# Woche 4: Überblick

- Rückblick: Basis, Satz 7, Satz 8, Dimension, Austauschlemma (Lemma 8)
- Nicht endlich erzeugte Vektorräume: beliebig große linear unabhängige Mengen
- Austauschsatz von Steinitz (Lemma 9) und Beweis von Satz 9
- Folgerungen: Basistest, Basisergänzungssatz, Untervektorräume
- Summe von Untervektorräumen und Dimensionssatz (Satz 10)
- Koordinaten bezüglich einer Basis; geometrische und kartesische Koordinaten

# Wiederholung: Definition einer Basis

**Def.** Es sei $(V, +, \cdot)$ ein nichttrivialer Vektorraum. Die Menge $A \subseteq V$ heißt eine Basis, falls sie

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$ erfüllt.

Ist $(V, +, \cdot)$ der triviale Vektorraum, also $V = \{\vec{0}\}$, so heißt (nach Definition) $\varnothing$ die Basis von $V$.

# Wiederholung: Charakterisierung einer Basis

**Satz 7 .** *Für eine nichtleere Teilmenge $A$ eines nichttrivialen Vektorraums $V$ sind äquivalent:*

(a) *$A$ ist eine Basis;*

(b) *jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination paarweise verschiedener Elemente aus $A$ darstellen;*

(c) *$A$ ist linear unabhängig, und für jedes $v \notin A$ ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig.*

In dieser Woche benutzen wir vor allem (b) (Eindeutigkeit der Darstellung) und (c) (eine Basis ist eine maximale linear unabhängige Menge).

# Wiederholung: Existenz einer Basis

**Satz 8.** *Sei $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, d.h. $\mathrm{span}(A) = V$ für eine endliche Menge $A$. Dann gibt es eine (endliche) Basis $A' \subseteq A$ von $V$.*

**Def.** Sobald gezeigt ist, dass alle Basen gleich viele Elemente haben, nennen wir diese gemeinsame Anzahl die Dimension von $V$ und schreiben $\dim(V)$.

**Satz 9.** *Die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

Erst mit Satz 9 ist die Definition der Dimension sinnvoll. Den Beweis haben wir in Woche 3 vorbereitet; jetzt führen wir ihn zu Ende.

# Vorbereitung: Von Lemma 8 zu Satz 9”

**Lemma 8 (Austauschlemma von Steinitz).** *Sei* $B = \{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis und* $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. *Ist* $\lambda_k \neq 0$, *so ist auch* $B' := \{v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n\}$ *eine Basis.*

D.h. wir dürfen einen Basisvektor $v_k$ gegen $w$ austauschen, sofern $v_k$ in der Darstellung von $w$ mit einem Koeffizienten $\neq 0$ vorkommt.

**Plan für diesen Beweis:**

- Lemma 8 tauscht einen Vektor aus.
- Der Austauschsatz (Lemma 9) tauscht mehrere Vektoren aus.
- Aus Lemma 9 folgt Satz 9 fast sofort.

# Nicht endlich erzeugte Vektorräume

Zuerst eine Folgerung aus Satz 8 für Vektorräume, die nicht endlich erzeugt sind.

**Folgerung aus Satz 8.** *Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum, der NICHT endlich erzeugt ist. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $n$-elementige linear unabhängige Teilmenge von $V$.*

**Bsp.** Der Vektorraum der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht endlich erzeugt (Aufgabe 3, Blatt 2). Er enthält also linear unabhängige Mengen mit beliebig vielen Elementen.

# Folgerung aus Satz 8: Induktionsanfang

**Beweis** durch Induktion nach $n$.

**I.A.** ($n = 1$). Z.z.: Es gibt eine 1-elementige linear unabhängige Menge.

Der triviale Vektorraum $\{\vec{0}\}$ ist endlich erzeugt (seine Basis $\varnothing$ ist endlich). Also ist $V$ nichttrivial, d.h. es gibt $v_1 \in V$ mit $v_1 \neq \vec{0}$.

Wie in Woche 3 gezeigt (Beispiel nach der Definition der linearen Unabhängigkeit, mit Lemma 5), ist $A_1 := \{v_1\}$ dann linear unabhängig.

