Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesungswoche 2: Vektorräume, Untervektorräume und lineare Hülle

Vladimir Matveev

Wintersemester 2026/27

Plan der zweiten Vorlesungswoche

1. Rechenregeln aus den acht Vektorraumaxiomen; Lemmas 1–7.
2. Untervektorräume: Beispiele und Konstruktionen, insbesondere homogene Gleichungssysteme.
3. Mengenoperationen und Einschränkungen von Abbildungen.
4. Linearkombinationen und lineare Hülle: Welche Vektoren lassen sich aus vorgegebenen Vektoren erzeugen?

Wiederholung: Was ist ein Vektorraum?

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V.$$

Die Abbildungen heißen Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

Für sie gelten acht Axiome (I–VIII):

- Addition: Assoziativität, Kommutativität, Nullvektor, Gegenvektor;
- Skalarmultiplikation: Assoziativität, zwei Distributivgesetze, $1v = v$.

Alle acht Vektorraumaxiome im Überblick

Für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten:

I	$(u+v)+w = u+(v+w)$	(Assoziativität),
II	$u+v = v+u$	(Kommutativität),
III	$\exists \vec{0} \in V:\ \vec{0}+v = v$	(Nullvektor),
IV	$\forall v \in V\ \exists(-v) \in V:\ (-v)+v = \vec{0}$	(Gegenvektor),
V	$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$,	
VI	$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$,	
VII	$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$,	
VIII	$1v = v$.	

Diese Regeln werden wir jetzt benutzen, um weitere Rechengesetze *zu beweisen*.

Wie beschreibt man einen Vektorraum?

1. Man legt eine Menge V fest.
2. Man definiert zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$.
3. Man zeigt, dass beide Abbildungen wohldefiniert sind.
4. Man überprüft alle acht Axiome I–VIII.

Kann ein Vektorraum leer sein? Nein: Nach Axiom III gibt es mindestens den Nullvektor.
Kann er genau ein Element besitzen? Ja!

Beispiel: der triviale Vektorraum

Wir setzen $V = \{\vec{0}\}$, also eine Menge mit genau einem Element.

Die Operationen sind notwendigerweise

$$\vec{0} + \vec{0} := \vec{0}, \qquad \lambda\vec{0} := \vec{0} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Beide Abbildungen sind wohldefiniert: Das Ergebnis liegt wieder in V.

Für Axiom I gibt es nur den Fall $u = v = w = \vec{0}$:

$$(\vec{0} + \vec{0}) + \vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + (\vec{0} + \vec{0}).$$

Die übrigen Axiome lassen sich genauso überprüfen.

Kann ein reeller Vektorraum genau zwei Elemente haben?

Frage: Gibt es einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit genau zwei Elementen?

Wir werden zeigen: Nein.

Für einen von $\vec{0}$ verschiedenen Vektor v müsste man zumindest auch $2v$ betrachten. Das allein genügt noch nicht als Beweis: Warum sollten v und $2v$ verschieden sein?

Diese Frage wird später mit Lemma 5 beantwortet: Aus $\lambda v = \mu v$ für $v \neq \vec{0}$ folgt $\lambda = \mu$.

Vor einem Beweis: Welche Fragen stellen wir uns?

Behauptung (Lemma 1): In einem Vektorraum gibt es genau einen Nullvektor, also genau einen Vektor mit der Eigenschaft III.

Vor dem Beweis fragen wir uns:

1. **Was ist die genaue Behauptung?**
   Wenn zwei Vektoren die Eigenschaft III haben, müssen sie gleich sein.
2. **Was dürfen wir voraussetzen?**
   Beide Vektoren sind neutrale Elemente der Addition.
3. **Was müssen wir zeigen?**
   Dass diese beiden Vektoren übereinstimmen.
4. **Welche bekannten Regeln helfen?**
   Die Definition des neutralen Elements und die Kommutativität.

Struktur: Wir nehmen zwei mögliche Nullvektoren an und beweisen, dass sie gleich sind. So zeigt man *Eindeutigkeit*.

Lemma 1: Der Nullvektor ist eindeutig

Lemma 1. Es gibt genau einen Vektor mit der Eigenschaft III.

