereits in Stufenform:

$$\begin{cases} \boxed{2}x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \boxed{4}x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = 2. \end{cases}$$

Frage: Welche Werte dürfen a, b, c, d, e haben, damit das gesamte Gleichungssystem in Stufenform ist?

Stufenform: Lösung der Aufgabe

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + dx_4 + ex_5 = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\boxed{a = b = c = 0}$; die Koeffizienten $c, d, e \in \mathbb{R}$ sind beliebig.

Warum? In der zweiten Gleichung ist der Koeffizient von x_1 null. Nach (a) müssen deshalb in der dritten Gleichung die Koeffizienten von x_1, x_2 und x_3 null sein.

Die rechte Seite ($= 2$) spielt für die Stufenform keine Rolle.

Satz 2 (Satz von Gauß)**.** *Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Stufenform bringen.*



Abbildung 1.4: Illustration zum Satz von Gauß und zum Induktionsbeweis.

Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Gleichungen. **Induktionsanfang und -voraussetzung**

Induktionsanfang ($m = 1$): Jedes System, das aus nur einer Gleichung besteht, ist bereits in Stufenform.

Induktionsvoraussetzung: Jedes lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen lässt sich durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in Stufenform bringen.

Zu zeigen: Das gilt auch für Systeme aus $m + 1$ Gleichungen.

Die erste nichtverschwindende Spalte

Wir betrachten ein System mit $m+1$ Gleichungen. Sei k die erste Stelle, an der *mindestens einer* der Koeffizienten $a_{1k}, \dots, a_{m+1,k}$ von null verschieden ist.

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} & +a_{1k}x_k & +a_{1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} & +a_{2k}x_k & +a_{2,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} & +a_{m+1,k}x_k & +a_{m+1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1}. \end{cases}$$

Blau: In allen Gleichungen verschwinden die Koeffizienten vor $x_1, \dots, x_{k-1}$. Falls *alle* Koeffizienten null sind, ist das System bereits in Stufenform.

Beispiel für die Wahl von k

$$\begin{cases} 0x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2, \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1. \end{cases}$$

Alle Koeffizienten vor x_1 sind null. Bei x_2 gibt es dagegen nichtverschwindende Koeffizienten. Also ist $\boxed{k = 2}$.

k kann auch gleich 1 sein

Zweites Beispiel: Ein System mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 0x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$$

Schon in der *ersten Spalte* steht der von null verschiedene Koeffizient 2.

$$\boxed{k = 1}.$$

Bemerkung: Selbstverständlich kann $k = 1$ sein.

Die erste Gleichung wählen

Nach der Wahl von k gibt es mindestens ein j mit $a_{jk} \neq 0$. Falls $a_{1k} = 0$, vertauschen wir die erste Gleichung mit einer solchen j-ten Gleichung (Typ 3).

Danach gilt $\boxed{a_{1k} \neq 0}$, und das System hat die Form

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} & +\boxed{a_{1k}}x_k & +a_{1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} & +a_{2k}x_k & +a_{2,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} & +a_{m+1,k}x_k & +a_{m+1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{m+1,n}x_n = b_{m+1}. \end{cases}$$

Nullen unter a_{1k} erzeugen

Für jede Gleichung $j \geq 2$ mit $a_{jk} \neq 0$ bilden wir

$$\boxed{Z_j \longleftarrow Z_j - \frac{a_{jk}}{a_{1k}} Z_1}.$$

Der Koeffizient bei x_k in der neuen j-ten Gleichung ist

$$\underbrace{a_{jk}}_{\text{alter Koeffizient}} - \frac{a_{jk}}{a_{1k}} \underbrace{a_{1k}}_{\text{aus Gleichung 1}} = 0.$$

Ist $a_{jk} = 0$, bleibt Gleichung j unverändert. Auch die Koeffizienten vor x_k bleiben null, denn dort werden nur Nullen voneinander subtrahiert.

Was ist mit den Koeffizienten passiert?

Wir betrachten die zweite Gleichung:

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2. \end{cases}$$

Wir ersetzen Z_2 durch $Z_2 - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} Z_1$. Dabei wird der Koeffizient von x_k gleich

$$\boxed{a_{2k} - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} a_{1k} = 0}.$$

Deshalb lautet die neue zweite Gleichung:

$$\boxed{0x_1 + \cdots + 0x_k + \widetilde{a}_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2}.$$

Hier sind $\widetilde{a}_{2\ell} = a_{2\ell} - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} a_{1\ell}$ und $\widetilde{b}_2 = b_2 - \frac{a_{2k}}{a_{1k}} b_1$.

Konkretes Eliminationsbeispiel

$$\begin{cases} 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ x_3 = 2, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Für die dritte Gleichung nehmen wir $Z_3 \leftarrow Z_3 - \frac{1}{3} Z_1$:

$$1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 0, \qquad 0 - \frac{1}{3}(-5) = \frac{5}{3}, \qquad 1 - \frac{1}{3} \cdot 6 = -1.$$

$$\begin{cases} 3x_2 - 5x_3 = 6, \\ x_3 = 2, \\ 0x_2 + \frac{5}{3} x_3 = -1. \end{cases}$$

Jetzt greift die Induktion

Nach der Elimination hat unser System die folgende Form:

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{1k}x_k & + a_{1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k & + \widetilde{a}_{2,k+1}x_{k+1} & + \cdots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2, \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots & \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots\,\vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k & + \widetilde{a}_{m+1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + \widetilde{a}_{m+1,n}x_n = \widetilde{b}_{m+1}. \end{cases}$$

Unteres System: Die *letzten m Gleichungen* bilden ein System aus genau m Gleichungen. Darauf wenden wir die Induktionsvoraussetzung an.

Abschluss des Induktionsschritts

Nach der Induktionsvoraussetzung können wir das Untersystem (Gleichungen 2 bis $m+1$) durch *endlich viele* elementare Zeilenumformungen in Stufenform bringen.

$$\begin{cases} 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + a_{1k}x_k & + a_{1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k & + c_{2,k+1}x_{k+1} & + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots & \qquad\qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots\,\vdots \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_k & + c_{m+1,k+1}x_{k+1} & + \cdots + c_{m+1,n}x_n = d_{m+1}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten $c_{j\ell}$ und d_j entstehen bei der Umformung des unteren Systems. Dieses hat nun Stufenform.

Die Operationen betreffen nur die letzten m Gleichungen; dort bleiben die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_k$ gleich null. Die erste Gleichung beginnt bei x_k, die nichttrivialen Gleichungen darunter frühestens bei x_{k+1} und sind untereinander in Stufenform.

Somit steht das gesamte System in Stufenform.

□

1.6 Gauß-Algorithmus und Rückwärtseinsetzen

Gauß-Algorithmus: Ausgangssystem

Der Beweis liefert einen Algorithmus, um Gleichungssysteme in Stufenform zu bringen.

Beispiel:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 4, \\ \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Als Erstes eliminieren wir x_1 aus der zweiten und dritten Gleichung.

Gauß-Algorithmus: Erste Elimination

$$Z_2 \longleftarrow Z_2 - \frac{3}{2}Z_1, \qquad Z_3 \longleftarrow Z_3 - \frac{1}{2}Z_1.$$

Wir erhalten

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Die erste Spalte enthält von null verschiedene Koeffizienten; wir können (und sollen) mit dieser Spalte beginnen. Da der Koeffizient vor x_1 in der ersten Gleichung schon $2 \neq 0$ ist, müssen wir die Zeilen nicht vertauschen (dürften es aber).

Gauß-Algorithmus: Stufenform

Jetzt führen wir aus:

$$Z_3 \longleftarrow Z_3 - Z_2.$$

Das Ergebnis lautet, mit allen Nullkoeffizienten:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2, \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Das System ist in Stufenform. Weil alle verwendeten Zeilenumformungen umkehrbar sind, hat es genau dieselben Lösungen wie das Ausgangssystem.

Rückwärtseinsetzen: erst das Beispiel, dann die Regel

Ein Gleichungssystem in *Stufenform* kann man unmittelbar lösen, indem man die Gleichungen *von unten nach oben* betrachtet.

Wir erklären dieses Verfahren zuerst *an unserem Beispiel.* Danach formulieren wir den allgemeinen Algorithmus und begründen, warum er alle Lösungen liefert.

Rückwärtseinsetzen: x_3 und x_2

Wir setzen $x_4 = r$ mit einem beliebigen $r \in \mathbb{R}$.

Aus der dritten Gleichung folgt

$$-2x_3 + 2r = -1 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = r + \frac{1}{2}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$x_2 - x_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = r + \frac{3}{2}.$$

Rückwärtseinsetzen: x_1

Die erste Gleichung ergibt

$$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2,$$

also

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4.$$

Einsetzen von $x_2 = r + \frac{3}{2}$, $x_3 = r + \frac{1}{2}$ und $x_4 = r$ liefert

$$x_1 = -7r - 3.$$

Alle Lösungen des Ausgangssystems

Wir erhalten die Lösungsmenge

$$\boxed{\left\{\left(-7r-3,\ r+\frac{3}{2},\ r+\frac{1}{2},\ r\right) : r \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Jeder Wert $r \in \mathbb{R}$ ergibt eine Lösung des Systems in Stufenform, und jede Lösung entsteht auf diese Weise.

Da elementare Zeilenumformungen die Lösungsmenge nicht ändern, sind dies *genau alle Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems.*

Warum ist jedes Tupel tatsächlich eine Lösung?

Wir setzen für ein *beliebiges* $r \in \mathbb{R}$ das Tupel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-7r-3,\ r+\frac{3}{2},\ r+\frac{1}{2},\ r\right)$$

in **jede der drei Gleichungen in Stufenform** ein.

$$\text{3. Gleichung: } -2\left(r+\tfrac{1}{2}\right)+2r = \boxed{-1},$$
$$\text{2. Gleichung: } \left(r+\tfrac{3}{2}\right)-\left(r+\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{1}.$$

Auch die erste Gleichung muss noch überprüft werden.

Probe: Die erste Gleichung

Für die erste Gleichung gilt

$$\begin{aligned}
&2x_1+4x_2+4x_3+6x_4\\
&= 2(-7r-3)+4\left(r+\frac{3}{2}\right)+4\left(r+\frac{1}{2}\right)+6r\\
&= (-14r+4r+4r+6r)+(-6+6+2)\\
&= \boxed{2}.
\end{aligned}$$

Damit erfüllt **jedes** Tupel dieser Form alle drei Gleichungen und ist somit eine Lösung.

Warum gibt es keine weiteren Lösungen? Jede Lösung hat irgendeinen Wert $x_4 = r$. Die dritte, zweite und erste Gleichung bestimmen dann nacheinander x_3, x_2 und x_1 eindeutig. Damit ist die Lösungsmenge vollständig bestimmt.

Algorithmus 1 (Rückwärtseinsetzen). **Algorithmus: Rückwärtseinsetzen (1)**

Gegeben: Ein lineares Gleichungssystem in Stufenform.

Schritt 1: Prüfen, ob eine Gleichung

$$0x_1+0x_2+\cdots+0x_n = b, \qquad b \neq 0,$$

vorkommt. In diesem Fall hat das System *keine Lösung.*

Schritt 2: Wir nennen die erste Variable mit einem von null verschiedenen Koeffizienten in einer Gleichung ihre *führende Variable.*

Variablen, die in keiner Gleichung führend sind, heißen *freie Variablen.* Ihnen geben wir beliebige reelle Werte (Parameter).

Algorithmus: Rückwärtseinsetzen (2)

Schritt 3: Wir beginnen mit der letzten Gleichung, deren linke Seite nicht identisch null ist.

Da die Werte aller Variablen rechts von ihrer führenden Variablen schon bekannt sind, können wir diese führende Variable *eindeutig bestimmen*.

Schritt 4: Wir gehen zur vorherigen Gleichung. Wieder sind die Variablen rechts von der führenden Variablen bereits bestimmt. Wir bestimmen nun diese führende Variable.

So fahren wir fort, bis wir die erste Gleichung erreicht haben.

> **Ergebnis.** Für jede Wahl der freien Parameter erhalten wir ein Tupel von Zahlen.

Aussage. Ist ein Gleichungssystem in Stufenform lösbar, so erzeugt das Rückwärtseinsetzen für jede Wahl der freien Parameter eine Lösung. Umgekehrt lässt sich jede Lösung durch eine solche Parameterwahl erhalten.

Beweis. **Existenz der konstruierten Lösungen**

Wir müssen zeigen, dass das konstruierte Tupel **alle Gleichungen** erfüllt.

Die unterste nichttriviale Gleichung ist erfüllt, weil wir ihre führende Variable gerade so bestimmt haben.

Bei der vorherigen Gleichung bestimmen wir eine neue Variable so, dass auch diese Gleichung erfüllt wird.

Warum bleibt die untere Gleichung erfüllt? Wegen der Stufenform hat die neu bestimmte Variable in allen darunterliegenden Gleichungen den Koeffizienten null.

Indem wir so von unten nach oben vorgehen, erfüllen wir schließlich alle Gleichungen. Auch die Gleichungen $0 = b$ mit $b = 0$ sind automatisch erfüllt.

Warum erhalten wir *alle* Lösungen?

Sei $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ eine **beliebige** Lösung des Systems.

Wir wählen die freien Parameter gleich den entsprechenden Komponenten dieses Lösungstupels.

Die unterste nichttriviale Gleichung bestimmt ihre führende Variable eindeutig. Daher muss der durch den Algorithmus berechnete Wert gleich der entsprechenden Komponente von $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ sein.

Dasselbe Argument wenden wir nacheinander auf alle darüberliegenden Gleichungen an. Somit erhalten wir genau das vorgegebene Lösungstupel.

> **Folgerung.** Ist das System lösbar, so beschreibt das Rückwärtseinsetzen mit freien Parametern *genau alle Lösungen*.

□

2 Mengen und Abbildungen

2.1 Mengen und logische Schreibweisen

Exkurs in die Mengenlehre: Mengen und Elemente

Der Begriff *Menge* wird hier nicht formal definiert.

Anschaulich: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten. Diese Objekte heißen *Elemente*. Jedes Element kommt in der Menge nur einmal vor.

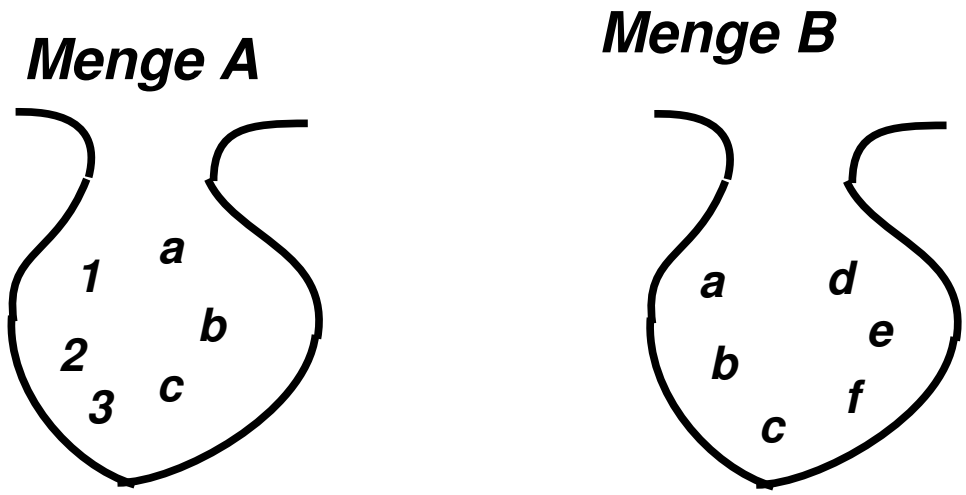


Abbildung 2.1: Mengen und ihre Elemente.