# Folgerung aus Satz 8: Induktionsschritt

**I.V.** Es gibt eine linear unabhängige Menge $A_n = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ mit $n$ Elementen.

**I.S.** Z.z.: Es gibt eine linear unabhängige Menge $A_{n+1} \subseteq V$ mit $n+1$ Elementen.

Es gilt $\mathrm{span}(A_n) \neq V$: sonst wäre $A_n$ eine endliche erzeugende Menge, und $V$ wäre endlich erzeugt – Widerspruch zur Voraussetzung.

Also gibt es einen Vektor $v_{n+1} \in V$ mit $v_{n+1} \notin \mathrm{span}(A_n)$. Insbesondere ist $v_{n+1} \neq v_i$ für alle $i \leq n$, also hat

$$A_{n+1} := A_n \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, ..., v_{n+1}\}$$

genau $n+1$ Elemente. Wir zeigen: $A_{n+1}$ ist linear unabhängig.

# Folgerung aus Satz 8: Lineare Unabhängigkeit von $A_{n+1}$

Angenommen,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_{n+1} v_{n+1} = \vec{0}. \qquad (*)$$

Wir müssen zeigen: $\lambda_1 = ... = \lambda_{n+1} = 0$.

**Fall 1:** $\lambda_{n+1} = 0$**.** Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$. Da $A_n$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Also sind alle Koeffizienten gleich 0.

# Folgerung aus Satz 8: Lineare Unabhängigkeit (Fall 2)

**Fall 2:** $\lambda_{n+1} \neq 0$**.** Wie in den Beweisen von Satz 7 und Satz 8 multiplizieren wir $(*)$ mit $-\frac{1}{\lambda_{n+1}}$ und addieren $v_{n+1}$ zu beiden Seiten:

$$v_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n.$$

Also ist $v_{n+1} \in \operatorname{span}(A_n)$, im Widerspruch zur Wahl von $v_{n+1}$. Fall 2 tritt also nicht ein.

Somit ist $A_{n+1}$ linear unabhängig. □

# Lemma 9: Austauschsatz von Steinitz (2. Schritt in Beweis von Satz 9)

**Lemma 9 (Austauschsatz von Steinitz).** *Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis des Vektorraums $(V, +, \cdot)$ und sei $A = \{w_1, ..., w_k\}$ eine linear unabhängige Menge (mit $k$ Elementen). Dann gilt:*

(a) $k \leq n$,

(b) *es gibt paarweise verschiedene Indizes $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ so, dass der Austausch von $v_{i_j}$ gegen $w_j$ (für alle $j = 1, ..., k$) wieder eine Basis von $V$ liefert.*

**In Worten:**

- Eine linear unabhängige Menge hat höchstens so viele Elemente wie eine Basis.
- Man kann geeignete $k$ Vektoren der Basis $B$ durch die Vektoren aus $A$ ersetzen, und das Ergebnis ist wieder eine Basis.

# Lemma 9: Ein Beispiel

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis

$$B := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und die Menge

$$A := \left\{ w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach Lemma 9 kann man zwei geeignete Vektoren aus $B$ gegen die Vektoren aus $A$ austauschen, sodass wieder eine Basis entsteht – vorausgesetzt, $A$ ist linear unabhängig.

# Lemma 9: Ein Beispiel – $A$ ist linear unabhängig

Aus $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \vec{0}$ folgt (die erste Komponente liefert nur $0 = 0$)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ und $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$.

Das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten abgezogen ergibt $-2\lambda_2 = 0$; also $\lambda_2 = 0$ und danach $\lambda_1 = 0$. Damit ist $A$ linear unabhängig.

# Lemma 9: Ein Beispiel (Fortsetzung)

In unserem Beispiel kann man $i_1 = 2$, $i_2 = 3$ wählen. Nach dem Austausch erhalten wir

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

und $B'$ ist wieder eine Basis.

**Warum?** Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

und $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (Woche 3). Also ist $B'$ erzeugend. Die lineare Unabhängigkeit prüft man ähnlich.

# Lemma 9: Die Indizes sind nicht beliebig

**Bemerkung.** Die Indizes $i_1, i_2, \ldots$ sind nicht beliebig. Natürlich darf man ihre Reihenfolge vertauschen: im Beispiel kann man auch $i_1 = 3$, $i_2 = 2$ wählen.