Beweis. Angenommen, $z \in V$ erfüllt wie $\vec{0}$ die Gleichung $z + v = v$ für alle $v \in V$. Dann gelten insbesondere

$$z + \vec{0} = \vec{0} \quad \text{(da } z \text{ neutral ist)},$$

$$\vec{0} + z = z \quad \text{(da } \vec{0} \text{ neutral ist)}.$$

Nach Kommutativität ist $z + \vec{0} = \vec{0} + z$. Daher $z = \vec{0}$. □

Lemma 2: Wegkürzen einer Summe

Lemma 2. Gilt $u + v = v$, so folgt $u = \vec{0}$.

Beweis. Nach Axiom IV gibt es $-v$. Addieren wir diesen Vektor:

$$-v + (u + v) = -v + v = \vec{0}.$$

Wegen Assoziativität und Kommutativität gilt

$$-v + (u + v) = u + ((-v) + v) = u + \vec{0} = u.$$

Also ist $u = \vec{0}$. □

Merke: Wir dürfen mit dem Gegenvektor addieren, statt wie bei Zahlen zu „subtrahieren“.

Lemma 3: Multiplikation mit Null

Lemma 3. Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $0v = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, liefert Axiom VI:

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v.$$

Wir addieren den Gegenvektor zu $0v$ auf beiden Seiten:

$$\vec{0} = 0v. \qquad \square$$

Unterscheidung: Links bezeichnet 0 eine reelle Zahl, rechts $\vec{0}$ den Nullvektor.

Lemma 4: Multiplikation des Nullvektors

Lemma 4. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Beweis. Wegen $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und Axiom VII:

$$\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}.$$

Addition des Gegenvektors von $\lambda\vec{0}$ ergibt

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}. \qquad \square$$

Vergleich: Lemma 3 und Lemma 4 sehen ähnlich aus; sie betreffen aber verschiedene Nullen.

Lemma 5: Wann ist $\lambda v = \vec{0}$?

Lemma 5. Aus $\lambda v = \vec{0}$ folgt $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Dann existiert $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$. Mit Lemma 4 und Axiomen V und VIII erhalten wir

$$\vec{0} = \lambda^{-1}\vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v.$$

Also ist $v = \vec{0}$. □

Vergleich: Lemmata 3, 4 und 5

Lemma 3: $0v = \vec{0}$ für jedes $v \in V$,

Lemma 4: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$,

Lemma 5: $\lambda v = \vec{0} \implies \lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Die ersten beiden Lemmata geben jeweils eine hinreichende Bedingung dafür an, dass ein Produkt Null ist.

Lemma 5 sagt umgekehrt, dass es keine anderen Möglichkeiten gibt:

$$\boxed{\lambda v = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ oder } v = \vec{0}.}$$

Lemma 6: Existenz und Eindeutigkeit des Gegenvektors

Lemma 6. Zu jedem $v \in V$ gibt es genau einen Vektor $-v$ mit

$$(-v) + v = \vec{0}.$$

Dieser Vektor ist $(-1)v$. **Existenz:** Aus Axiom VIII, Axiom VI und Lemma 3 folgt

$$(-1)v + v = (-1)v + 1v = ((-1) + 1)v = 0v = \vec{0}.$$

Damit ist $(-1)v$ ein Gegenvektor. Es bleibt seine *Eindeutigkeit* zu zeigen.

Beweis von Lemma 6: Eindeutigkeit

Beweis. Seien $u, w \in V$ zwei Gegenvektoren von v, das heißt

$$u + v = \vec{0}, \qquad w + v = \vec{0}.$$

Wir müssen $u = w$ zeigen. Nach Assoziativität und Kommutativität gilt

$$\begin{aligned} w &= w + \vec{0} = w + (u + v) \\ &= (w + u) + v = (u + w) + v \\ &= u + (w + v) = u + \vec{0} = u. \end{aligned}$$

Also ist der Gegenvektor eindeutig und, wie oben gezeigt, gleich $(-1)v$. □

Lemma 7: Kürzen der Skalarmultiplikation

Lemma 7. Ist $v \neq \vec{0}$ und $\lambda v = \mu v$, so gilt $\lambda = \mu$.

Beweis. Addieren wir $(-\mu)v$ auf beiden Seiten:

$$(\lambda - \mu)v = (\mu - \mu)v = 0v = \vec{0}.$$

Aus Lemma 5 und $v \neq \vec{0}$ folgt $\lambda - \mu = 0$, also $\lambda = \mu$. □

Jetzt können wir die Frage nach einem zweielementigen Vektorraum beantworten: Für $v \neq \vec{0}$ sind alle λv mit $\lambda \in \mathbb{R}$ verschieden.