Beispiele: $\{\text{Montag}, \text{Dienstag}\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen).

Mengen: Reihenfolge und leere Menge

Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle:

$$\{\text{Montag}, \text{Dienstag}\} = \{\text{Dienstag}, \text{Montag}\}.$$

$\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.

Für ein Element a und eine Menge A schreiben wir $a \in A$ (oder $A \ni a$), wenn a Element von A ist.

Beispiele: $1 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Teilmengen und Gleichheit von Mengen

B heißt *Teilmenge* von A, wenn jedes Element von B auch Element von A ist. Schreibweise: $B \subseteq A$ (oder $A \supseteq B$).

Zwei Mengen sind gleich genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A.$$

Beispiele: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ und $\varnothing \subseteq A$ für jede Menge A.

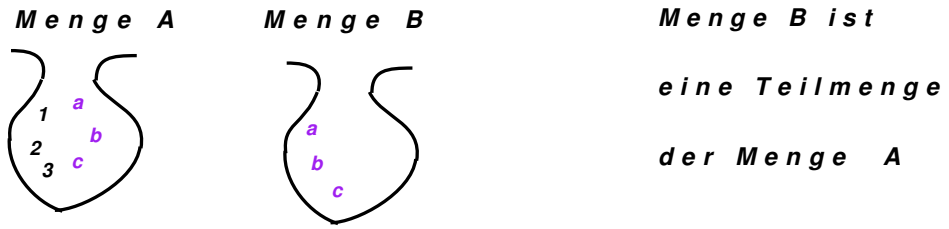


Abbildung 2.2: Darstellung der Teilmengenbeziehung.

Zur Sprache der Mathematik: Folgerung

Das Symbol $A \Longrightarrow B$ bedeutet: *Aus Aussage A folgt Aussage B.*

Beispiel: $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geq 0$.

Andere Formulierungen: »A impliziert B«, »A ist hinreichend für B«, »B ist notwendig für A«.

$A \Longleftrightarrow B$ heißt: $A \Longrightarrow B$ *und* $B \Longrightarrow A$.

Man sagt: A und B sind *äquivalent*; A gilt *genau dann, wenn* B gilt.

Quantoren: »Es existiert« und »Für alle«

$\exists$ bedeutet: »Es existiert mindestens ein ...«

Beispiel:

$$\exists x \in \mathbb{R}: \quad x^2 = 2.$$

Die Aussage ist wahr, etwa für $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$.

$\forall$ bedeutet: »Für alle ...«

Beispiel:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 \geq 0.$$

Die Bedeutung von »oder«

In der Mathematik ist »oder« *nicht ausschließend.*

Die Aussage »$1+1=2$ oder $1-1=0$« ist wahr, obwohl *beide* Teilaussagen wahr sind.

Für »oder« benutzt man auch $\vee$:

$$1+1=2 \quad \vee \quad 1-1=0 \quad \vee \quad 1+1=0.$$

Auch diese Aussage ist wahr.

Dies unterscheidet sich von »entweder ... oder«.

Definition 4 (Kartesisches Produkt)**. Produkt von Mengen**

Für Mengen A, B ist das *kartesische Produkt*

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Es besteht aus *geordneten* Paaren.

Beispiel: $A = \{1,2\}$, $B = \{+,-\}$.

$$A \times B = \{(1,+),(1,-),(2,+),(2,-)\}.$$

Analog besteht $A \times B \times C$ aus geordneten Tripeln (a,b,c).

Produkt von Mengen: eine Frage

Frage: Was ist $\varnothing \times A$?

Antwort.

$$\varnothing \times A = \varnothing.$$

Warum? Ein Paar $(a, b) \in \varnothing \times A$ müsste ein erstes Element $a \in \varnothing$ besitzen. Ein solches Element gibt es nicht.

Lösungsmengen: eine neue Formulierung

Definition: Lösungsmenge. Eine Lösung eines Systems mit n Unbekannten ist ein Tupel $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ reeller Zahlen, das *alle* Gleichungen erfüllt. Die *Lösungsmenge* ist die Menge aller dieser Tupel.

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}}.$$

Satz 1: Jede Lösung von (S) ist auch Lösung von $(S1)$, $(S2)$ und $(S3)$.

Umkehrung: Da die Zeilenumformungen rückgängig gemacht werden können, ist auch jede Lösung von $(S1)$, $(S2)$ oder $(S3)$ eine Lösung von (S).

Was folgt für die Lösungsmengen?

Bezeichnen wir die Lösungsmengen mit $L(S)$, $L(S1)$ usw.

Nach Satz 1 gilt $L(S) \subseteq L(Si)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aus der Umkehrbarkeit folgt $L(Si) \subseteq L(S)$.

Satz 1' (äquivalente Formulierung).

L(S)=L(S1)=L(S2)=L(S3).

Die elementaren Zeilenumformungen verändern die Lösungsmenge nicht.

Definition 5 (Potenzmenge). Die Menge aller Teilmengen

Sei A eine Menge. Mit 2^A bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge).

Für $A = \{1, 2\}$ gilt

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Für $A = \{1, 2, 3\}$ gilt

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Warum die Bezeichnung 2^A?

Mathematisch gilt: Eine Bezeichnung dürfen wir grundsätzlich frei wählen; wichtig ist, dass wir sie *genau definieren*.

Für das Verständnis ist es allerdings besser, wenn die Namen und Symbole gut gewählt sind.

Bei einer *endlichen* Menge A mit n Elementen besitzt 2^A genau 2^n Elemente.

$$|A| = n \quad \Longrightarrow \quad |2^A| = 2^n.$$

Das sieht man schon an den Beispielen: Zwei Elemente liefern $4 = 2^2$ Teilmengen, drei Elemente $8 = 2^3$.

2.2 Abbildungen

Definition 6 (Abbildung)**.** Eine Abbildung $F : A \to B$ ist eine Zuordnung, die jedem $a \in A$ genau ein Element $F(a) \in B$ zuordnet. Dabei heißt A Definitionsmenge und B Zielmenge.

Abbildungen: anschauliche Definition

Eine *Abbildung* $F : A \to B$ ist eine Regel, die jedem Element von A *genau ein* Element von B zuordnet.

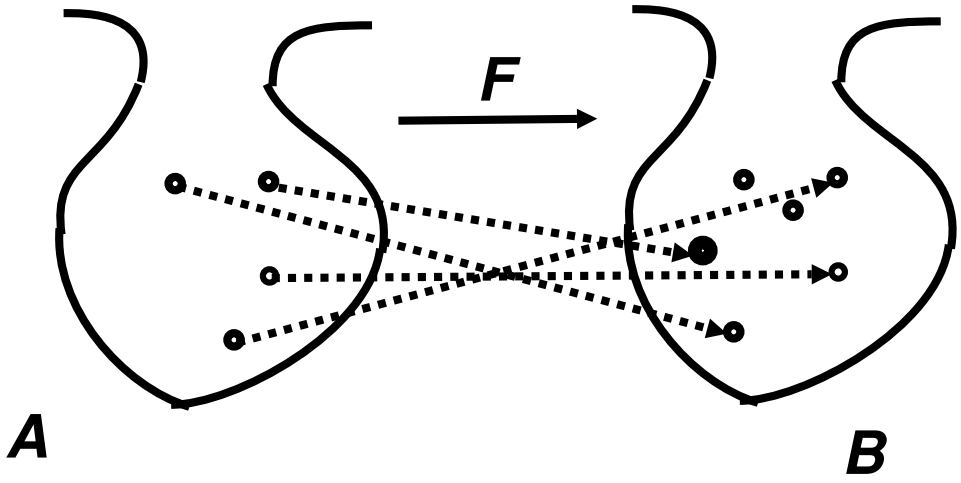


Abbildung 2.3: Eine Abbildung von der Definitionsmenge in die Zielmenge.

A heißt Definitionsmenge, B Zielmenge; das einem $a \in A$ zugeordnete Element heißt $F(a)$.

Wichtige auf der vorherigen Folie eingeführte Bezeichnung

$$\boxed{F : A \longrightarrow B}$$

- A ist die *Definitionsmenge*: Für jedes $a \in A$ muss $F(a)$ festgelegt sein.
- B ist die *Zielmenge*: Es muss $F(a) \in B$ für jedes $a \in A$ gelten.
- F ist die *Abbildung*, also die Zuordnungsvorschrift. Sie ordnet jedem $a \in A$ genau ein Element $F(a) \in B$ zu.

Beispiel: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$. Hier sind $A = B = \mathbb{R}$ und $F(2) = 4$.

Abbildungen: Beispiele und Gegenbeispiel

- $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 3x + 13$ ist eine Abbildung.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (festes $c \in \mathbb{R}$) ist eine konstante Abbildung.
- $F : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $F(x) = x + 1$ ist *keine* Abbildung mit dieser Zielmenge: $F(1) = 2 \notin [-1, 1]$.
- $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = x + 1$ ist dagegen eine Abbildung.

Warum sind das Abbildungen?

- $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 + 3x + 13$: *Ja.* Für jede reelle Zahl x ist $P(x)$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ mit festem $c \in \mathbb{R}$: *Ja.* Jedem x wird genau eine Zahl zugeordnet, nämlich immer dieselbe Zahl c.

Wichtig: Verschiedene Elemente der Definitionsmenge dürfen dasselbe Bild haben.

Warum ist das Gegenbeispiel keine Abbildung?

Betrachten wir die Zuordnung $F(x) = x + 1$.

> **Erster Versuch.** $F : [-1, 1] \to [-1, 1]$ ist *keine Abbildung*: $1 \in [-1, 1]$, aber $F(1) = 2 \notin [-1, 1]$.
>
> **Mit einer anderen Zielmenge.** $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung: Für jedes $x \in [-1, 1]$ ist $x + 1$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.

Merke: Für eine Abbildung $F : A \to B$ muss jedem $a \in A$ *genau ein* Wert *aus* B zugeordnet werden.

Abbildungen müssen nicht durch Formeln gegeben sein

Die bisherigen Beispiele wurden durch *Formeln* beschrieben. Dabei ist die Eindeutigkeit der Zuordnung unmittelbar sichtbar.

Man kann eine Abbildung aber auch durch eine *Eigenschaft* ihres Wertes beschreiben. Zum Beispiel:

$$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) \geq 0, \qquad F(x)^2 = x.$$

Warum ist das eine Abbildung? Zu jedem $x \geq 0$ gibt es *genau eine* nichtnegative reelle Zahl mit Quadrat x: die Zahl $\sqrt{x}$.

Bei einer solchen Beschreibung müssen wir also *Existenz und Eindeutigkeit* begründen.

Abbildungen als Teilmengen eines Produkts

Eine Abbildung $F : A \to B$ lässt sich durch eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ beschreiben.

Es gilt: Zu jedem $a \in A$ existiert *genau ein* $b \in B$ mit $(a, b) \in R$. Dieses b wird $F(a)$ genannt.

Beispielsweise: $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 2)\}$.

Beispiel: der Graph eines Polynoms

Für $P(x) = x^2 + 3x + 13$ ist die zugehörige Teilmenge

$$R = \{(x, x^2 + 3x + 13) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Beispiele: $(1, 17) \in R$ und $(0, 13) \in R$.
Aber $(2, 0) \notin R$, denn $2^2 + 3 \cdot 2 + 13 \neq 0$.
Die konstante Abbildung $f(x) = c$ entspricht $R = \{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

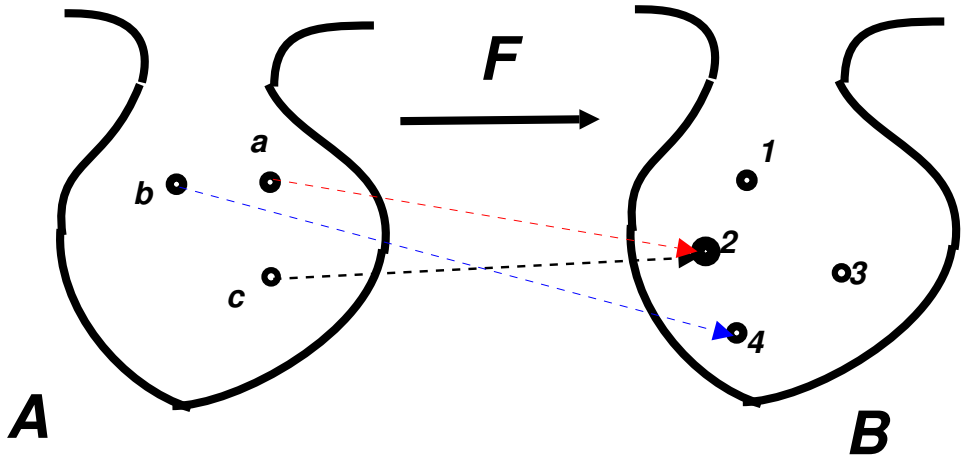


Abbildung 2.4: Der Graph einer Abbildung als Teilmenge eines kartesischen Produkts.

Arithmetische Operationen als Abbildungen

Auch die Addition reeller Zahlen ist eine Abbildung:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad +(a, b) = a + b.$$

Als Teilmenge eines kartesischen Produkts:

$$R = \{((a, b), a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Beispiel: $((1, -2), -1) \in R$, denn $1 + (-2) = -1$.

3 Vektorräume

3.1 Definition und Axiome

Definition 7 (Reeller Vektorraum)**.** Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V mit einer Addition $+ : V \times V \to V$ und einer Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, für die die acht Axiome I–VIII gelten.

Definition: reeller Vektorraum

Ein *reeller Vektorraum* besteht aus einer Menge V mit zwei Abbildungen:

$$+ \colon V \times V \to V, \qquad (u, v) \mapsto u + v,$$

$$\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V, \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v.$$

Sie heißen *Addition* und *Multiplikation mit Skalaren.*
Außerdem müssen acht Eigenschaften (Axiome) gelten.

Vektorraumaxiome: die Addition (I–IV)

Für alle $u, v, w \in V$ gilt:

I. **Assoziativität**: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

II. **Kommutativität**: $u + v = v + u$.

III. Es gibt einen **Nullvektor** $\vec{0} \in V$ mit $\vec{0} + v = v$.

IV. Zu jedem $v \in V$ gibt es einen **Gegenvektor** $-v \in V$ mit $(-v) + v = \vec{0}$.

Vektorraumaxiome: Skalare (V–VIII)

Für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

V. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.

VI. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

VII. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

VIII. $1 \cdot v = v$.

Frage. Gibt es überhaupt Mengen mit Operationen, die alle acht Axiome erfüllen?

3.2 Das Beispiel $\mathbb{R}^2$

Das Beispiel $\mathbb{R}^2$

Wir wählen $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Aus praktischen Gründen schreiben wir die Paare als Spalten:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jetzt müssen wir die beiden Operationen angeben und prüfen, dass ihre Ergebnisse wieder in V liegen (*Wohldefiniertheit*).

Addition in $\mathbb{R}^2$

Für $u = \binom{x_u}{y_u}$, $v = \binom{x_v}{y_v}$ setzen wir

$$u + v := \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da beide Einträge reelle Zahlen sind, liegt die Summe wieder in $\mathbb{R}^2$. Die Addition ist also wohldefiniert.