Man kann aber nicht z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ nehmen. Nach dem Austausch hätten wir

$$B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und dies ist keine Basis.

Denn alle drei Vektoren haben die erste Komponente 0, also hat jede ihrer Linearkombinationen die erste Komponente 0. Den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man daher nicht als Linearkombination von Vektoren aus $B''$.

# Spezialfall $k = 1$: Lemma 9 folgt aus Lemma 8

Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis und $A = \{w\}$ eine einelementige linear unabhängige Menge. Dann ist $w \neq \vec{0}$ (denn $\{\vec{0}\}$ ist linear abhängig: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$).

Da $B$ eine Basis ist, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \qquad (*)$$

Wären alle $\lambda_i = 0$, so wäre $w = \vec{0}$. Also gibt es ein $\ell \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_\ell \neq 0$.

# Spezialfall $k = 1$ (Fortsetzung)

Damit sind alle Voraussetzungen des Austauschlemmas (Lemma 8) erfüllt. Also kann man $v_\ell$ gegen $w$ austauschen (d.h. $i_1 := \ell$):

$$B' := \{v_1, ..., v_{\ell-1}, w, v_{\ell+1}, ..., v_n\} \text{ ist eine Basis.}$$

Außerdem gilt $k = 1 \leq n$, da eine Basis eines nichttrivialen Vektorraums nicht leer ist.

Im allgemeinen Fall wenden wir Lemma 8 einfach $k$-mal hintereinander an – das ist die Idee des folgenden Induktionsbeweises.

# Lemma 9: Was müssen wir beweisen?

**Aussage.** Ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis und $A = \{w_1, \ldots, w_k\}$ linear unabhängig, so gilt $k \leq n$. Außerdem lassen sich $k$ geeignete Elemente von $B$ durch die Elemente von $A$ ersetzen, sodass wieder eine Basis entsteht.

**Frage 1:** Über welche Zahl bietet sich eine Induktion an?

**Antwort:** Über $k$, die Anzahl der auszutauschenden Vektoren.

**Frage 2:** Was wissen wir schon für $k = 1$?

**Antwort:** Das Austauschlemma (Lemma 8).

# Beweis von Lemma 9: Induktion über $k$

**Lemma 9.** *Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis und $A = \{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig. Dann gilt (a) $k \leq n$, und (b) es gibt paarweise verschiedene $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ so, dass der Austausch von $v_{i_j}$ gegen $w_j$ wieder eine Basis liefert.*

**I.A.** ($k = 0$): Dann ist $A = \varnothing$, $0 \leq n$ gilt, und es wird nichts ausgetauscht: $B$ bleibt eine Basis.

**I.V.** Die Aussage gilt für jede linear unabhängige Teilmenge $A \subseteq V$ mit $k - 1$ Elementen.

**I.S.** Z.z.: Die Aussage gilt auch für jede linear unabhängige Teilmenge $A = \{w_1, ..., w_k\}$ mit $k$ Elementen.

# Beweis von Lemma 9: Eine Beobachtung

**Beobachtung:** Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

Denn eine Linearkombination von Elementen der Teilmenge ist auch eine Linearkombination von Elementen der ganzen Menge.

Insbesondere ist $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhängig, und wir dürfen die I.V. darauf anwenden.

# Induktionsschritt, Teil (a): $k \leq n$

Widerspruchsbeweis. Angenommen, $k > n$, also $k - 1 \geq n$. Nach I.V. (Teil (a)) für $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ gilt $k - 1 \leq n$. Zusammen: $k - 1 = n$.

Nach I.V. (Teil (b)) gibt es paarweise verschiedene $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so, dass der Austausch von $v_{i_j}$ gegen $w_j$ eine Basis liefert.

Da $k - 1 = n$, sind alle Vektoren $v_1, ..., v_n$ ausgetauscht worden. Also ist $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ selbst eine Basis.

# Induktionsschritt, Teil (a): der Widerspruch

$\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ ist eine Basis.

Nach Satz 7(c) ist dann $\{w_1, ..., w_{k-1}\} \cup \{w_k\}$ linear abhängig (beachte: $w_k \notin \{w_1, ..., w_{k-1}\}$, da $A$ genau $k$ Elemente hat).