Wiederholung: die Rechenregeln

Aus den Axiomen für Vektorräume haben wir abgeleitet:

$$0v = \vec{0} \qquad \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

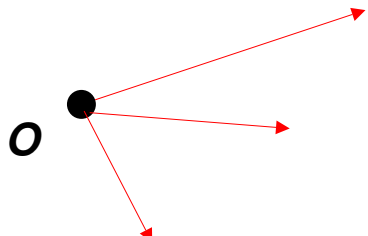
$$\lambda v = \vec{0} \Longrightarrow \lambda = 0 \text{ oder } v = \vec{0}$$

$$(-1)v = -v \qquad v \neq \vec{0},\ \lambda v = \mu v \Longrightarrow \lambda = \mu.$$

Methodisch: Solche Regeln dürfen in einem beliebigen Vektorraum erst verwendet werden, nachdem sie aus den Axiomen bewiesen wurden.

Geometrische Vektoren: die Idee

Fixieren wir einen Punkt O in einer Ebene. Gerichtete Strecken mit Anfangspunkt O können als Vektoren betrachtet werden.

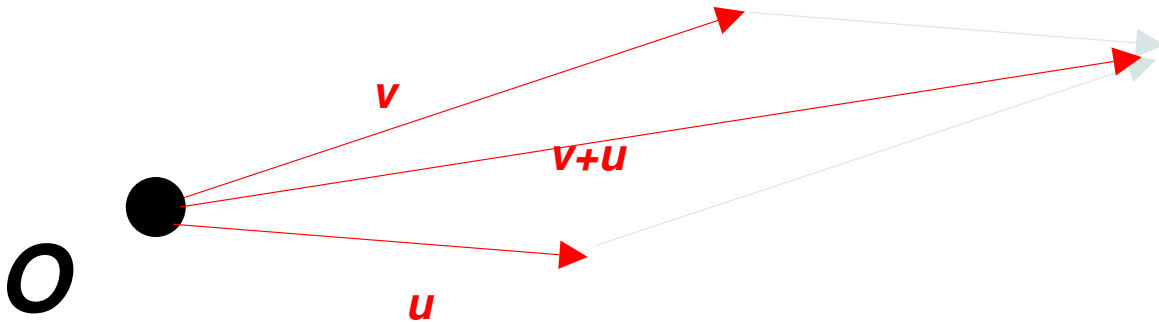


Beispiele aus Physik und Geometrie: Geschwindigkeit, Kraft, Beschleunigung.

Später: Wir werden diese geometrische Anschauung mathematisch präzisieren.

Geometrische Vektoraddition

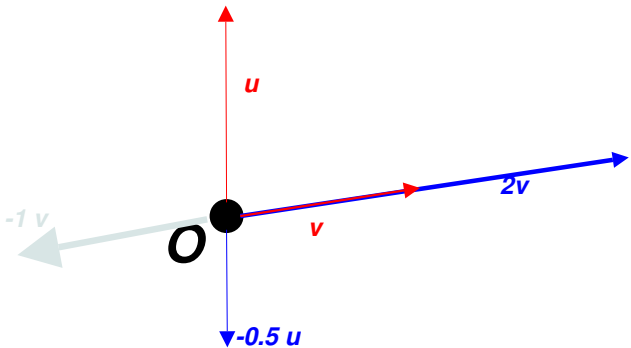
Addition: Die Summe zweier gerichteter Strecken lässt sich mit der Parallelogrammregel konstruieren.



Das legt die algebraische Operation $+ : V \times V \to V$ nahe.

Geometrische Skalarmultiplikation

Skalarmultiplikation: Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beschreibt Streckung bzw. Stauchung; bei $\lambda < 0$ ändert sich die Richtung.



Die geometrische Überprüfung sämtlicher Axiome ist nicht unmittelbar offensichtlich.

Untervektorraum: die Definition

Definition. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums heißt Untervektorraum, wenn für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u + v \in U, \qquad \lambda u \in U.$$

Jargon: Wir sagen: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektorraumoperationen. Das bedeutet: Beginnt man mit Vektoren aus U und verwendet Addition oder Skalarmultiplikation, so verlässt man U nicht.

Triviale Beispiele: V selbst und $\{\vec{0}\}$.

Wichtig: Die Bedingung $U \neq \varnothing$ gehört zur Definition.