Axiom I: Assoziativität der Addition

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_u + x_v) + x_w \\ (y_u + y_v) + y_w \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit der Assoziativität in $\mathbb{R}$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} x_u + (x_v + x_w) \\ y_u + (y_v + y_w) \end{pmatrix} = u + (v + w).$$

Axiom II: Kommutativität der Addition

Für $u = \binom{x_u}{y_u}$ und $v = \binom{x_v}{y_v}$ gilt

$$\begin{aligned}u + v &= \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_v + x_u \\ y_v + y_u \end{pmatrix} = v + u.\end{aligned}$$

Die entscheidende Gleichheit folgt aus der Kommutativität der Addition reeller Zahlen.

Axiom III: Nullvektor

Wir definieren

$$\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $v = \binom{x_v}{y_v}$ gilt

$$\vec{0} + v = \begin{pmatrix} 0 + x_v \\ 0 + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v.$$

Also besitzt $\mathbb{R}^2$ einen neutralen Vektor bezüglich der Addition.

Axiom IV: Gegenvektor

Zu $v = \binom{x_v}{y_v}$ definieren wir

$$-v := \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$(-v) + v = \begin{pmatrix} -x_v + x_v \\ -y_v + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Multiplikation von Skalaren und Vektoren

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v = \binom{x_v}{y_v}$ definieren wir

$$\lambda v := \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $3\binom{1}{2} = \binom{3}{6}$.

Beide Koordinaten sind wieder reell, also liegt λv in $\mathbb{R}^2$. Auch diese Operation ist wohldefiniert.

Frage an Sie: Vektoraddition

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 37 \\ 21 \end{pmatrix}}.$$

Und wie lautet

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}.$$

Axiom V: Multiplikation von Skalaren

Zu zeigen: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda(\mu v) &= \lambda\begin{pmatrix}\mu x_v \\ \mu y_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}(\lambda\mu)x_v \\ (\lambda\mu)y_v\end{pmatrix} = (\lambda\mu)v.\end{aligned}$$

Wir benutzen die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Axiom VI: Distributivität in den Skalaren

Zu zeigen: $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)v &= \begin{pmatrix}(\lambda+\mu)x_v \\ (\lambda+\mu)y_v\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda x_v \\ \lambda y_v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu x_v \\ \mu y_v\end{pmatrix} \\ &= \lambda v + \mu v.\end{aligned}$$

Axiom VII: Distributivität in den Vektoren

Zu zeigen: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

$$\begin{aligned}\lambda(u+v) &= \lambda\begin{pmatrix}x_u + x_v \\ y_u + y_v\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda(x_u + x_v) \\ \lambda(y_u + y_v)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v\end{pmatrix} \\ &= \lambda u + \lambda v.\end{aligned}$$

Axiom VIII: Multiplikation mit Eins

Für $v = \binom{x_v}{y_v}$ gilt

$$1 \cdot v = \begin{pmatrix}1 \cdot x_v \\ 1 \cdot y_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_v \\ y_v\end{pmatrix} = v.$$

Damit ist auch das letzte Axiom erfüllt.

Alles zusammen: $\mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum

1. Wir haben die Operationen $+\colon V \times V \to V$ und $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ auf $V = \mathbb{R}^2$ definiert.
2. Wir haben überprüft, dass beide Operationen wohldefiniert sind.
3. Wir haben die Eigenschaften I–VIII bewiesen.

Ergebnis. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein reeller Vektorraum.

Aussage. Der Raum $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ist ein reeller Vektorraum.

Beweis. Die acht Vektorraumaxiome folgen komponentenweise aus den bekannten Rechengesetzen der reellen Zahlen, wie in den vorstehenden Rechnungen überprüft. □

3.3 Vergleich mit den Rechengesetzen in $\mathbb{R}$

Was ist an den Vektorraumaxiomen vertraut? (informell)

Die Vektorraumaxiome erinnern an die Rechengesetze für reelle Zahlen.

Bei reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ kennen wir beispielsweise

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a.$$

Für Vektoren $u, v, w \in V$ fordern wir entsprechend

$$(u + v) + w = u + (v + w), \qquad u + v = v + u.$$

Wichtiger Unterschied. Bei den reellen Zahlen addieren wir *Zahlen*, bei der Vektoraddition *Vektoren*. Die Rechenregeln haben dieselbe Form.

Null und Gegenzahl: bei Zahlen und Vektoren

Für jede reelle Zahl a gibt es die Zahl 0 und die Gegenzahl $-a$:

$$a + 0 = a, \qquad a + (-a) = 0.$$

Für jeden Vektor v gibt es den *Nullvektor* $\vec{0}$ und den *Gegenvektor* $-v$:

$$v + \vec{0} = v, \qquad v + (-v) = \vec{0}.$$

In $\mathbb{R}^2$ sind das ganz konkret

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad -v = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Multiplikation: zwei unterschiedliche Situationen

Bei reellen Zahlen gelten die Rechengesetze

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad (a + b)c = ac + bc.$$

Im Vektorraum haben wir *zwei* Arten von Addition, aber nur die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor:

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$$
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v.$$

Beachten Sie. λ, μ sind reelle Zahlen; u, v sind Vektoren. Ein Produkt uv zweier Vektoren ist durch die Vektorraumaxiome *nicht* definiert.

Assoziativität der Skalarmultiplikation und die Eins

Für reelle Zahlen gilt

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \qquad 1 \cdot a = a.$$

Die entsprechenden Axiome für Vektoren lauten

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \qquad 1 \cdot v = v.$$

Warum konnten wir das für $\mathbb{R}^2$ beweisen?. Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ sind *koordinatenweise* definiert. Jede Komponente ist eine reelle Zahl. Deshalb folgen die acht Axiome aus den bekannten Rechengesetzen in $\mathbb{R}$.

Rückblick auf die erste Woche

Wir haben den direkten Beweis und die vollständige Induktion an den Satz 1 (S. 6) und Satz 2 (S. 13) kennengelernt. Ferner haben wir Elemente der mathematischen Sprache eingeführt: Mengen, Tupel, Produkte und Abbildungen. Mit der Definition 7 (S. 26) begegnet uns erstmals eine abstrakte mathematische Struktur.

Die weiteren Kapitel können an diese Darstellung angeschlossen werden.

4 Weitere Rechenregeln in Vektorräumen

4.1 Die acht Axiome als Ausgangspunkt

Im vorigen Kapitel haben wir Vektorräume eingeführt. Zur Erinnerung: Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V mit den Abbildungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,$$

für die folgende acht Axiome gelten. Für $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ lautet ihre Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad (u+v)+w = u+(v+w),\\
\text{II}: &\quad u+v = v+u,\\
\text{III}: &\quad \exists\, \vec{0} \in V: \quad \vec{0}+v = v,\\
\text{IV}: &\quad \forall v \in V\ \exists w \in V: \quad w+v = \vec{0},\\
\text{V}: &\quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v),\\
\text{VI}: &\quad (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v,\\
\text{VII}: &\quad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v,\\
\text{VIII}: &\quad 1v = v.
\end{aligned}$$

Der Nullvektor $\vec{0}$ und die Gegenvektoren sind zunächst durch Existenzbedingungen beschrieben. Ihre Eindeutigkeit werden wir gleich nachweisen. Die folgenden Aussagen gelten deshalb *in jedem* reellen Vektorraum, nicht nur in $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1 (Trivialer Vektorraum)**.** Die einelementige Menge $V = \{\vec{0}\}$ wird durch $\vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$ und $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ zu einem Vektorraum. Die acht Axiome sind unmittelbar nachprüfbar. Ein Vektorraum kann also aus genau einem Element bestehen; leer kann er wegen Axiom III nicht sein.

4.2 Eindeutigkeit und elementare Rechenregeln

Vor einem Eindeutigkeitsbeweis ist es hilfreich, drei Fragen zu stellen: Welche Eigenschaft soll genau ein Objekt bestimmen? Was muss man annehmen, wenn es zwei Objekte mit dieser Eigenschaft gibt? Und welche Axiome erlauben, deren Gleichheit zu beweisen? Dieses Vorgehen benutzen wir bei Lemma 1.

Lemma 1 (Eindeutigkeit des Nullvektors)**.** *Der Nullvektor eines Vektorraums ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $z, z' \in V$ zwei Vektoren mit der Eigenschaft $z+v = v$ beziehungsweise $z'+v = v$ für alle $v \in V$. Dann ist insbesondere $z + z' = z'$ und $z' + z = z$. Aus der Kommutativität folgt $z + z' = z' + z$, also $z = z'$. □

Lemma 2 (Wegkürzen einer Summe)**.** *Sind $u, v \in V$ und ist $u + v = v$, so gilt $u = \vec{0}$.*

Beweis. Wir addieren zu $u + v = v$ einen Gegenvektor w von v. Assoziativität und Kommutativität liefern

$$u = u + \vec{0} = u + (v + w) = (u + v) + w = v + w = \vec{0}.$$

Hier wurde noch keine Eindeutigkeit des Gegenvektors benötigt. □

Lemma 3 (Multiplikation mit dem Skalar null)**.** *Für jedes $v \in V$ gilt $0v = \vec{0}$.*

Beweis. Wegen Axiom VI ist

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v.$$

Mit Lemma 2 folgt $0v = \vec{0}$. Dabei steht 0 für die reelle Zahl, $\vec{0}$ für den Nullvektor. □

Lemma 4 (Skalarmultiplikation des Nullvektors)**.** *Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.*

Beweis. Aus Axiom VII und $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ folgt

$$\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}.$$

Lemma 2 zeigt, dass $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. □

Lemma 5 (Wann ist eine Skalarmultiplikation null?)**.** *Sind $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ und gilt $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.*

Beweis. Angenommen, $\lambda \neq 0$. Dann existiert λ^{-1}, und mit Lemma 4 sowie Axiomen V und VIII erhalten wir

$$\vec{0} = \lambda^{-1}\vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v.$$

□

Bemerkung 1 (Vergleich der Lemmata 3–5). Die Lemmata 3 und 4 liefern jeweils eine Möglichkeit, wie ein Produkt λv gleich $\vec{0}$ werden kann. Lemma 5 besagt, dass dies die *einzigen* Möglichkeiten sind. Zusammengenommen gilt also

$$\lambda v = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } v = \vec{0}. \tag{4.1}$$

Lemma 6 (Existenz und Eindeutigkeit des Gegenvektors)**.** *Zu jedem $v \in V$ gibt es genau einen Vektor $-v$ mit $(-v) + v = \vec{0}$. Er ist durch $-v = (-1)v$ gegeben.*

Beweis. Zunächst gilt nach den Axiomen VI und VIII und nach Lemma 3

$$(-1)v + v = (-1)v + 1v = ((-1) + 1)v = 0v = \vec{0}.$$

Damit ist die Existenz gezeigt. Für die Eindeutigkeit seien u, w zwei Gegenvektoren von v, also $u + v = w + v = \vec{0}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} w &= w + \vec{0} = w + (u + v) = (w + u) + v \\ &= (u + w) + v = u + (w + v) = u + \vec{0} = u. \end{aligned}$$

Also stimmen alle Gegenvektoren überein, insbesondere mit $(-1)v$. □

Lemma 7 (Kürzen bei der Skalarmultiplikation)**.** *Ist $v \neq \vec{0}$ und gilt $\lambda v = \mu v$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so folgt $\lambda = \mu$.*

Beweis. Addition von $(-\mu)v$ liefert $(\lambda - \mu)v = 0v = \vec{0}$. Wegen Lemma 5 und $v \neq \vec{0}$ muss $\lambda - \mu = 0$ sein. □

Bemerkung 2. Ein reeller Vektorraum mit genau zwei Elementen kann nicht existieren: Hat er einen Vektor $v \neq \vec{0}$, so sind nach Lemma 7 die Vektoren λv für paarweise verschiedene $\lambda \in \mathbb{R}$ alle verschieden. Er hat dann sogar unendlich viele Elemente.

Geometrische Anschauung von Vektoren

Für geometrische Vektoren kann man einen festen Anfangspunkt O wählen. Vektoraddition wird durch die Parallelogrammregel veranschaulicht; Skalarmultiplikation entspricht einer Streckung oder Stauchung und bei negativem Faktor auch einer Richtungsumkehr.

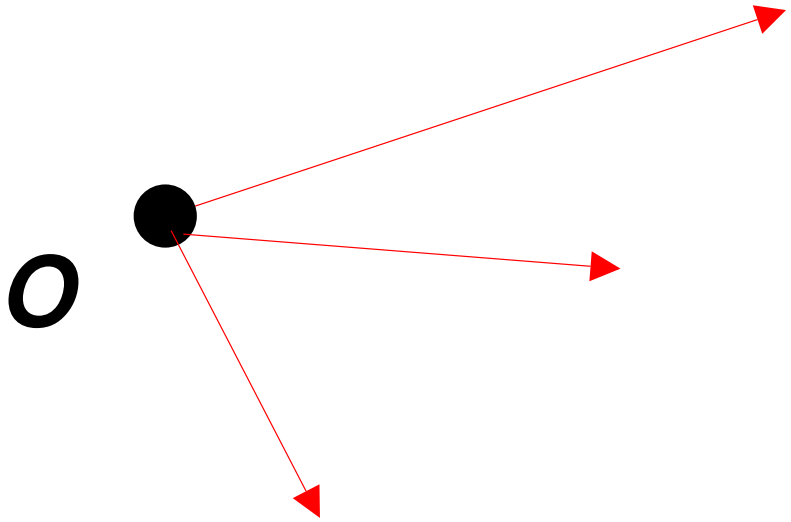


Abbildung 4.1: Geometrische Vektoren mit festem Anfangspunkt.

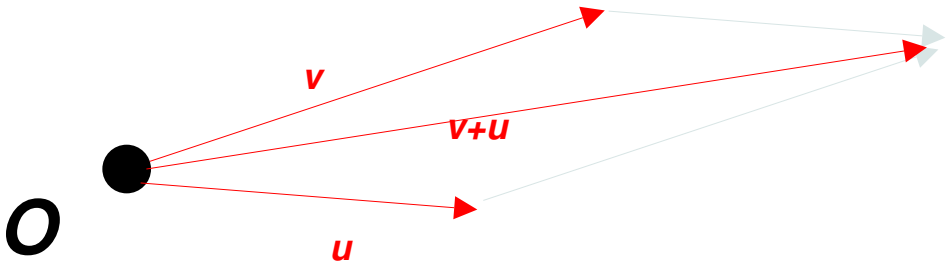


Abbildung 4.2: Geometrische Addition von Vektoren.

4.3 Das Beispiel $\mathbb{R}^n$

Für $n \geq 1$ verstehen wir unter $\mathbb{R}^n$ die Menge aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen. Wir schreiben die Tupel auch als Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

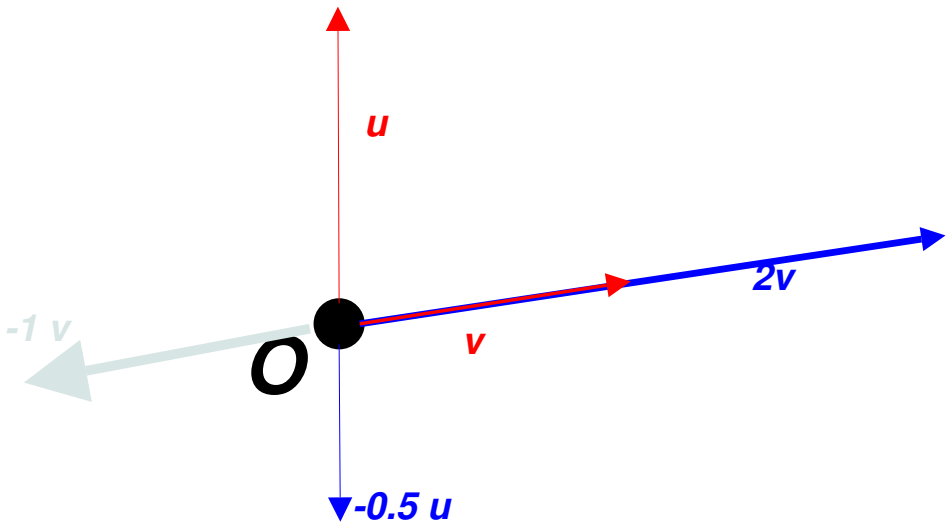


Abbildung 4.3: Skalarmultiplikation in geometrischer Darstellung.