Nach Voraussetzung ist aber $A = \{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig. Dieser Widerspruch zeigt: $k \leq n$.

# Induktionsschritt, Teil (b): die ersten $k-1$ Vektoren

Die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ ist linear unabhängig. Nach I.V. gibt es paarweise verschiedene $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so, dass der Austausch von $v_{i_j}$ gegen $w_j$ eine Basis liefert.

O.B.d.A. ist $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$ (sonst nummerieren wir die $v_i$ um). Also ist

$$B_{\text{neu}} := \{w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n\}$$

eine Basis. (Wegen Teil (a) ist $k \leq n$, also kommt mindestens $v_k$ noch vor.)

# Induktionsschritt, Teil (b): der $k$-te Vektor

Da $B_{\text{neu}}$ eine Basis ist, lässt sich $w_k$ darstellen als

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i. \qquad (*)$$

**Behauptung:** Einer der Koeffizienten $\lambda_j$ $(j \geq k)$ ist $\neq 0$.

Sonst wäre $w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$, also

$$\vec{0} = (-1) \cdot w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$$

eine nichttriviale Linearkombination (der Koeffizient von $w_k$ ist $-1$). Das widerspricht der linearen Unabhängigkeit von $\{w_1, ..., w_k\}$.

# Induktionsschritt, Teil (b): Abschluss

Also gibt es $j \in \{k, ..., n\}$ mit $\lambda_j \neq 0$.

Nach dem Austauschlemma (Lemma 8), angewandt auf die Basis $B_{\text{neu}}$, erhalten wir wieder eine Basis, wenn wir $v_j$ gegen $w_k$ austauschen.

Wir setzen $i_k := j$. Da $j \geq k$, ist $i_k$ von $i_1 = 1, ..., i_{k-1} = k - 1$ verschieden. □

# Beweis von Satz 9

**Satz 9.** *Die Dimension eines (endlich erzeugten) Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

**Beweis.** Seien $\{v_1, ..., v_n\}$ und $\{w_1, ..., w_k\}$ zwei Basen von $(V, +, \cdot)$.
Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist eine Basis,} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{\text{Lemma 9(a)}}{\Longrightarrow} k \leq n.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist eine Basis,} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{\text{Lemma 9(a)}}{\Longrightarrow} n \leq k.$$

Also $k = n$. □

# Die Dimension ist wohldefiniert

Jetzt ist die Dimension $\dim(V)$ wohldefiniert: jede Basis von $V$ hat genau $\dim(V)$ Elemente.

Für den trivialen Vektorraum ist $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$, da seine Basis $\varnothing$ ist.

**Beispiele.**

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$).
- In $\mathbb{R}^2$ hat jede Basis genau 2 Elemente, z.B. auch $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ aus Woche 3.

# Folgerung (a): $n$ linear unabhängige Vektoren

**Folgerung (a).** *Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum der Dimension $n$ und $\{v_1, ..., v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge mit $n$ Elementen. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis.*

**Idee:** Für eine Basis fehlt nur die Eigenschaft $\mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\}) = V$.

Gäbe es einen Vektor außerhalb der linearen Hülle, so könnten wir eine linear unabhängige Menge mit $n + 1$ Elementen bauen. Das verbietet aber Lemma 9(a).

# Folgerung (a): Beweis

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt ein $w \in V$ mit $w \notin \operatorname{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Insbesondere ist $w \neq v_i$ für alle $i$, also hat $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ genau $n+1$ Elemente.

**Behauptung:** $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ ist linear unabhängig. Sei dazu

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}. \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, da sonst $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu} v_i \in \operatorname{span}(\{v_1, ..., v_n\})$ wäre.

# Folgerung (a): Beweis (Fortsetzung)

Wegen $\mu = 0$ ist $(*)$ eine Linearkombination nur der Elemente $v_1, ..., v_n$ und deshalb trivial: alle $\lambda_i = 0$. Damit ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig.

Nach dem Austauschsatz (Lemma 9(a), angewandt mit einer Basis aus $n$ Elementen) hat jede linear unabhängige Menge höchstens $n$ Elemente.