Erste Beispiele: die trivialen Untervektorräume

Behauptung: Für jeden Vektorraum V sind V selbst und $\{\vec{0}\}$ Untervektorräume.

Welche Fragen müssen wir beantworten, um dies zu beweisen?

1. Ist die Teilmenge U nicht leer?
2. Für alle $u, v \in U$: Liegt auch $u + v$ in U?
3. Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$: Liegt auch λu in U?

Beispiel $U = \{\vec{0}\}$: $\vec{0} \in U$, $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Untervektorraum in $\mathbb{R}^2$: Beispiel

Wir betrachten die horizontale Achse

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Sind $u = \binom{a}{0}$, $v = \binom{b}{0} \in U$, so gilt

$$u + v = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} \in U.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda a \\ 0 \end{pmatrix} \in U.$$

Also ist U ein Untervektorraum.

Nächstes Ziel

1. Dritte Vorlesung: Rechenregeln und Untervektorräume
2. Vierte Vorlesung: Homogene Systeme und lineare Hülle

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Faktoren}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Element von $\mathbb{R}^n$ ist ein geordnetes n-Tupel reeller Zahlen. Zum Beispiel sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ Elemente von $\mathbb{R}^3$.

Addition in $\mathbb{R}^n$

Die Addition erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^n$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wie im Fall $\mathbb{R}^2$ folgen die acht Vektorraumaxiome aus den entsprechenden Rechengesetzen der reellen Zahlen.

Nächstes Ziel: weniger triviale Untervektorräume

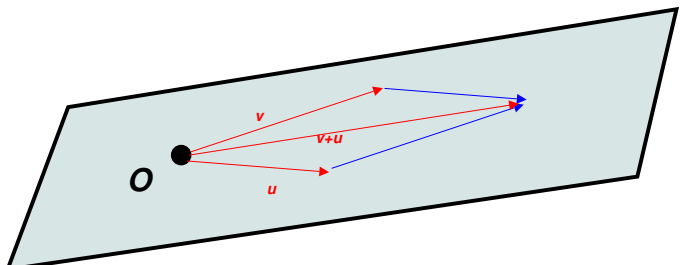
Bisher kennen wir die trivialen Untervektorräume V und $\{\vec{0}\}$ sowie das Beispiel der x-Achse in $\mathbb{R}^2$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nächstes Ziel: Wir wollen weitere, weniger triviale Untervektorräume konstruieren. Dazu betrachten wir geometrische Beispiele und Lösungsmengen von *homogenen linearen Gleichungssystemen*.

Geometrisches Beispiel eines Untervektorraums

Durch einen festen Punkt O im dreidimensionalen Raum sei eine Ebene gelegt. Die geometrischen Vektoren mit Anfangspunkt O und Endpunkt in dieser Ebene bilden einen Untervektorraum.



Warum ist die Ebene abgeschlossen bezüglich der Operationen?
Die Parallelogrammregel und Streckungen verlassen die Ebene nicht.

Satz 3: Lösung einer homogenen Gleichung

Satz 3. Für feste Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \; a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Drei Nachweise: L ist nicht leer; L ist unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen.

Beweis von Satz 3: Nullvektor und Addition

Beweis. Der Nullvektor liegt in L, denn $a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$. Seien $x, y \in L$. Dann gilt

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0, \qquad a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = 0.$$

Durch Addition erhalten wir

$$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0.$$

Das bedeutet $x + y \in L$.

Beweis von Satz 3: Skalarmultiplikation

Sei $x \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_1(\lambda x_1) + \cdots + a_n(\lambda x_n) &= \lambda(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) \\ &= \lambda \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Somit liegt auch $\lambda x \in L$.

Also ist L ein Untervektorraum. $\square$

Warum ist die rechte Seite 0 wichtig?

Vergleichen wir die Gleichung

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1.$$

Bei zwei Lösungen x, y gilt für die Summe

$$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

Die Lösungsmenge ist also im Allgemeinen nicht unter Addition abgeschlossen.

Für 0 auf der rechten Seite erhalten wir dagegen $0 + 0 = 0$.

Beispiel: die horizontale Achse

Die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ist die Lösungsmenge der homogenen Gleichung

$$\underbrace{0}_{a_1} x + \underbrace{1}_{a_2} y = 0.$$

Nach Satz 3 ist sie ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Prinzip: Homogene Gleichungen liefern systematisch Beispiele von Untervektorräumen.