Addition und Skalarmultiplikation erfolgen komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wie schon für $\mathbb{R}^2$ folgt jedes der acht Vektorraumaxiome aus dem entsprechenden Rechengesetz in $\mathbb{R}$, angewandt auf jede Komponente. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum.

5 Untervektorräume und Mengenoperationen

5.1 Untervektorräume

Definition 8 (Untervektorraum)**.** Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *nichtleere* Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u + v \in U, \qquad \lambda u \in U.$$

Man sagt auch: U ist *abgeschlossen bezüglich der Vektorraumoperationen.*

Die Formulierung „abgeschlossen“ bedeutet hier: Werden die Operationen auf Elemente von U angewendet, so verlässt man die Menge U nicht. Das ist keine Aussage über abgeschlossene Mengen in der Analysis.

Zum Nachweis, dass eine Menge U ein Untervektorraum ist, sind also genau drei Fragen zu beantworten: Ist U nicht leer? Liegt $u + v$ für beliebige $u, v \in U$ wieder in U? Und liegt λu für beliebige $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder in U?

Beispiel 2 (Triviale Untervektorräume)**.** Sowohl $\{\vec{0}\}$ als auch V selbst sind Untervektorräume von V. Für $\{\vec{0}\}$ folgen die Abgeschlossenheiten aus den Lemmata 3 und 4.

Beispiel 3 (Die x-Achse)**.** Die Menge $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Untervektorraum. Denn $\vec{0} = (0, 0) \in U$ und

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in U, \qquad \lambda(x, 0) = (\lambda x, 0) \in U.$$

Geometrisch ist U die durch den Ursprung verlaufende horizontale Gerade. Eine Gerade, die nicht durch den Ursprung verläuft, kann dagegen kein Untervektorraum sein, da sie den Nullvektor nicht enthält.

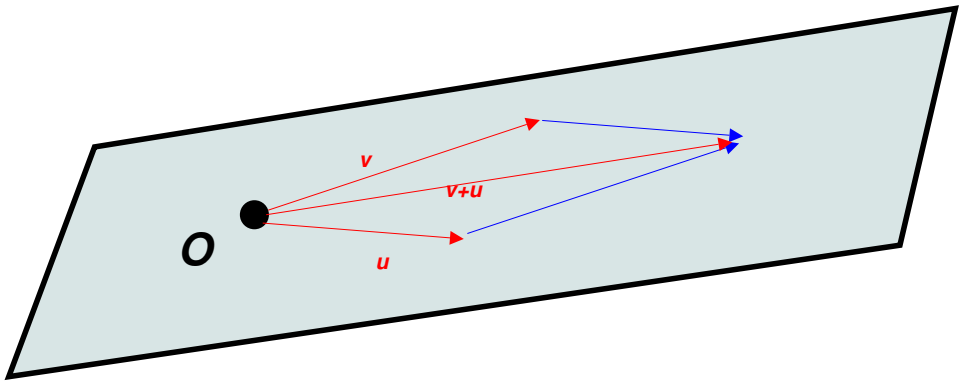


Abbildung 5.1: Geometrischer Untervektorraum: Vektoren in einer Ebene durch den Ursprung.

Satz 3 (Lösungsmenge einer homogenen Gleichung)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fest. Die Lösungsmenge*

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wir prüfen die drei Bedingungen der Definition 8. Der Nullvektor liegt in L, denn $a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in L. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) &= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) \\ &\quad + (a_1y_1 + \cdots + a_ny_n) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Somit gehört $x + y$ zu L. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt sich ebenso

$$a_1(\lambda x_1) + \cdots + a_n(\lambda x_n) = \lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = 0.$$

Damit ist auch $\lambda x \in L$. □

Bemerkung 3 (Warum die rechte Seite null wichtig ist). Ersetzt man in der Gleichung aus Satz 3 die rechte Seite 0 durch 1, so erhält man keinen Untervektorraum: Der Nullvektor erfüllt die Gleichung nicht. Ist die Lösungsmenge nicht leer, so hat außerdem die Summe zweier Lösungen links den Wert 2 statt 1. Das Beispiel der x-Achse aus Beispiel 3 entspricht der Gleichung $0 \cdot x + 1 \cdot y = 0$.

5.2 Durchschnitt, Vereinigung und disjunkte Mengen

Definition 9 (Durchschnitt und Vereinigung)**.** Für Mengen A, B definieren wir

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}, \\ A \cup B &= \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}. \end{aligned}$$

Das Wort „oder“ ist einschließend gemeint: Ein Element darf auch in beiden Mengen liegen.

Allgemeiner definieren wir für eine nichtleere Familie $\mathcal{F}$ von Mengen

$$\begin{aligned} \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M &= \{x : \text{für jedes } M \in \mathcal{F} \text{ gilt } x \in M\}, \\ \bigcup_{M \in \mathcal{F}} M &= \{x : \text{es gibt ein } M \in \mathcal{F} \text{ mit } x \in M\}. \end{aligned}$$

Diese Schreibweisen verallgemeinern den Durchschnitt und die Vereinigung zweier Mengen.

Definition 10 (Disjunkte Mengen)**.** Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \varnothing$. Eine Familie heißt *paarweise disjunkt*, wenn je zwei verschiedene Mengen dieser Familie einen leeren Durchschnitt haben.

Satz 4 (Durchschnitt von Untervektorräumen)**.** *Sei* $\mathcal{U}$ *eine nichtleere Familie von Untervektorräumen eines Vektorraums* V*. Dann ist*

$$W := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

ein Untervektorraum von V*.*

Beweis. Wir zeigen wieder Nichtleere und Abgeschlossenheit. Jeder Untervektorraum U enthält den Nullvektor: Wegen $U \neq \varnothing$ gibt es ein $u \in U$, und dann liegt auch $0u = \vec{0}$ nach Lemma 3 in U. Folglich ist $\vec{0} \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = W$.

Seien $u, v \in W$. Das bedeutet, dass u, v in *jedem* Untervektorraum $U \in \mathcal{U}$ liegen. Da jedes U bezüglich Addition abgeschlossen ist, liegt auch $u + v$ in jedem U, also in W. Ebenso liegt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ der Vektor λu in jedem U und somit in W. □

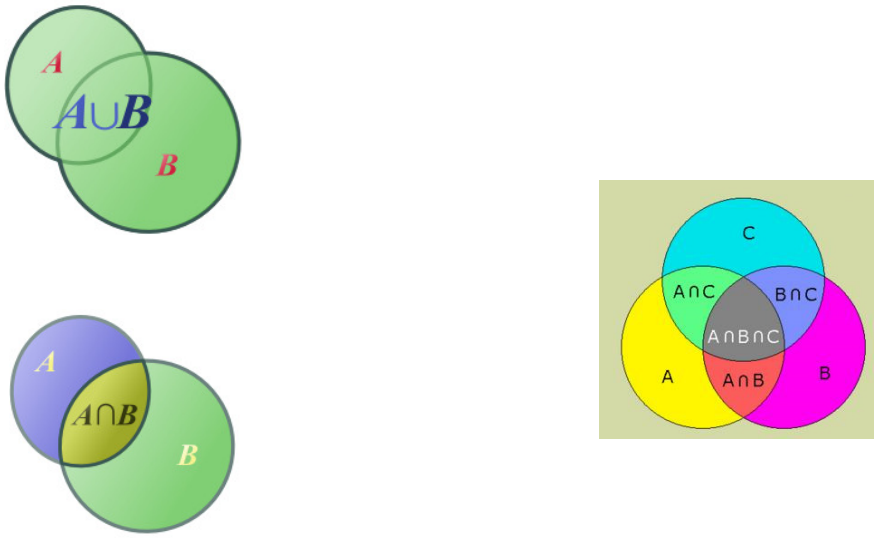


Abbildung 5.2: Mengendiagramm zur Veranschaulichung von Durchschnitt und Vereinigung.



Abbildung 5.3: Beispiel disjunkter Mengen.

Folgerung 4.1 (Homogene lineare Gleichungssysteme)**.** *Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mit beliebig vielen (endlich vielen) Gleichungen ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Das System sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Für $i = 1, \ldots, m$ sei L_i die Lösungsmenge der i-ten Gleichung. Nach Satz 3 ist jedes L_i ein Untervektorraum. Ein Tupel löst das ganze System genau dann, wenn es jede einzelne Gleichung erfüllt. Seine Lösungsmenge ist also $L = \bigcap_{i=1}^{m} L_i$ und damit nach Satz 4 ein Untervektorraum. □

5.3 Einschränkungen von Abbildungen und Operationen

Definition 11 (Einschränkung einer Abbildung)**.** Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A_1 \subseteq A$. Die *Einschränkung* $f|_{A_1} : A_1 \to B$ ist durch

$$f|_{A_1}(x) := f(x) \qquad (x \in A_1)$$

definiert.

Insbesondere können wir die Vektorraumoperationen auf eine Teilmenge $U \subseteq V$ einschränken:

$$+_U : U \times U \to V, \quad (u, v) \mapsto u + v, \qquad \cdot_U : \mathbb{R} \times U \to V, \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u.$$

Damit sind die eingeschränkten Abbildungen zunächst immer wohldefiniert *mit Zielmenge* V. Um statt V die kleinere Zielmenge U wählen zu können, müssen ihre Werte tatsächlich in U liegen. Dies ist genau die Abgeschlossenheit aus Definition 8.

Satz 5 (Untervektorräume sind Vektorräume)**.** *Ist U ein Untervektorraum des Vektorraums $(V, +, \cdot)$, so ist $(U, +_U, \cdot_U)$ mit den eingeschränkten Operationen selbst ein Vektorraum.*

Beweis. Da U bezüglich Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, haben die eingeschränkten Operationen die benötigten Zielmengen: $+_U : U \times U \to U$ und $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U$.

Nun überprüfen wir die acht Axiome. Für $u, v, w \in U$ liefert die Assoziativität in V unmittelbar

$$(u +_U v) +_U w = (u + v) + w = u + (v + w) = u +_U (v +_U w).$$

Das Kommutativgesetz folgt genauso.

Der Nullvektor von V gehört zu U: Für irgendein $u \in U$ ist $0u = \vec{0} \in U$. Dieser Vektor ist auch für die Addition in U neutral. Für jedes $u \in U$ liegt $(-1)u = -u$ in U, und nach Lemma 6 ist dies der Gegenvektor von u. Damit sind Axiome III und IV erfüllt. Die Axiome V–VIII werden, genau wie I und II, unverändert von V auf U übertragen, da alle dort vorkommenden Ausdrücke mit den eingeschränkten Operationen übereinstimmen. □

6 Linearkombinationen und lineare Hülle

6.1 Summen und Linearkombinationen

Die Addition im Vektorraum ist assoziativ und kommutativ. Daher hängt die Summe endlich vieler Vektoren weder von der Klammerung noch von der Reihenfolge der Summanden ab. Wir schreiben deshalb

$$v_1 + \cdots + v_k = \sum_{i=1}^{k} v_i.$$

Definition 12 (Linearkombination)**.** Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

heißt *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Ein Vektor v heißt Linearkombination dieser Vektoren, wenn solche Koeffizienten mit $v = \sum_i \lambda_i v_i$ existieren.

Beispiel 4. Für $v_1 = (1, 0)$ und $v_2 = (3, 1)$ gilt

$$-2v_1 + v_2 = -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Damit ist $(1, 1)$ eine Linearkombination von v_1 und v_2.

6.2 Lineare Hülle

Definition 13 (Lineare Hülle)**.** Sei $A \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge eines Vektorraums. Die *lineare Hülle* von A ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus A:

$$\operatorname{span}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : k \geq 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ v_i \in A \right\}. \tag{6.1}$$

Auch wenn A unendlich viele Elemente enthält, benutzt jede einzelne Linearkombination nur *endlich* viele Vektoren aus A. Ist $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ endlich, so darf man schreiben

$$\operatorname{span}(A) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nicht benötigte Vektoren erhalten einfach den Koeffizienten null.

Beispiel 5 (Eine Ebene in $\mathbb{R}^3$)**.** Wir betrachten

$$a = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\operatorname{span}(\{a, b\}) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}. \tag{6.2}$$

Zum Beweis dieser Mengengleichheit sind beide Inklusionen zu zeigen. Jede Linearkombination $\lambda a+\mu b = (0, \lambda, \mu)$ hat die angegebene Form; damit ist die linke Menge in der rechten enthalten. Umgekehrt gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = xa + yb,$$

also gehört jedes Element der rechten Menge zur linearen Hülle. Geometrisch handelt es sich um die Ebene $x_1 = 0$.

Satz 6 (Eigenschaften der linearen Hülle)**.** *Sei $A \subseteq V$ nicht leer. Dann gelten:*

(a) $\operatorname{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum von V.*

(b) Ist U ein Untervektorraum von V und $A \subseteq U$, so gilt $\operatorname{span}(A) \subseteq U$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (b). Für jede endliche Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ mit $v_i \in A \subseteq U$ liegt $\lambda_i v_i$ wegen der Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation in U. Weil U auch bezüglich Addition abgeschlossen ist, liegt die Summe dieser endlich vielen Vektoren in U. Somit $\operatorname{span}(A) \subseteq U$.

Für (a) prüfen wir die Untervektorraumkriterien. Die Menge $\operatorname{span}(A)$ ist nicht leer: Ist $a \in A$, so gilt $\vec{0} = 0a \in \operatorname{span}(A)$. Sind

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \qquad w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j$$

Linearkombinationen von Elementen aus A, dann ist

$$u + w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_m u_m$$

wieder eine endliche Linearkombination von Elementen aus A. Ferner ist für $t \in \mathbb{R}$

$$tu = \sum_{i=1}^{k} (t\lambda_i) v_i$$

ebenfalls eine Linearkombination von Elementen aus A. Damit sind alle drei Kriterien erfüllt. □

Folgerung 6.1 (Kleinster Untervektorraum mit A)**.** *Sei $A \subseteq V$ nicht leer und $\mathcal{U}_A$ die Menge aller Untervektorräume von V, die A enthalten. Dann gilt*

$$\operatorname{span}(A) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_A} U. \tag{6.3}$$

Insbesondere ist die lineare Hülle der kleinste Untervektorraum, der A enthält.

Beweis. Nach Satz 6(b) liegt $\operatorname{span}(A)$ in jedem $U \in \mathcal{U}_A$ und damit in ihrem Durchschnitt:

$$\operatorname{span}(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_A} U.$$

Andererseits ist nach Satz 6(a) die Menge $\operatorname{span}(A)$ selbst ein Untervektorraum. Sie enthält jedes $a \in A$, denn $a = 1a$. Also gehört $\operatorname{span}(A)$ zur Familie $\mathcal{U}_A$. Der Durchschnitt aller Mengen dieser Familie ist insbesondere in $\operatorname{span}(A)$ enthalten. Das liefert die umgekehrte Inklusion. □

Rückblick auf die zweite Woche

Wir haben aus den acht Axiomen weitere Rechenregeln für Vektorräume bewiesen und den Begriff des Untervektorraums eingeführt. Homogene Gleichungssysteme und Schnitte von Untervektorräumen liefern Konstruktionen von Untervektorräumen. Schließlich haben wir Linearkombinationen und die lineare Hülle kennengelernt; sie werden für die folgenden Themen eine zentrale Rolle spielen.