Aber $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ hat $n + 1$ Elemente. Widerspruch! □

# Anwendung: Ist eine gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Basis?

$\mathbb{R}^n$ ist $n$-dimensional, denn die Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

besteht aus $n$ Vektoren.

Gegeben sei $A = \{v_1, ..., v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ($k$ verschiedene Vektoren). Wie entscheidet man, ob $A$ eine Basis ist?

**Schritt 1.** Ist $k \neq n$, so ist $A$ keine Basis (Satz 9).

# Anwendung: Der Fall $k = n$

**Schritt 2.** Ist $k = n$, so genügt nach Folgerung (a), die lineare Unabhängigkeit zu prüfen, d.h. das homogene System

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

von $n$ Gleichungen für $n$ Unbekannte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ zu lösen.

# Anwendung: Nur noch EIN Gleichungssystem

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

- Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$, so ist $A$ linear abhängig, also keine Basis.
- Ist $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (0, ..., 0)$ die einzige Lösung, so ist $A$ linear unabhängig und nach Folgerung (a) eine Basis.

Mit der Methode aus Woche 3 mussten wir dafür $n + 1$ Gleichungssysteme lösen (ein homogenes und $n$ inhomogene für $e_1, ..., e_n$).

Jetzt genügt EIN lineares Gleichungssystem – wie in Woche 3 angekündigt.

# Anwendung: Allgemeine Vektorräume

**Bemerkung.** Dasselbe gilt in jedem Vektorraum $V$ mit bekannter Dimension $n$:

> Eine Teilmenge von $V$ ist genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig ist und aus genau $n$ Elementen besteht.

# Beispiele zum Basistest

**Frage.** *Ist* $A := \left\{ \binom{1}{1} \right\}$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^2$*?*

**Antwort: Nein!** $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional (Standardbasis), also besteht nach Satz 9 jede Basis aus 2 Vektoren. $A$ hat aber nur ein Element.

**Frage.** *Ist* $A := \left\{ \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{3}{4} \right\}$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^2$*?*

**Antwort: Nein!** Eine Basis von $\mathbb{R}^2$ besteht aus 2 Vektoren, $A$ enthält aber 3. (Nach Lemma 9(a) ist $A$ sogar linear abhängig.)

# Beispiel: Ein Basistest mit einem System

**Frage.** *Ist* $A := \left\{ \binom{1}{1}, \binom{1}{-1} \right\}$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^2$*?*

**Ja!** $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, und $A$ hat 2 Elemente. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass $A$ linear unabhängig ist.

Die Linearkombination mit Koeffizienten $\lambda, \mu$ ist

$$\lambda \binom{1}{1} + \mu \binom{1}{-1} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}.$$

# Beispiel: Ein Basistest mit einem System (Fortsetzung)

Ist die Linearkombination gleich $\vec{0}$, so gilt

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0, \\ \lambda - \mu = 0. \end{cases}$$

Addition der Gleichungen liefert $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $\mu = 0$.

Also ist $A$ linear unabhängig und nach Folgerung (a) eine Basis.

# Folgerung (b): $n$ erzeugende Vektoren

**Folgerung (b).** *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine Basis des Vektorraums* $(V, +, \cdot)$ *und seien* $w_1, ..., w_n \in V$ *paarweise verschieden. Ist jedes* $v_i$ *eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*, so ist* $\{w_1, ..., w_n\}$ *eine Basis.*

**Vergleich mit Folgerung (a):**

- (a): $n$ Vektoren, linear unabhängig $\Longrightarrow$ Basis.
- (b): $n$ Vektoren, erzeugend $\Longrightarrow$ Basis.

In einem $n$-dimensionalen Vektorraum muss man bei $n$ Vektoren also nur **eine** der beiden Basis-Eigenschaften prüfen.

# Folgerung (b): Beweis, erzeugend

**Schritt 1.** Z.z.: $\operatorname{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$.

Sei $v \in V$. Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, gilt

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n. \qquad (*)$$

Nach Voraussetzung ist jedes $v_i$ eine Linearkombination der $w_1, ..., w_n$:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j.$$

# Folgerung (b): Beweis, erzeugend (Fortsetzung)

Einsetzen in $(*)$ liefert

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + \ldots + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} \Big) w_j .$$

Also ist $v$ eine Linearkombination der Elemente $w_1, \ldots, w_n$, d.h. $\operatorname{span}(\{w_1, \ldots, w_n\}) = V$.