Schnittmenge zweier Mengen

Definition. Für Mengen A, B heißt

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

die Schnittmenge. Beispiel:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

Ein Element gehört zum Schnitt genau dann, wenn es *beide* Bedingungen erfüllt.

Schnittmenge beliebig vieler Mengen

Sei $\mathcal{U}$ eine *nichtleere* Menge von Mengen. Wir definieren

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{x : \text{für jedes } U \in \mathcal{U} \text{ gilt } x \in U\}.$$

Beispiel:

$$A \cap B \cap C = \{x : x \in A \text{ und } x \in B \text{ und } x \in C\}.$$

Diese Schreibweise wird im nächsten Satz verwendet.

Vereinigung von Mengen

Definition. Für Mengen A, B heißt

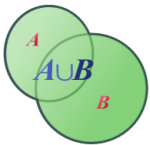
$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

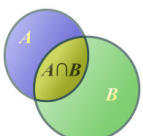
die Vereinigung. Dabei ist das mathematische „oder“ nicht ausschließend: x darf in beiden Mengen liegen. Für eine Familie von Mengen definieren wir analog

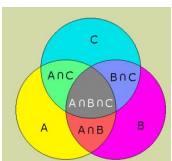
$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \{x : \exists U \in \mathcal{U} \text{ mit } x \in U\}.$$

Mengendiagramme

Mengenoperationen kann man durch sogenannte Mengendiagramme veranschaulichen.







Insbesondere unterscheidet man $A \cap B$ (gemeinsamer Bereich) und $A \cup B$ (beide Bereiche zusammen).

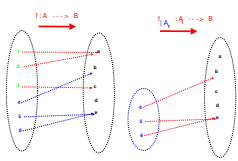
Disjunkte Mengen

Definition. Zwei Mengen A, B heißen disjunkt, wenn

$$A \cap B = \varnothing.$$

Eine Familie heißt *paarweise disjunkt*, wenn je zwei verschiedene Mengen aus der Familie disjunkt sind. Für drei Mengen A, B, C bedeutet das

$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing.$$



Satz 4: Schnitt von Untervektorräumen

Satz 4. Sei $\mathcal{U}$ eine nichtleere Menge von Untervektorräumen des Vektorraums V. Dann ist

$$W := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

ein Untervektorraum von V. **Zu zeigen:** $W \neq \varnothing$ sowie Abschluss bezüglich Addition und Skalarmultiplikation.

Satz 4: Fragen vor dem Beweis

Aussage (Satz 4): Ist $\mathcal{U}$ eine nichtleere Familie von Untervektorräumen von V, dann ist auch $W = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$ ein Untervektorraum.

Welche Fragen müssen wir dazu beantworten?

1. **Ist W nicht leer?** Welcher Vektor gehört zu *jedem* Untervektorraum?
2. **Addition:** Wenn u, v in allen $U \in \mathcal{U}$ liegen, liegt $u + v$ ebenfalls in allen U?
3. **Skalarmultiplikation:** Wenn u in allen U liegt, liegt λu ebenfalls in allen U?

Genau diese drei Fragen beantworten wir im Beweis.

Beweis von Satz 4: Nichtleere

Beweis. Jeder Untervektorraum U enthält den Nullvektor. Denn $U \neq \varnothing$; für irgendein $u \in U$ liegt nach Abgeschlossenheit auch $0u \in U$. Nach Lemma 3 gilt $0u = \vec{0}$. Also liegt $\vec{0}$ in jedem $U \in \mathcal{U}$, mithin

$$\vec{0} \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = W.$$

Daher ist W nicht leer.

Beweis von Satz 4: Abgeschlossenheit

Seien $u, v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann liegen u, v in *jedem* $U \in \mathcal{U}$. Da jedes U ein Untervektorraum ist, gehören $u + v$ und λu ebenfalls zu jedem U. Somit

$$u + v \in W, \qquad \lambda u \in W.$$

Damit ist W ein Untervektorraum. □

Homogene lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem heißt homogen, wenn alle rechten Seiten Null sind:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Seine Lösungsmenge L besteht aus genau den Tupeln in $\mathbb{R}^n$, die *alle* m Gleichungen erfüllen.