7 Basen, Dimension und Austausch von Vektoren

7.1 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Wir haben in Satz 6 (S. 41) gesehen, dass sich aus einer Teilmenge A eines Vektorraums die lineare Hülle $\operatorname{span}(A)$ bilden lässt. Ist $\operatorname{span}(A) = V$, so heißt A ein *Erzeugendensystem* von V. Ein Erzeugendensystem kann überflüssige Vektoren enthalten; eine Basis ist ein Erzeugendensystem ohne solche Redundanz.

Definition 14 (Lineare Unabhängigkeit)**.** Eine Teilmenge A eines Vektorraums V heißt *linear unabhängig*, wenn für jede endliche Auswahl *paarweise verschiedener* Vektoren $v_1, \dots, v_k \in A$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ aus

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \vec{0} \tag{7.1}$$

stets $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ folgt. Andernfalls heißt A *linear abhängig*.

Die Gleichung (7.1) mit lauter Nullkoeffizienten heißt die *triviale Darstellung* des Nullvektors. Bei einem Tupel von Vektoren müssen wir die einzelnen Positionen unterscheiden: Das Tupel (v, v) ist beispielsweise linear abhängig, denn $1v + (-1)v = \vec{0}$, auch wenn die zugehörige Menge nur das Element v enthält.

Definition 15 (Basis)**.** Sei V ein nichttrivialer reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt eine *Basismenge*, wenn sie linear unabhängig ist und $\operatorname{span}(A) = V$ gilt. Ein Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ heißt *Basistupel*, wenn seine Vektoren paarweise verschieden sind und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basismenge ist. Wo keine Verwechslung entsteht, sprechen wir kurz von einer *Basis*.

Bemerkung 4 (Der triviale Vektorraum). Für $V = \{\vec{0}\}$ vereinbaren wir, dass die leere Menge eine Basis ist. Das ist eine ergänzende Konvention: Die bisherige Definition der linearen Hülle galt nur für nichtleere Mengen. Für den Nullraum lässt sich auch sinnvoll $\operatorname{span}(\varnothing) = \{\vec{0}\}$ setzen (leere Summe). Die Einermenge $\{\vec{0}\}$ ist jedenfalls linear abhängig, weil $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Beispiel 6 (Standardbasis und einfache Gegenbeispiele)**.** Die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Denn jeder Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ besitzt die Darstellung

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \tag{7.2}$$

und aus $\sum_i \lambda_i e_i = \vec{0}$ folgt durch Vergleich der Komponenten $\lambda_i = 0$ für alle i.

In $\mathbb{R}^3$ ist die Menge $\{e_1, e_2\}$ zwar linear unabhängig, aber keine Basis: Sie erzeugt nicht den Vektor e_3. Dagegen ist $\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2\}$ erzeugend, aber abhängig, da $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = \vec{0}$ eine nichttriviale lineare Relation liefert.

Beispiel 7 (Eine andere Basis von $\mathbb{R}^2$)**.** Die Menge

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Tatsächlich gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Somit sind beide Standardbasisvektoren Linearkombinationen aus A, also $\operatorname{span}(A) = \mathbb{R}^2$. Aus $\lambda(1,2)^T + \mu(3,4)^T = \vec{0}$ folgt das Gleichungssystem $\lambda + 3\mu = 0$, $2\lambda + 4\mu = 0$. Subtraktion des Doppelten der ersten Gleichung von der zweiten liefert $-2\mu = 0$, also $\mu = \lambda = 0$. Die Menge ist folglich linear unabhängig.

Bemerkung 5 (Wie prüft man, ob Vektoren eine Basis bilden?). Für eine endliche Menge $A = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ prüfen wir getrennt: (i) Ist nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$? (ii) Können alle Vektoren des $\mathbb{R}^n$ als Linearkombinationen dargestellt werden? Für (ii) genügt es, dies für $e_1, \ldots, e_n$ zu zeigen: Nach (7.2) ist dann jeder Vektor Linearkombination der e_j und deshalb auch der v_i. Diese Aufgaben lassen sich mithilfe linearer Gleichungssysteme und des Gauß-Algorithmus aus Satz 2 (S. 13) lösen.

7.2 Charakterisierung von Basen

Satz 7 (Drei Kennzeichnungen einer Basis)**.** *Sei A eine nichtleere Teilmenge eines nichttrivialen Vektorraums V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) A ist eine Basis von V.

(b) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig *als endliche Linearkombination paarweise verschiedener Elemente aus A darstellen, wobei Darstellungen, die sich nur durch zusätzliche Summanden mit Koeffizient null unterscheiden, als dieselbe gelten.*

(c) A ist linear unabhängig und für jedes $v \in V \setminus A$ ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis. Wir zeigen (a)⇒(b)⇒(c)⇒(a).

(a)⇒(b). Weil A erzeugend ist, besitzt jedes $v \in V$ mindestens eine Darstellung als endliche Linearkombination von Vektoren aus A. Nehmen wir zwei solche Darstellungen an:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j b_j.$$

Wir fassen die endlich vielen auftretenden Vektoren zu einer gemeinsamen, paarweise verschiedenen Liste $c_1, \ldots, c_r$ zusammen und setzen fehlende Koeffizienten gleich null. Dadurch wird aus der Gleichheit

$$\sum_{s=1}^{r} (\alpha_s - \beta_s) c_s = \vec{0}.$$

Da A linear unabhängig ist, verschwindet jeder Koeffizient $\alpha_s - \beta_s$. Somit stimmen die Darstellungen bis auf das Einfügen oder Weglassen von Nullsummanden überein.

(b)⇒(c). Die Darstellung des Nullvektors durch Nullkoeffizienten ist eindeutig; deshalb kann keine nichttriviale lineare Relation zwischen paarweise verschiedenen Elementen von A

bestehen. Also ist A unabhängig. Sei nun $v \notin A$. Nach (b) gibt es $a_1, \dots, a_k \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_i \lambda_i a_i$. Folglich ist

$$(-1)v + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \vec{0}$$

eine nichttriviale lineare Relation in $A \cup \{v\}$. Damit ist diese Menge abhängig.

(c)⇒(a). Nach Voraussetzung ist A unabhängig. Wir zeigen, dass A erzeugend ist. Falls nicht, gäbe es $v \in V \setminus \operatorname{span}(A)$, also insbesondere $v \notin A$. Nach (c) wäre $A \cup \{v\}$ abhängig. In einer nichttrivialen Relation

$$\alpha v + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = \vec{0}$$

muss $\alpha \neq 0$ gelten; sonst hätten wir eine nichttriviale Relation allein zwischen den $a_i \in A$, entgegen der Unabhängigkeit. Auflösen nach v liefert aber

$$v = -\alpha^{-1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \in \operatorname{span}(A),$$

einen Widerspruch. Daher $\operatorname{span}(A) = V$ und A ist eine Basis. □

Bemerkung 6 (Maximale Unabhängigkeit). Die Aussage (c) aus Satz 7 (S. 44) bedeutet: Einer Basis kann man keinen weiteren Vektor hinzufügen, ohne die lineare Unabhängigkeit zu verlieren. Das ist ein wichtiges Gegenstück zur Eigenschaft, dass eine Basis den ganzen Raum erzeugt.

7.3 Existenz endlicher Basen

Satz 8 (Existenz einer Basis)**.** *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, also $V = \operatorname{span}(A)$ für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine Basis $A' \subseteq A$ von V; insbesondere kann man eine endliche Basis wählen. Für den Nullraum gilt dabei die Konvention aus Bemerkung 4 (S. 43).*

Beweis. Ist $V = \{\vec{0}\}$, so wählen wir $A' = \varnothing$. Andernfalls benutzen wir vollständige Induktion über die Anzahl $m = |A|$ der Vektoren des gegebenen Erzeugendensystems.

Induktionsanfang. Ist $m = 1$, also $A = \{v\}$, und V nichttrivial, so ist $v \neq \vec{0}$. Damit ist A linear unabhängig: Aus $\lambda v = \vec{0}$ folgt nach den Rechenregeln für Vektorräume $\lambda = 0$. Da A erzeugend ist, ist es eine Basis.

Induktionsvoraussetzung. Jedes nichttriviale, von höchstens m Vektoren erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis, die Teilmenge eines gegebenen Erzeugendensystems ist.

Induktionsschritt. Sei nun $A = \{v_1, \dots, v_{m+1}\}$ ein Erzeugendensystem. Ist A unabhängig, so ist A bereits eine Basis. Andernfalls gibt es eine nichttriviale Relation

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{m+1} v_{m+1} = \vec{0}.$$

Nach Umnummerierung dürfen wir $\lambda_{m+1} \neq 0$ annehmen. Daher

$$v_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}} v_i. \tag{7.3}$$

Der Vektor v_{m+1} ist also eine Linearkombination der übrigen Vektoren. Jede Linearkombination aus A kann mithilfe von (7.3) ohne v_{m+1} geschrieben werden. Deshalb erzeugt $A \setminus \{v_{m+1}\}$ weiterhin V. Diese Menge besitzt nur m Elemente; nach Induktionsvoraussetzung enthält sie eine Basis A'. Insbesondere gilt $A' \subseteq A$. □

Bemerkung 7 (Die Basis ist nicht eindeutig). Schon im $\mathbb{R}^2$ sind sowohl die Standardbasis als auch die Basis aus Beispiel 7 (S. 44) mögliche Basen. Satz 8 garantiert die Existenz einer Basis, nicht ihre Eindeutigkeit.

7.4 Dimension und das Austauschlemma von Steinitz

Definition 16 (Dimension)**.** Ein Vektorraum heißt *endlichdimensional*, wenn er eine endliche Basis besitzt. Die Zahl der Vektoren einer solchen Basis heißt seine *Dimension*, geschrieben $\dim V$. Für den Nullraum setzen wir $\dim\{\vec{0}\} = 0$. Dass die Anzahl nicht von der Basis abhängt, ist eine Aussage, die wir noch beweisen müssen.

Satz 9 (Unabhängigkeit der Dimension von der Basiswahl)**.** *Je zwei endliche Basen eines endlich erzeugten Vektorraums bestehen aus gleich vielen Vektoren. Insbesondere ist die Dimension aus Definition 16 (S. 46) wohldefiniert.*

Hinweis zum Beweis. Die Vorlesung formuliert diesen Satz bereits in Woche 3, verschiebt seinen Beweis jedoch. Dazu dienen zunächst das folgende Austauschlemma und anschließend der Austauschsatz von Steinitz (Lemma 9 in den nächsten Vorlesungen). Der Beweis wird im nächsten Kapitel mit Hilfe von Lemma 9 geführt. Bis dahin verwenden wir die Aussage noch nicht als bewiesen.

Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz)**.** *Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und*

$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Gilt $\lambda_k \neq 0$, so ist

$$B' = \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

ebenfalls eine Basis von V.

Beweis. Wir prüfen die beiden Eigenschaften aus Definition 15 (S. 43).

(1) Erzeugendeneigenschaft. Wegen $\lambda_k \neq 0$ können wir die Darstellung von w nach v_k auflösen:

$$v_k = \lambda_k^{-1} w - \sum_{i \neq k} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} v_i. \tag{7.4}$$

Damit ist auch der entfernte Basisvektor v_k eine Linearkombination von Vektoren aus B'. Alle übrigen v_i gehören ohnehin zu B'. Da B den Raum V erzeugt, folgt $\operatorname{span}(B') = V$.

(2) Lineare Unabhängigkeit. Sei

$$\mu w + \sum_{i \neq k} \mu_i v_i = \vec{0}.$$

Einsetzen der Darstellung von w ergibt

$$\mu\lambda_k v_k + \sum_{i \neq k} (\mu\lambda_i + \mu_i) v_i = \vec{0}.$$

Da B unabhängig ist, müssen alle Koeffizienten verschwinden. Insbesondere ist $\mu\lambda_k = 0$, also $\mu = 0$. Damit folgt auch $\mu_i = 0$ für jedes $i \neq k$. Somit ist B' unabhängig und nach (1) eine Basis.

Außerdem ist w von jedem v_i für $i \neq k$ verschieden: Andernfalls hätte w neben der angegebenen Darstellung eine Darstellung mit Koeffizient 0 bei v_k, im Widerspruch zur Eindeutigkeit aus Satz 7 (S. 44), da $\lambda_k \neq 0$. Daher besitzt B' tatsächlich n verschiedene Elemente, wie für den Austausch einer Basismenge verlangt. □

Beispiel 8 (Austausch in $\mathbb{R}^2$)**.** Für die Standardbasis $B = \{e_1, e_2\}$ sei $w = 2e_1 + 3e_2$. Da der Koeffizient von e_1 gleich $2 \neq 0$ ist, liefert Lemma 8, dass $\{w, e_2\}$ eine Basis ist. Das sieht man unmittelbar an der Umstellung $e_1 = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}e_2$. Entsprechend ist wegen des Koeffizienten $3 \neq 0$ auch $\{e_1, w\}$ eine Basis.

Rückblick auf die dritte Woche

Wir haben die Definition einer Basis kennengelernt und Beispiele untersucht. Satz 7 beschreibt Basen sowohl durch eindeutige Linearkombinationen als auch durch maximale lineare Unabhängigkeit. Satz 8 erklärt, warum wir aus einem endlichen Erzeugendensystem eine Basis auswählen können. Für die spätere Begründung der Unabhängigkeit der Basislänge (Satz 9) ist ein Austauschargument entscheidend; als Vorbereitung haben wir mit Lemma 8 gezeigt, wie sich ein Basisvektor austauschen lässt.

8 Austauschsatz, Dimension und Koordinaten

8.1 Vom Austauschlemma zum Austauschsatz

In Lemma 8 (S. 46) haben wir gesehen, dass ein Basisvektor durch einen geeigneten Vektor ersetzt werden kann, ohne die Basiseigenschaft zu verlieren. Das folgende Lemma erlaubt es, *mehrere* Vektoren auszutauschen. Sein Beweis ist die Grundlage für den noch offenen Beweis von Satz 9 (S. 46).

Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis eines Vektorraums V, und sei $A = \{w_1, \dots, w_k\}$ eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) *$k \leq n$;*

(b) *es gibt paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, so dass*

$$(B \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}) \cup \{w_1, \dots, w_k\}$$

wieder eine Basis von V ist.

Beweis. Wir führen Induktion nach k. Für $k = 0$ ist nichts auszutauschen; die unveränderte Menge B bleibt eine Basis.

Sei nun $k \geq 1$, und die Behauptung gelte für $k-1$. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig: Eine nichttriviale Relation in der Teilmenge wäre auch eine solche in der größeren Menge. Daher dürfen wir die Induktionsvoraussetzung auf $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ anwenden.

Zuerst zeigen wir $k \leq n$. Wäre $k > n$, dann gilt wegen der Induktionsvoraussetzung $k - 1 \leq n$, also $k - 1 = n$. Nach Austausch aller n ursprünglichen Basisvektoren erhielten wir die Basis $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$. Der weitere Vektor w_k wäre eine Linearkombination dieser Basis. Somit wäre A linear abhängig, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich $k \leq n$.