# Folgerung (b): Beweis, linear unabhängig

**Schritt 2.** Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig.

Nach Schritt 1 ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Nach Satz 8 kann man aus $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis $A' \subseteq \{w_1, ..., w_n\}$ auswählen.

Nach Satz 9 besteht $A'$ aus $n$ Elementen, da alle Basen von $V$ gleich viele Elemente haben. Eine $n$-elementige Teilmenge der $n$-elementigen Menge $\{w_1, ..., w_n\}$ ist die ganze Menge: $A' = \{w_1, ..., w_n\}$.

Also ist $\{w_1, ..., w_n\}$ eine Basis (insbesondere linear unabhängig). □

# Folgerung (c): Basisergänzungssatz

**Folgerung (c) (Basisergänzungssatz).** *Sei $(V, +, \cdot)$ ein endlich erzeugter Vektorraum, $r = \dim(V)$, und seien $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig. Dann ist $n \leq r$, und es gibt Vektoren $w_{n+1}, \ldots, w_r$ so, dass*

$$B = \{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

*eine Basis von $V$ ist.*

**Kurzform (c').** Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich erzeugten Vektorraums lässt sich zu einer Basis ergänzen.

# Folgerung (c): Beweis

Sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von $V$.

Nach dem Austauschsatz (Lemma 9) ist $n \leq r$, und es gibt Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$, die gegen $w_1, ..., w_n$ ausgetauscht werden können.

Nach Umnummerieren der $v_i$ ist dann

$$B = \{w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_r\}$$

eine Basis von $V$. Wir setzen $w_{n+1} := v_{n+1}, \ldots, w_r := v_r$. □

# Folgerung (c): Ein Beispiel

Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig (siehe Beispiel zu Lemma 9). Nach dem Basisergänzungssatz lässt sie sich zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, brauchen wir genau einen weiteren Vektor.

Wir haben gesehen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ funktioniert, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dagegen nicht.

**Merke:** Der Basisergänzungssatz sagt, dass eine Ergänzung existiert; nicht jeder Vektor ist dafür geeignet.

# Folgerung (d): Untervektorräume

**Folgerung (d).** *Jeder Untervektorraum $U$ eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$ ist ebenfalls endlich erzeugt, und es gilt* $\dim(U) \leq \dim(V)$.

**Widerspruchsbeweis.** Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, $n := \dim(V)$ und $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von $V$. Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Fall 1:** $U$ ist nicht endlich erzeugt;
- **Fall 2:** $U$ ist endlich erzeugt, aber $\dim(U) \geq n + 1$.

In beiden Fällen finden wir eine linear unabhängige Menge $\{u_1, ..., u_{n+1}\} \subseteq U$ (nächste Folie).

# Folgerung (d): Beweis (Fortsetzung)

**Fall 1.** Nach der Folgerung aus Satz 8 (angewandt auf den Vektorraum $U$, vgl. Satz 5) gibt es eine linear unabhängige Menge $\{u_1, ..., u_{n+1}\} \subseteq U$.

**Fall 2.** Wir nehmen $n+1$ Vektoren einer Basis von $U$.

In beiden Fällen ist $\{u_1, ..., u_{n+1}\}$ auch in $V$ linear unabhängig. Nach dem Austauschsatz (Lemma 9(a)) folgt $n+1 \leq n$. Widerspruch! $\square$

# Summe von Untervektorräumen

**Def.** *Seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E, F \subseteq V$ Untervektorräume. Die Summe $E + F$ ist die Teilmenge von $V$, die aus allen Summen $e + f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ besteht:*

$$E + F := \{e + f \mid e \in E \text{ und } f \in F\} \subseteq V.$$

**Bsp.** Sei $V = \mathbb{R}^2$ und

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \quad (x\text{-Achse}), \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \quad (y\text{-Achse}).$$

# Summe von Untervektorräumen: Beispiel

Dann ist $E + F = \mathbb{R}^2$, denn jedes Element von $\mathbb{R}^2$ lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}_{e \in E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}_{f \in F}.$$

Achtung: $E + F$ ist im Allgemeinen viel größer als die Vereinigung $E \cup F$!
Hier ist $E \cup F$ nur das Achsenkreuz, und z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E \cup F$.