Folgerung aus den Sätzen 3 und 4

Folgerung zu Satz 4. Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Für jede Gleichung des Systems sei L_i ihre Lösungsmenge. Nach Satz 3 ist jedes L_i ein Untervektorraum. Das ganze System wird genau dann erfüllt, wenn alle Gleichungen erfüllt sind; also gilt

$$L = L_1 \cap \cdots \cap L_m.$$

Nach Satz 4 ist L ein Untervektorraum. □

Einschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A_1 \subseteq A$. Die Einschränkung auf A_1 ist die Abbildung

$$f|_{A_1} : A_1 \to B, \qquad f|_{A_1}(x) := f(x) \quad (x \in A_1).$$

Die Zuordnungsvorschrift ändert sich nicht. Nur die Definitionsmenge wird kleiner. Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $A_1 = [0, \infty)$.

Einschränkung von Operationen

In einem Vektorraum V sind Addition und Skalarmultiplikation Abbildungen:

$$+ : V \times V \to V, \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V.$$

Für eine Teilmenge $U \subseteq V$ kann man sie einschränken:

$$+_U : U \times U \to V, \quad u +_U v := u + v,$$

$$\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to V, \quad \lambda \cdot_U u := \lambda u.$$

Achtung: Die Ergebnisse müssen nicht in U liegen.

Wann sind die eingeschränkten Operationen Operationen auf U?

Wenn $u + v \in U$ und $\lambda u \in U$ für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dürfen wir schreiben:

$$+_U : U \times U \to U, \qquad \cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U.$$

Genau das sind die beiden Abgeschlossenheitsbedingungen in der Definition eines Untervektorraums. Diese Unterscheidung ist wichtig: Eine Einschränkung mit Zielmenge V ist immer definiert, aber mit Zielmenge U nur bei Abgeschlossenheit.

Satz 5: Untervektorräume sind Vektorräume

Satz 5. Sei U ein Untervektorraum von $(V, +, \cdot)$. Dann ist

$$(U, +_U, \cdot_U)$$

selbst ein Vektorraum. **Beweisidee:** Die Operationen sind nach Definition des Untervektorraums wohldefiniert; die acht Axiome werden von V geerbt.

Beweis von Satz 5: Axiome I und II

Beweis. Seien $u, v, w \in U$. Die Assoziativität gilt, da

$$\begin{aligned}(u +_U v) +_U w &= (u + v) + w \\ &= u + (v + w) \\ &= u +_U (v +_U w).\end{aligned}$$

Analog folgt $u +_U v = v +_U u$ aus der Kommutativität in V. Die Axiome V–VIII folgen auf dieselbe Weise durch Einschränkung.

Beweis von Satz 5: Nullvektor und Gegenvektor

Axiom III: Da $U \neq \varnothing$, wählen wir $u \in U$. Wegen Abgeschlossenheit gilt $0u \in U$, nach Lemma 3 also $\vec{0} \in U$. Dieser Vektor erfüllt $\vec{0} +_U u = u$.

Axiom IV: Für $u \in U$ gehört auch $(-1)u \in U$. Nach Lemma 6 ist $(-1)u = -u$, also $(-u) +_U u = \vec{0}$. Damit sind sämtliche Axiome erfüllt. □

Das Summenzeichen $\sum$

In Vektorräumen ist die Addition assoziativ und kommutativ. Daher dürfen wir bei endlichen Summen Klammern weglassen und Summanden umordnen:

$$v_1 + \cdots + v_m = \sum_{i=1}^{m} v_i.$$

Zum Beispiel

$$\sum_{i=2}^{4} v_i = v_2 + v_3 + v_4.$$

Vorsicht: Das Summenzeichen wird hier für *Vektorsummen* benutzt, nicht nur für Summen reeller Zahlen.

Definition: Linearkombination

Definition. Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

heißt Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ mit Koeffizienten λ_i. Ein Vektor v ist eine Linearkombination dieser Vektoren, wenn geeignete Zahlen λ_i existieren, für die $v = \sum_i \lambda_i v_i$ gilt.

Beispiel einer Linearkombination

In $\mathbb{R}^2$ betrachten wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Koeffizienten -2 und 1 erhalten wir

$$-2v_1 + v_2 = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\binom{1}{1}$ eine Linearkombination von v_1 und v_2.

Definition: lineare Hülle

Definition. Sei $A \subseteq V$ eine nichtleere Menge. Die lineare Hülle von A ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus A:

$$\operatorname{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \ k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ v_i \in A \right\}.$$

Wichtig: Auch für unendliches A sind hier nur *endliche* Summen zugelassen. Jeder Vektor $v \in A$ liegt in $\operatorname{span}(A)$, denn $v = 1 \cdot v$.