Nun führen wir den k-ten Austausch durch. Die Induktionsvoraussetzung liefert nach geeigneter Umnummerierung der ursprünglichen Basisvektoren die Basis

$$B' = \{w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n\}.$$

Da B' eine Basis ist, existieren Koeffizienten mit

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i. \tag{8.1}$$

Mindestens einer der Koeffizienten λ_i muss ungleich null sein. Andernfalls läge w_k in der linearen Hülle von $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$, was die lineare Unabhängigkeit von A verletzt. Wählen wir $j \in \{k, \dots, n\}$ mit $\lambda_j \neq 0$, so dürfen wir nach dem Austauschlemma Lemma 8 (S. 46) den Vektor v_j der Basis B' durch w_k ersetzen. Der Index j ist von allen zuvor verwendeten Indizes verschieden. Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen. □

Beispiel 9 (Nicht jede Austauschwahl ist möglich)**.** Seien e_1, e_2, e_3 die Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $\alpha w_1 + \beta w_2 = \vec{0}$ führt auf $\alpha + 3\beta = 0$ und $2\alpha + 4\beta = 0$, also $\alpha = \beta = 0$. Die Vektoren w_1, w_2 sind unabhängig. Man darf e_2, e_3 durch w_1, w_2 ersetzen; $\{e_1, w_1, w_2\}$ ist eine Basis. Dagegen ist $\{w_1, w_2, e_3\}$ *keine* Basis, weil alle Vektoren die erste Komponente null haben. Die Indizes im Austauschsatz können also nicht beliebig gewählt werden.

8.2 Die Dimension ist wohldefiniert

Nun schließen wir den in Woche 3 angekündigten Beweis von Satz 9 (S. 46) ab.

Beweis von Satz 9. Seien $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $C = \{w_1, \ldots, w_k\}$ zwei Basen desselben endlichdimensionalen Vektorraums V. Die Menge C ist linear unabhängig. Mit B als Basis liefert Lemma 9 (S. 48) zunächst $k \leq n$. Vertauschen wir die Rollen von B und C, so folgt ebenso $n \leq k$. Also ist $n = k$, wie behauptet. □

Damit ist die in Definition 16 (S. 46) eingeführte Dimension unabhängig von der Wahl der Basis; insbesondere ist $\dim \mathbb{R}^n = n$ und $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Folgerung 9.1 (Unabhängige Vektoren in voller Anzahl)**.** *Sei $\dim V = n$. Jede linear unabhängige Menge $A \subseteq V$ mit genau n Elementen ist eine Basis von V.*

Beweis. Angenommen, $\operatorname{span}(A) \neq V$. Wählen wir $w \notin \operatorname{span}(A)$. Dann ist $A \cup \{w\}$ linear unabhängig: In einer Relation $\mu w + \sum_i \lambda_i v_i = \vec{0}$ wäre bei $\mu \neq 0$ der Vektor w eine Linearkombination der $v_i \in A$; also $\mu = 0$, und wegen der Unabhängigkeit von A verschwinden auch alle λ_i. Damit hätten wir $n+1$ unabhängige Vektoren in einem Raum der Dimension n, entgegen Lemma 9 (S. 48). Also $\operatorname{span}(A) = V$. □

Folgerung 9.2 (Erzeugende Vektoren in voller Anzahl)**.** *Sei $\dim V = n$. Jede erzeugende Menge $A \subseteq V$ mit genau n Elementen ist eine Basis.*

Beweis. Nach Satz 8 (S. 45) lässt sich aus der endlichen erzeugenden Menge A eine Basis $B \subseteq A$ auswählen. Nach Satz 9 (S. 46) hat B genau n Elemente. Da auch A aus n Elementen besteht, gilt $B = A$. □

Bemerkung 8 (Basistest mit nur einer Bedingung)*.* In einem n-dimensionalen Vektorraum genügt es bei *genau* n vorgegebenen Vektoren, entweder die lineare Unabhängigkeit *oder* die Erzeugendeneigenschaft zu prüfen; die andere Eigenschaft folgt aus den beiden vorigen Folgerungen. Im $\mathbb{R}^n$ prüft man die Unabhängigkeit, indem man das homogene System

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

löst. Es muss die triviale Lösung als einzige Lösung haben.

Folgerung 9.3 (Basisergänzungssatz)**.** *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension n. Jede linear unabhängige Menge $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq V$ lässt sich durch $n-k$ weitere Vektoren zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis. Wählen wir eine Basis B mit n Elementen. Nach Lemma 9 (S. 48) gilt $k \leq n$ und wir dürfen k geeignete Vektoren von B durch $w_1, \ldots, w_k$ ersetzen. Die verbleibenden $n - k$ Vektoren von B sind die gesuchte Ergänzung. □

Folgerung 9.4 (Untervektorräume endlichdimensionaler Räume)**.** *Ist U ein Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so ist auch U endlichdimensional und*

$$\dim U \leq \dim V.$$

Beweis. Schreiben wir $n = \dim V$. Gäbe es in U eine linear unabhängige Menge mit $n+1$ Vektoren, so wäre sie auch in V linear unabhängig, im Widerspruch zu Lemma 9 (S. 48). Falls U nicht endlich erzeugt wäre, könnten wir schrittweise Vektoren $u_1, \ldots, u_{n+1} \in U$ mit $u_{j+1} \notin \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_j\}$ auswählen; diese Vektoren wären linear unabhängig. Also ist U endlich erzeugt. Nach Satz 8 (S. 45) besitzt U eine endliche Basis, und ihre Anzahl ist wegen Lemma 9 (S. 48) höchstens n. □

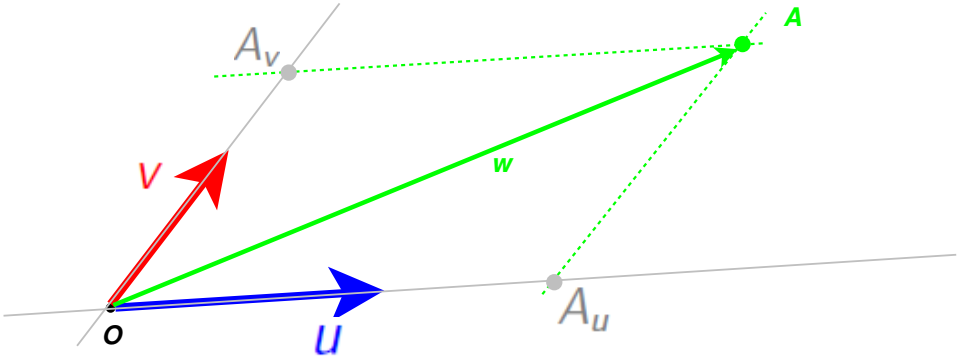


Abbildung 8.1: Anschauliche Darstellung von Basen und der Dimension in der Ebene.

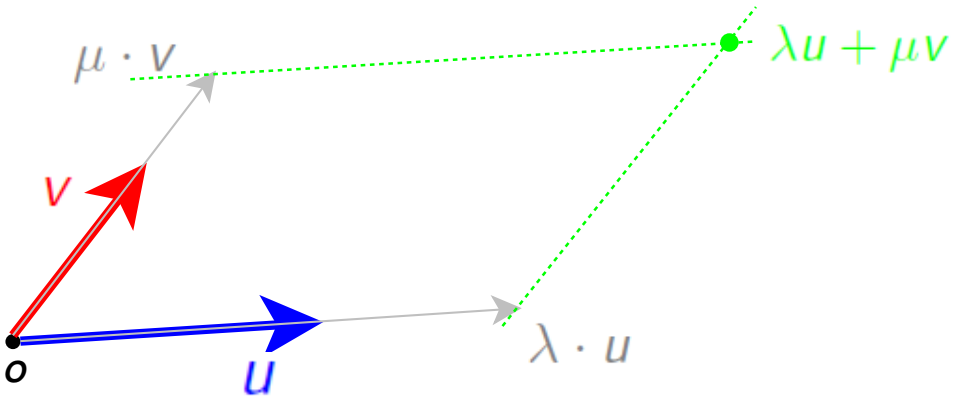


Abbildung 8.2: Geometrische Veranschaulichung linear unabhängiger Vektoren.

8.3 Summe von Untervektorräumen

Definition 17 (Summe von Untervektorräumen)**.** Für Untervektorräume E, F eines Vektorraums V setzen wir

$$E + F := \{e + f \mid e \in E,\ f \in F\}. \tag{8.2}$$

Beispiel 10. Für $E = \{(x, 0)^T : x \in \mathbb{R}\}$ und $F = \{(0, y)^T : y \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^2$ gilt $E + F = \mathbb{R}^2$, denn $(x, y)^T = (x, 0)^T + (0, y)^T$. Dagegen besteht $E \cup F$ nur aus den beiden Koordinatenachsen.

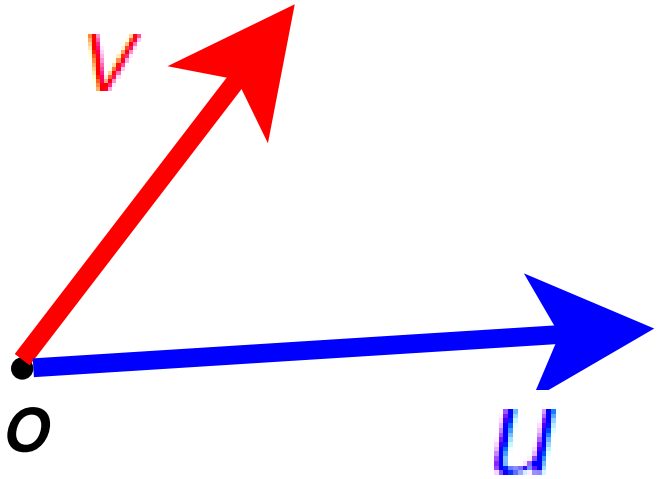


Abbildung 8.3: Weitere geometrische Darstellung einer Basis in der Ebene.

Satz 10 (Dimensionsformel für die Summe)**.** *Sind E, F Untervektorräume eines endlichdimensionalen Vektorraums V, dann ist $E+F$ ein Untervektorraum und*

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F). \tag{8.3}$$

Beweis. Zuerst ist $E+F$ ein Untervektorraum. Er ist nicht leer, da $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in E+F$. Sind $u_1 = e_1 + f_1$, $u_2 = e_2 + f_2$ mit $e_i \in E$, $f_i \in F$, so ist

$$u_1 + u_2 = (e_1 + e_2) + (f_1 + f_2) \in E + F.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt ebenso $\lambda(e+f) = \lambda e + \lambda f \in E+F$. Damit folgt die Behauptung aus Definition 8 (S. 36).

Nun konstruieren wir eine Basis. Der Durchschnitt $E \cap F$ ist nach Satz 4 (S. 37) ein Untervektorraum. Wählen wir eine Basis $a_1, \ldots, a_m$ von $E \cap F$; im Fall $E \cap F = \{\vec{0}\}$ ist $m = 0$. Mit dem Basisergänzungssatz Folgerung 9.3 (S. 49) ergänzen wir diese Basis zu

$$(a_1, \ldots, a_m, e_1, \ldots, e_p) \quad \text{in } E, \qquad (a_1, \ldots, a_m, f_1, \ldots, f_q) \quad \text{in } F.$$

Wir behaupten, dass

$$\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_m, e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$$

eine Basis von $E+F$ ist.

Erzeugendeneigenschaft. Jedes $v \in E+F$ hat die Form $v = e + f$. Dabei ist e eine Linearkombination von a_i, e_j und f eine Linearkombination von a_i, f_j. Also wird v von $\mathcal{B}$ erzeugt. Umgekehrt sind alle Vektoren von $\mathcal{B}$ in $E+F$, so dass die lineare Hülle von $\mathcal{B}$ wegen Satz 6 (S. 41) in $E+F$ liegt.

Lineare Unabhängigkeit. Nehmen wir an, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j e_j + \sum_{\ell=1}^{q} \gamma_\ell f_\ell = \vec{0}. \tag{8.4}$$

Dann gilt

$$t := \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j e_j = -\sum_\ell \gamma_\ell f_\ell.$$

Die linke Seite liegt in E, die rechte in F. Somit ist $t \in E \cap F$ und es gibt δ_i mit $t = \sum_i \delta_i a_i$. Vergleichen wir diese Darstellung mit $t = -\sum_\ell \gamma_\ell f_\ell$ in der Basis $(a_1, \ldots, a_m, f_1, \ldots, f_q)$ von F, dann ergeben sich $\gamma_\ell = 0$ für alle ℓ. Die Relation (8.4) reduziert sich auf eine Relation zwischen den Basisvektoren von E, weshalb auch alle α_i und β_j verschwinden. Somit ist $\mathcal{B}$ eine Basis.

Sie enthält $m + p + q$ Vektoren. Da $\dim E = m + p$, $\dim F = m + q$ und $\dim(E \cap F) = m$, folgt (8.3). □

8.4 Koordinaten bezüglich einer Basis

Definition 18 (Koordinaten und Koordinatenabbildung)**.** Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ein *geordnetes* Basistupel von V. Nach Satz 7 (S. 44) hat jedes $v \in V$ genau eine Darstellung

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n. \tag{8.5}$$

Die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißen die *Koordinaten von v bezüglich B*. Die *Koordinatenabbildung* ist

$$C_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad C_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

Die Reihenfolge ist wichtig: Verändert man die Reihenfolge der Basisvektoren, so ändert sich im Allgemeinen auch die Reihenfolge der Koordinaten.

Beispiel 11 (Koordinaten als lineares Gleichungssystem)**.** Im $\mathbb{R}^2$ sei $B = ((1,2)^T, (3,4)^T)$. Der Vektor $w = (5,6)^T$ hat genau dann die Koordinaten $(x,y)^T$, wenn

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

also $x + 3y = 5$, $2x + 4y = 6$. Die zweite Gleichung minus zweimal die erste ergibt $-2y = -4$, also $y = 2$ und $x = -1$. Folglich $C_B(w) = (-1, 2)^T$. Dies ist eine direkte Anwendung des Gauß-Algorithmus aus Satz 2 (S. 13).

Bemerkung 9 (Geometrische Ebene). Zwei nichtparallele Vektoren der geometrischen Ebene bilden eine Basis: Sie sind linear unabhängig, und jeder ebene Vektor lässt sich als Linearkombination der beiden schreiben. Bei zwei senkrechten Einheitsvektoren sprechen wir von *kartesischen Koordinaten*. Die Koordinaten hängen von der gewählten geordneten Basis ab, nicht vom Vektor allein.

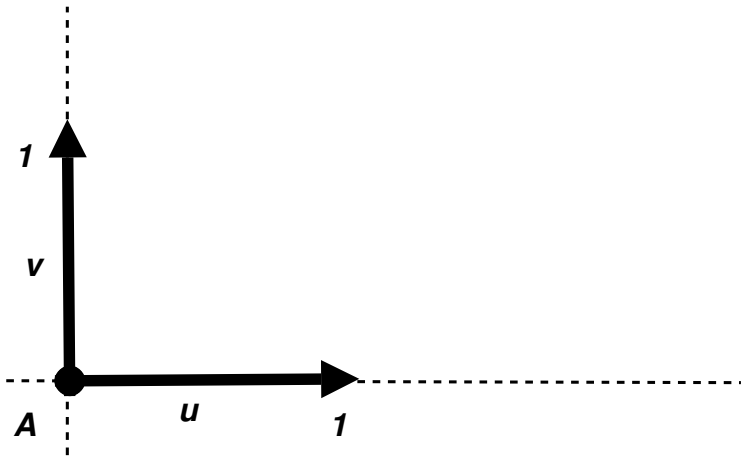


Abbildung 8.4: Koordinaten eines Vektors in der geometrischen Ebene.

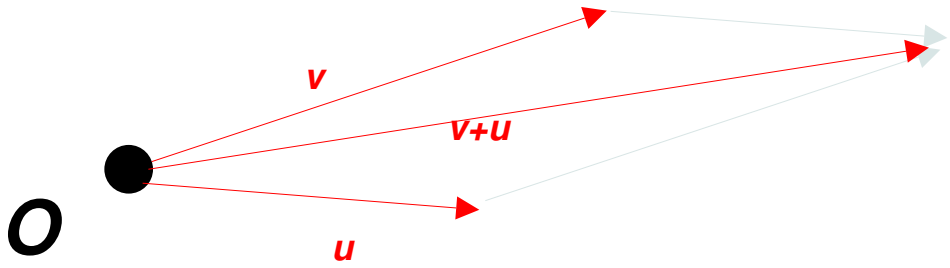


Abbildung 8.5: Geometrische Konstruktion in der Ebene aus den Vorlesungsfolien.

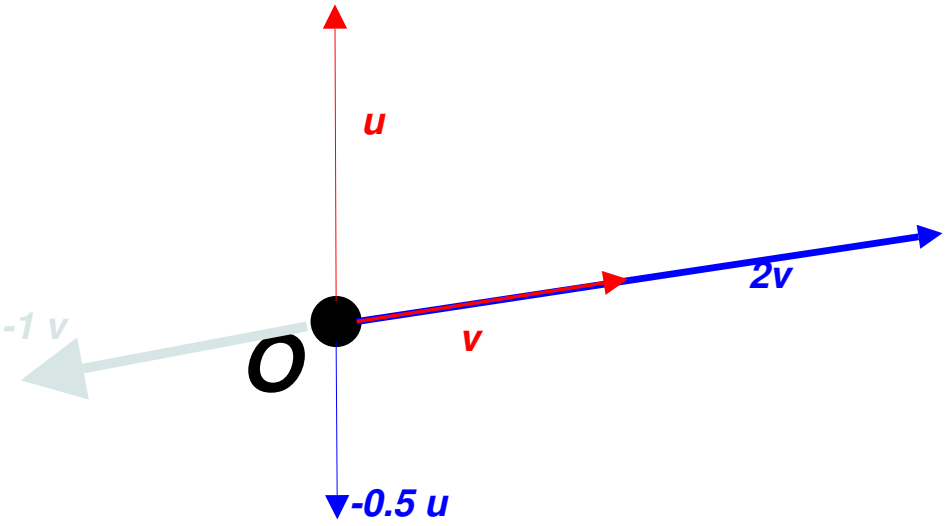


Abbildung 8.6: Geometrische Konstruktion und Koordinatenwahl.

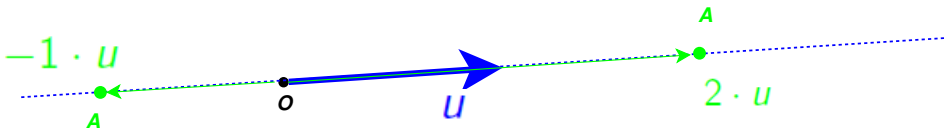


Abbildung 8.7: Geometrischer Vektorraum und seine Operationen.

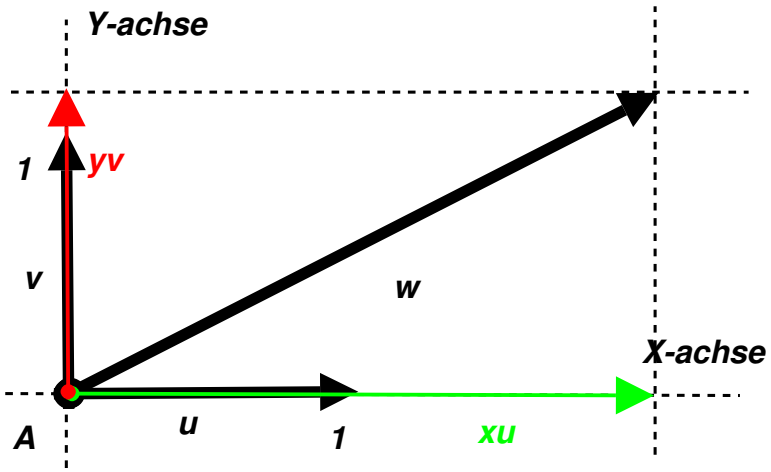


Abbildung 8.8: Kartesische Koordinaten in der Ebene.

9 Lineare Abbildungen und Isomorphismen

9.1 Definition und erste Beispiele

Definition 19 (Lineare Abbildung)**.** Seien V, U reelle Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to U$ heißt *linear*, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(v + w) = f(v) + f(w), \qquad f(\lambda v) = \lambda f(v). \tag{9.1}$$

Die Addition und die Skalarmultiplikation links gehören zum Ausgangsraum V, diejenigen rechts zum Zielraum U. Beide Räume können verschieden sein.

Beispiel 12 (Lineare und nichtlineare Abbildungen)**.** Die Einbettung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f((x, y)^T) = (x, y, 0)^T$, ist linear, weil Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise erfolgen. Ebenso ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Streckung $v \mapsto av$ linear, wie man mit den Vektorraumaxiomen prüft. Die Nullabbildung $v \mapsto \vec{0}$ ist linear. Die Verschiebung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g((x, y)^T) = (x + 1, y)^T$, ist nicht linear: Es gilt $g(\vec{0}) \neq \vec{0}$, im Widerspruch zu Lemma 11 (S. 57) unten.

Bemerkung 10 (Linearität von Linearkombinationen). Aus (9.1) folgt durch wiederholtes Anwenden für jede endliche Linearkombination

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i). \tag{9.2}$$

Diese Identität wird in den folgenden Beweisen mehrfach benutzt.

Lemma 10 (Linearität der Koordinatenabbildung)**.** *Für jedes Basistupel $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ist die Koordinatenabbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$ aus Definition 18 (S. 52) linear.*

Beweis. Schreiben wir $u = \sum_i x_i v_i$ und $w = \sum_i y_i v_i$, so folgt aus den Vektorraumaxiomen

$$u + w = \sum_i (x_i + y_i) v_i, \qquad \lambda u = \sum_i (\lambda x_i) v_i.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Koordinatendarstellung (Satz 7 (S. 44)) sind dies die Koordinaten von $u + w$ beziehungsweise λu. Also gilt $C_B(u + w) = C_B(u) + C_B(w)$ und $C_B(\lambda u) = \lambda C_B(u)$. □

9.2 Injektivität, Surjektivität, Bild und Kern

Definition 20 (Injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** Eine Abbildung $f : A \to B$ ist *injektiv*, falls $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ impliziert; sie heißt *surjektiv*, falls jedes $b \in B$ mindestens ein Urbild in A besitzt. Sie heißt *bijektiv*, wenn beides gilt.

Definition 21 (Bild und Kern)**.** Für eine Abbildung $f : A \to B$ bezeichnet

$$\mathrm{Bild}(f) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$$

die *Bildmenge*. Ist $f : V \to U$ linear, so heißt

$$\ker f = \{v \in V : f(v) = \vec{0}\} \tag{9.3}$$

der *Kern* von f.

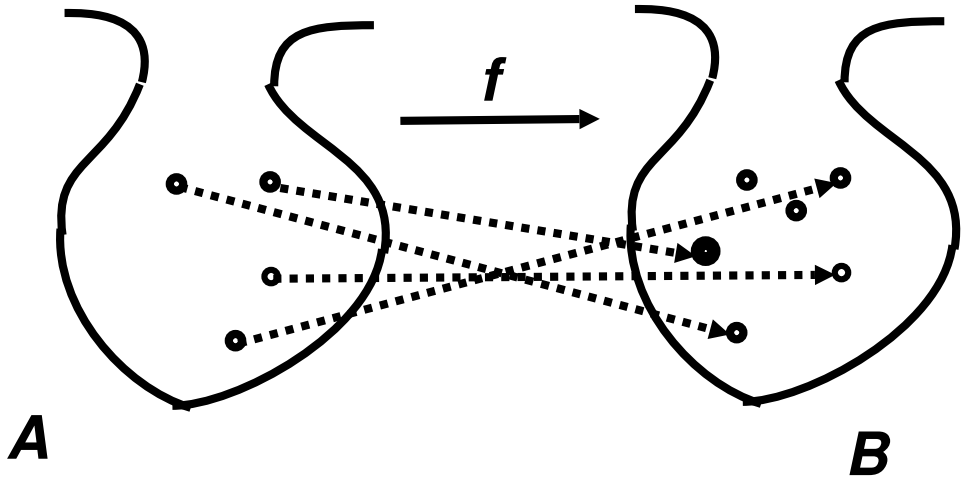


Abbildung 9.1: Beispiel einer injektiven Abbildung.

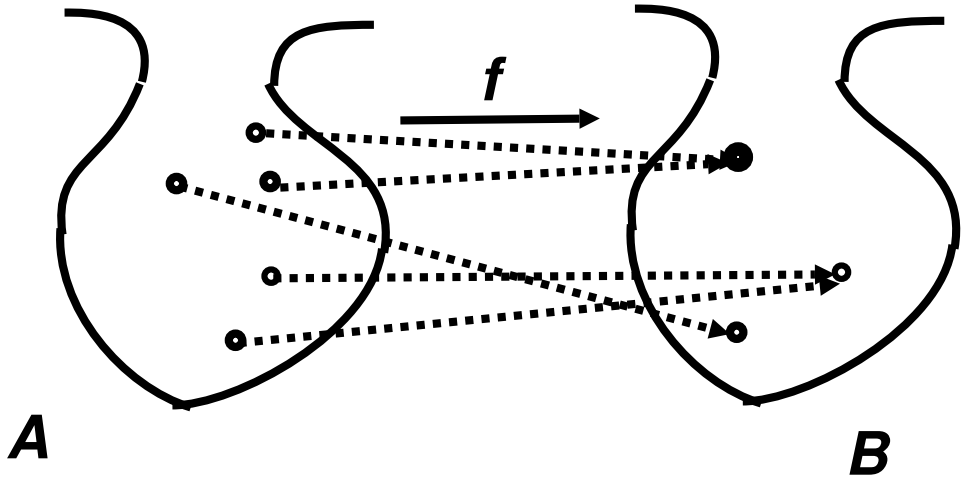


Abbildung 9.2: Beispiel einer surjektiven Abbildung.

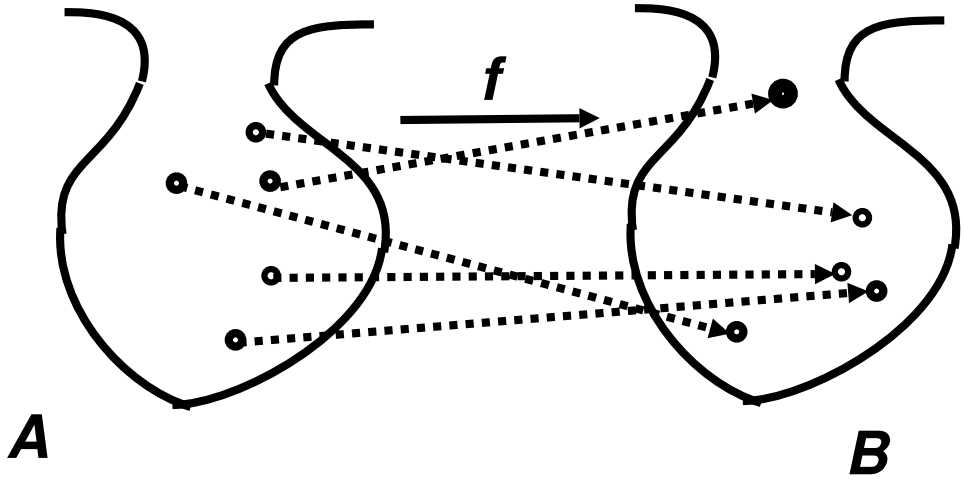


Abbildung 9.3: Beispiel einer bijektiven Abbildung.

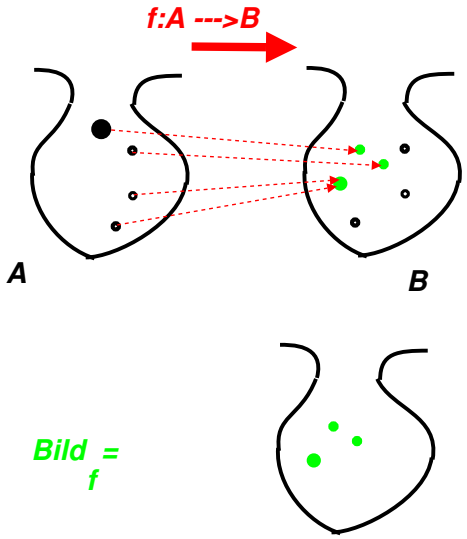


Abbildung 9.4: Die Bildmenge einer Abbildung.

Lemma 11 (Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen)**.** *Sei $f : V \to U$ linear. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$*;*

(b) $f(-v) = -f(v)$ *für jedes $v \in V$;*

(c) f *ist genau dann injektiv, wenn* $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Beweis. Nach Lemma 3 (S. 33) ist $\vec{0} = 0v$ für jedes $v \in V$. Aus der Linearität folgt $f(\vec{0}) = f(0v) = 0f(v) = \vec{0}$, wobei wir nochmals Lemma 3 (S. 33) benutzen. Nach Lemma 6 (S. 33) ist $-v = (-1)v$, also $f(-v) = (-1)f(v) = -f(v)$.

Für (c) sei zunächst $\ker f = \{\vec{0}\}$ und $f(v) = f(w)$. Wegen (b) gilt $f(v-w) = f(v)-f(w) = \vec{0}$, also $v - w \in \ker f$ und somit $v = w$: f ist injektiv. Umgekehrt folgt aus Injektivität und $f(v) = \vec{0} = f(\vec{0})$ unmittelbar $v = \vec{0}$. Somit ist $\ker f = \{\vec{0}\}$. □

9.3 Verkettung und inverse Abbildungen

Definition 22 (Verkettung und Identität)**.** Für $f : A \to B$ und $g : B \to C$ definiert man $g \circ f : A \to C$ durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_A : A \to A$ ist durch $\mathrm{id}_A(a) = a$ gegeben.

Definition 23 (Links- und Rechtsinverse)**.** Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt *Linksinverse* zu $f : A \to B$, wenn $g \circ f = \mathrm{id}_A$; sie heißt *Rechtsinverse*, wenn $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Lemma 12 (Einseitige Inverse und Injektivität/Surjektivität)**.** *Sei $f : A \to B$ mit $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

(a) f *ist injektiv genau dann, wenn f eine Linksinverse besitzt;*

(b) f *ist surjektiv genau dann, wenn f eine Rechtsinverse besitzt.*

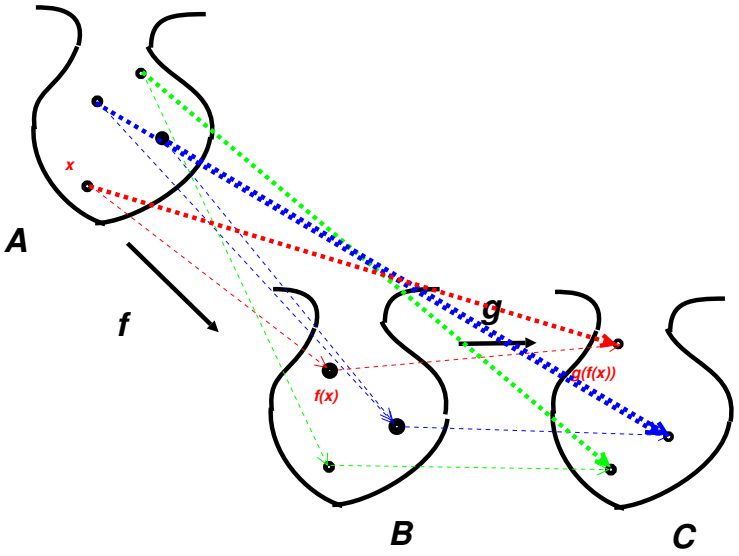


Abbildung 9.5: Verkettung zweier Abbildungen.