Endlich viele Erzeuger

Ist $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, dann

$$\operatorname{span}(A) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}.$$

Warum dürfen wir alle k Vektoren hinschreiben, auch wenn nur einige benötigt werden?

Nicht benötigte Vektoren bekommen den Koeffizienten 0.

Die Menge A heißt auch *Erzeugendensystem* der linearen Hülle.

Beispiel in $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jede Linearkombination hat die Form

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb vermuten wir

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweis der Gleichheit zweier Mengen: $A \subseteq B$

Setzen wir $A = \text{span}\{v_1, v_2\}$ und

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jedes Element von A ist eine Linearkombination:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in B.$$

Also $A \subseteq B$.

Beweis der Gleichheit: $B \subseteq A$

Umgekehrt sei $w \in B$ beliebig:

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$w = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xv_1 + yv_2 \in A.$$

Damit $B \subseteq A$. Zusammen mit $A \subseteq B$ folgt $A = B$.

Methode: Um Mengengleichheit zu zeigen, beweisen wir beide Inklusionen.

Satz 6: die zwei Eigenschaften der linearen Hülle

Satz 6. Sei $A \subseteq V$ nicht leer. Dann gilt:

(a) $\operatorname{span}(A)$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $A \subseteq U$, so gilt $\operatorname{span}(A) \subseteq U$.

Anschaulich: Die lineare Hülle ist der kleinste Untervektorraum, der A enthält.

Beweis von Satz 6(b): endliche Linearkombinationen

Beweis. Sei U ein Untervektorraum mit $A \subseteq U$. Für $v_1, \ldots, v_k \in A$ liegen alle v_i auch in U. Wegen Abgeschlossenheit liegen $\lambda_i v_i$ in U, und durch wiederholte Addition auch

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in U.$$

Jedes Element von $\mathrm{span}(A)$ hat diese Form, also $\mathrm{span}(A) \subseteq U$. □

Beweis von Satz 6(a): nicht leer und additiv abgeschlossen

Beweis. Wegen $A \neq \varnothing$ wählen wir $v \in A$; dann ist $0v = \vec{0} \in \operatorname{span}(A)$. Seien

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \qquad w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j$$

mit $v_i, u_j \in A$. Dann ist

$$u + w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_m u_m$$

wieder eine endliche Linearkombination von Elementen aus A. Also $u + w \in \operatorname{span}(A)$.

Beweis von Satz 6(a): Skalarmultiplikation

Sei $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in \mathrm{span}(A)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Aus den Vektorraumaxiomen folgt

$$\alpha u = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha \lambda_i) v_i.$$

Das ist erneut eine endliche Linearkombination von Vektoren aus A. Daher ist $\alpha u \in \mathrm{span}(A)$; somit ist $\mathrm{span}(A)$ ein Untervektorraum. □

Folgerung zu Satz 6: Schnitt aller Untervektorräume

Folgerung zu Satz 6. Sei

$$\mathcal{U}_A := \{U \subseteq V : U \text{ ist Untervektorraum und } A \subseteq U\}.$$

Dann gilt

$$\boxed{\operatorname{span}(A) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_A} U}.$$

Die Menge $\mathcal{U}_A$ ist nicht leer, denn $V \in \mathcal{U}_A$. Wir zeigen beide Inklusionen.

Beweis der Folgerung zu Satz 6

Beweis. Nach Satz 6(b) ist $\operatorname{span}(A) \subseteq U$ für jedes $U \in \mathcal{U}_A$. Daher

$$\operatorname{span}(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_A} U.$$

Nach Satz 6(a) ist $\operatorname{span}(A)$ selbst ein Untervektorraum und enthält A. Somit gehört $\operatorname{span}(A)$ zu $\mathcal{U}_A$, also

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}_A} U \subseteq \operatorname{span}(A).$$

Beide Inklusionen liefern die Behauptung. □

Zusammenfassung: Woche 2

- Wir haben aus den Vektorraumaxiomen wichtige Rechenregeln bewiesen (Lemmas 1–7).
- Wir haben den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und den Begriff *Untervektorraum* untersucht.
- Homogene lineare Gleichungssysteme liefern Untervektorräume.
- Wir haben Schnitt und Vereinigung von Mengen formalisiert.
- Wir haben Linearkombinationen und die lineare Hülle eingeführt.

Die lineare Hülle ist der kleinste Untervektorraum, der die gegebenen Vektoren enthält.