Beweis. Existiert g mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$, dann folgt aus $f(a) = f(a')$ durch Anwendung von g, dass $a = a'$. Ist umgekehrt f injektiv, wählen wir $a_0 \in A$ und definieren $g : B \to A$ durch $g(b) = a$, falls $b = f(a)$; durch Injektivität ist a eindeutig. Für $b \notin \mathrm{Bild}(f)$ setzen wir $g(b) = a_0$. Dann ist $g(f(a)) = a$.

Gibt es g mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$, so hat jedes $b \in B$ das Urbild $g(b)$ und f ist surjektiv. Ist f surjektiv, wählen wir für jedes $b \in B$ *ein* Urbild $g(b) \in A$. So erhalten wir eine Rechtsinverse. Der letzte Schritt verwendet im Allgemeinen das Auswahlaxiom (für die in den Vorlesungen verwendeten endlichen Mengen ist keine solche Schwierigkeit vorhanden). □

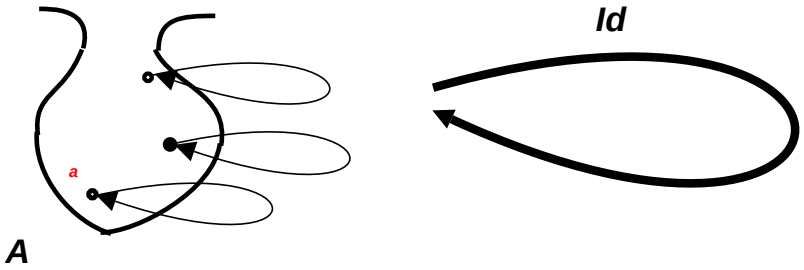


Abbildung 9.6: Zu Links- und Rechtsinversen: ein Diagramm aus den Vorlesungsfolien.

Lemma 13 (Umkehrabbildung einer Bijektion)**.** *Eine Abbildung $f : A \to B$ ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g : B \to A$ existiert mit*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B .$$

Eine solche Abbildung g ist eindeutig und heißt f^{-1}.

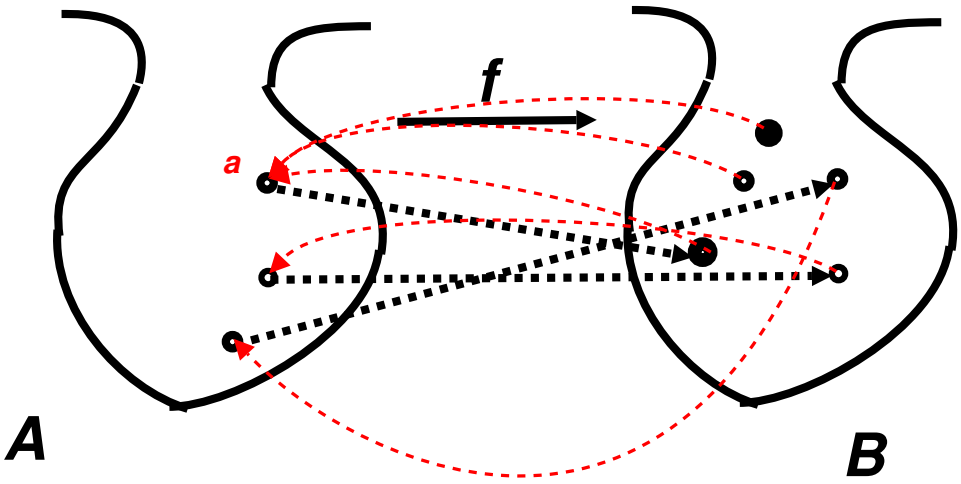


Abbildung 9.7: Konstruktion einer Linksinversen.

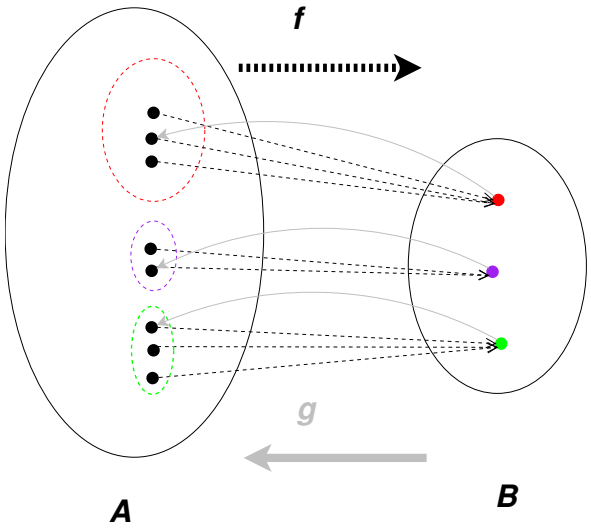


Abbildung 9.8: Wahl von Urbildern zur Konstruktion einer Rechtsinversen.

Beweis. Ist f bijektiv, so hat jedes $b \in B$ genau ein Urbild. Dieses definieren wir als $f^{-1}(b)$. Beide Gleichungen folgen aus der Definition. Umgekehrt impliziert die Existenz von g durch Lemma 12 (S. 57) (für nichtleeres A) sowohl Injektivität als auch Surjektivität; im Fall $A = \varnothing$ erzwingt die Existenz einer Abbildung $g : B \to A$, dass auch $B = \varnothing$ ist, und f ist ebenfalls bijektiv.

Sind $g, h : B \to A$ zwei beidseitige Inverse, so gilt $g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h$. Also ist die Umkehrabbildung eindeutig. □

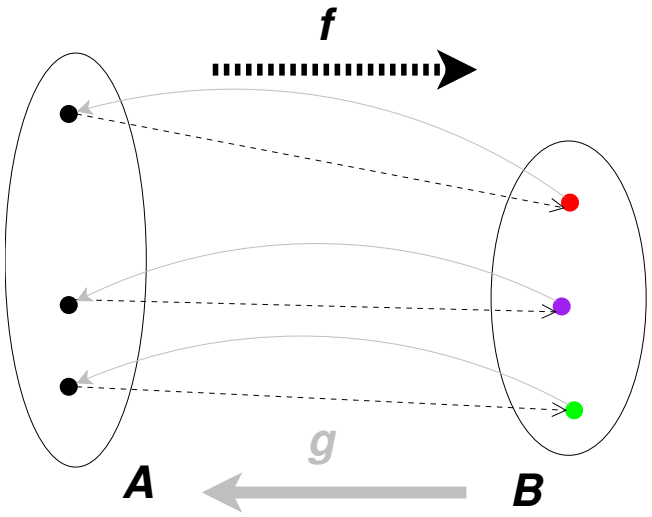


Abbildung 9.9: Die Umkehrabbildung einer Bijektion.

9.4 Isomorphismen und Dimension

Definition 24 (Isomorphismus)**.** Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to U$ heißt *Isomorphismus* von Vektorräumen. Existiert ein solcher, so heißen V und U *isomorph*.

Lemma 14 (Inverse eines Isomorphismus)**.** *Ist $f : V \to U$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : U \to V$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Lemma 13 (S. 58) existiert eine bijektive Umkehrabbildung $g = f^{-1}$. Für $u_1 = f(v_1)$ und $u_2 = f(v_2)$ gilt wegen der Linearität von f

$$g(u_1 + u_2) = g(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = g(u_1) + g(u_2).$$

Ebenso $g(\lambda u_1) = g(f(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda g(u_1)$. Also ist g linear. □

Satz 11 (Isomorphiesatz für endlichdimensionale Vektorräume)**.** *Zwei endlichdimensionale reelle Vektorräume V und U sind genau dann isomorph, wenn $\dim V = \dim U$. Insbesondere ist jeder n-dimensionale Vektorraum zu $\mathbb{R}^n$ isomorph.*

Beweis. Sei zuerst $f : V \to U$ ein Isomorphismus und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Wir zeigen, dass $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Basis von U ist. Falls $\sum_i \lambda_i f(v_i) = \vec{0}$, so ist nach (9.2) auch $f(\sum_i \lambda_i v_i) = \vec{0}$. Die Injektivität von f und Lemma 11 (S. 57) liefern $\sum_i \lambda_i v_i = \vec{0}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von B sind alle $\lambda_i = 0$. Außerdem besitzt jedes $u \in U$ wegen der Surjektivität ein Urbild $v \in V$, das sich als $v = \sum_i \lambda_i v_i$ schreiben lässt. Somit

ist $u = \sum_i \lambda_i f(v_i)$. Die Bilder der Basisvektoren bilden also eine Basis von U, weshalb $\dim U = n = \dim V$ gilt.

Sei umgekehrt $\dim V = \dim U = n$. Wir wählen Basen $B = (v_1, \dots, v_n)$ von V und $D = (u_1, \dots, u_n)$ von U. Jede Darstellung $v = \sum_i \lambda_i v_i$ ist eindeutig (Satz 7 (S. 44)); daher ist die Abbildung

$$f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i u_i$$

wohldefiniert. Sie ist linear, weil Addition und Skalarmultiplikation auf den Koeffizienten wirken. Sie ist injektiv, denn $f(v) = \vec{0}$ impliziert wegen der Unabhängigkeit der u_i, dass alle Koeffizienten von v null sind. Sie ist surjektiv, weil jeder Vektor von U eine Linearkombination der u_i ist. Also ist f ein Isomorphismus. Für $U = \mathbb{R}^n$ kann man die Standardbasis wählen; dann ist f die Koordinatenabbildung C_B aus Definition 18 (S. 52), deren Linearität schon in Lemma 10 (S. 55) gezeigt wurde. Der Fall $n = 0$ ist der eindeutige Isomorphismus zwischen den Nullräumen. □

Lemma 15 (Lineare Fortsetzung einer Basisvorschrift)**.** *Seien V, U Vektorräume, $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $u_1, \dots, u_n \in U$ beliebig. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ mit $f(v_i) = u_i$ für alle i.*

Beweis. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig als $v = \sum_i \lambda_i v_i$ darstellen. Deshalb definieren wir

$$f(v) := \sum_i \lambda_i u_i. \tag{9.4}$$

Die Eindeutigkeit der Koeffizienten nach Satz 7 (S. 44) zeigt, dass diese Vorschrift wohldefiniert ist. Aus $v + w = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) v_i$ folgt

$$f(v + w) = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) u_i = f(v) + f(w),$$

und entsprechend $f(\alpha v) = \alpha f(v)$. Für $v = v_j$ sind die Koordinaten $\lambda_i = \delta_{ij}$, also $f(v_j) = u_j$.

Ist $g : V \to U$ eine weitere lineare Abbildung mit $g(v_i) = u_i$, so gilt für alle $v = \sum_i \lambda_i v_i$ nach (9.2)

$$g(v) = \sum_i \lambda_i g(v_i) = \sum_i \lambda_i u_i = f(v).$$

Daher $g = f$, womit auch die Eindeutigkeit bewiesen ist. □

Beispiel 13 (Eine lineare Abbildung durch ihre Basiswerte)**.** Für $V = \mathbb{R}^3$, $U = \mathbb{R}^2$ und die Standardbasis e_1, e_2, e_3 seien $f(e_1) = (1, 0)^T$, $f(e_2) = (0, 1)^T$ und $f(e_3) = (1, 1)^T$ vorgeschrieben. Dann ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$f((x, y, z)^T) = (x + z, y + z)^T.$$

Sie ist ein Beispiel für die Konstruktion aus Lemma 15 (S. 61).

9.5 Die erste Dimensionsformel

Satz 12 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)**.** *Sei $f : V \to U$ linear. Dann gelten:*

(a) $\mathrm{Bild}(f)$ *ist ein Untervektorraum von U;*

(b) $\ker f$ *ist ein Untervektorraum von V;*

(c) *ist V endlichdimensional, so ist*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Bild}(f). \tag{9.5}$$

Beweis. (a) Wegen Lemma 11 (S. 57) ist $\vec{0} = f(\vec{0})$ ein Element von $\mathrm{Bild}(f)$. Sind $u_1 = f(v_1)$ und $u_2 = f(v_2)$ im Bild, so gilt $u_1 + u_2 = f(v_1 + v_2)$; ferner $\lambda u_1 = f(\lambda v_1)$. Das Bild ist also unter beiden Operationen abgeschlossen und nach Definition 8 (S. 36) ein Untervektorraum.

(b) Wegen $f(\vec{0}) = \vec{0}$ liegt $\vec{0}$ im Kern. Sind $v, w \in \ker f$, so ist $f(v + w) = f(v) + f(w) = \vec{0}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \vec{0}$. Damit ist auch der Kern ein Untervektorraum.

(c) Sei $\dim V = n$, und sei $(k_1, \ldots, k_r)$ eine Basis von $\ker f$ (existiert wegen Folgerung 9.4 (S. 50)). Nach dem Basisergänzungssatz Folgerung 9.3 (S. 49) können wir sie zu einer Basis

$$(k_1, \ldots, k_r, v_1, \ldots, v_{n-r})$$

von V ergänzen. Wir behaupten, dass $(f(v_1), \ldots, f(v_{n-r}))$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ ist.

Erzeugendeneigenschaft. Jedes $u \in \mathrm{Bild}(f)$ hat die Form $u = f(v)$. Schreiben wir $v = \sum_i \alpha_i k_i + \sum_j \beta_j v_j$, so ist wegen $f(k_i) = \vec{0}$

$$u = f(v) = \sum_j \beta_j f(v_j).$$

Lineare Unabhängigkeit. Ist $\sum_j \beta_j f(v_j) = \vec{0}$, so liegt $w := \sum_j \beta_j v_j$ im Kern. Also gilt einerseits $w = \sum_i \alpha_i k_i$ für geeignete α_i, andererseits $w = \sum_j \beta_j v_j$. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung in der gewählten Basis von V (Satz 7 (S. 44)) verschwinden alle β_j. Damit bilden die $f(v_j)$ eine Basis des Bildes. Ihre Anzahl ist $n - r$, während $r = \dim \ker f$. Dies ergibt (9.5). □

Folgerung 12.1 (Injektivität und Surjektivität von Endomorphismen)**.** *Ist V endlichdimensional und $f : V \to V$ linear, so gilt*

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv}.$$

Beweis. Nach Lemma 11 (S. 57) ist f genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{\vec{0}\}$, also wenn $\dim \ker f = 0$. Wegen (9.5) ist dies genau dann der Fall, wenn $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$. Da das Bild ein Untervektorraum von V ist, folgt aus Folgerung 9.1 (S. 49), angewandt auf eine Basis des Bildes, dass dann $\mathrm{Bild}(f) = V$, also f surjektiv ist. Die umgekehrte Richtung folgt mit derselben Dimensionsformel. □

Rückblick auf die Wochen 4 und 5

Der Steinitzsche Austauschsatz Lemma 9 (S. 48) liefert den Beweis, dass die Dimension wohldefiniert ist (Satz 9 (S. 46)). Daraus ergeben sich die Basisergänzung und die Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen (Satz 10 (S. 51)). Die Koordinatenabbildung macht die abstrakte Beschreibung durch Basen konkret. In Woche 5 haben wir lineare Abbildungen, Kern, Bild und Isomorphismen kennengelernt. Die erste Dimensionsformel Satz 12 (S. 61) verbindet diese Begriffe und erklärt, weshalb bei Endomorphismen endlichdimensionaler Räume Injektivität und Surjektivität äquivalent sind.