# Satz 10: Dimensionssatz

**Satz 10 (Dimensionssatz).** *Seien $E, F$ Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums $(V, +, \cdot)$. Dann ist $E + F$ ein Untervektorraum, und es gilt*

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

**Bemerkung.** Die Formel erinnert an die Zählformel für endliche Mengen: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. Der Durchschnitt $E \cap F$ würde sonst doppelt gezählt.

**Bsp.** Im Beispiel oben ist $\dim(E) = \dim(F) = 1$ und $E \cap F = \{\vec{0}\}$, also $\dim(E \cap F) = 0$. Satz 10 liefert $\dim(E + F) = 1 + 1 - 0 = 2$, in Übereinstimmung mit $E + F = \mathbb{R}^2$.

# Satz 10: Plan des Beweises

**Zu zeigen:** Für Untervektorräume $E, F \subseteq V$ gilt

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

**Frage:** Was ist zuerst zu prüfen, bevor wir von $\dim(E + F)$ sprechen?

**Antwort:** Dass $E + F$ ein Untervektorraum ist.

**Frage:** Wie können wir anschließend seine Dimension bestimmen?

**Antwort:** Wir konstruieren eine Basis von $E + F$ und zählen ihre Elemente.

# Beweis (a): $E + F$ ist ein Untervektorraum

Z.z.: (a) $E + F$ ist ein Untervektorraum; (b) $E + F$ hat eine Basis aus $\dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ Elementen.

**(a)** $E + F \neq \varnothing$, da $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in E + F$.

**Addition.** Seien $u_1 = e_1 + f_1$ und $u_2 = e_2 + f_2$ mit $e_i \in E$, $f_i \in F$. Dann gilt

$$u_1 + u_2 = e_1 + f_1 + e_2 + f_2 = \underbrace{(e_1 + e_2)}_{\in E} + \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\in F} \in E + F$$

(Assoziativität und Kommutativität der Addition).

# Beweis (a): Skalarmultiplikation

**Skalarmultiplikation.** Sei $u = e + f \in E + F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda u = \lambda(e + f) = \underbrace{\lambda e}_{\in E} + \underbrace{\lambda f}_{\in F} \in E + F$$

(Distributivgesetz; $E$ und $F$ sind abgeschlossen bezüglich "$\cdot$").

Also ist $E + F$ ein Untervektorraum. □

# Beweis (b): Eine Basis von $E \cap F$

Nach Satz 4 ist $E \cap F$ ein Untervektorraum. Nach Folgerung (d) sind $E$, $F$ und $E \cap F$ endlich erzeugt.

Sei $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Basis von $E \cap F$.

(Ist $E \cap F = \{\vec{0}\}$, so lässt man die $a$'s weg und setzt $m := 0$.)

# Beweis (b): Ergänzung zu Basen von $E$ und $F$

Nach dem Basisergänzungssatz (Folgerung (c)), angewandt im Vektorraum $E$, lässt sich $\{a_1, \ldots, a_m\}$ zu einer Basis

$$\{a_1, \ldots, a_m, e_1, \ldots, e_n\} \text{ von } E$$

ergänzen, und ebenso (im Vektorraum $F$) zu einer Basis

$$\{a_1, \ldots, a_m, f_1, \ldots, f_r\} \text{ von } F.$$

Also: $\dim(E \cap F) = m$, $\dim(E) = m + n$, $\dim(F) = m + r$.

# Beweis (b): Der Kandidat für eine Basis

**Behauptung.**

$$B := \{a_1, \ldots, a_m, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_r\}$$

ist eine Basis von $E + F$.

Daraus folgt Satz 10, denn $B$ besteht aus

$$m + n + r = (m + n) + (m + r) - m = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

Elementen.

Wir müssen zeigen: (1) $\operatorname{span}(B) = E + F$, (2) $B$ ist linear unabhängig.

# Beweis (b): Die Vektoren in $B$ sind verschieden

Damit $B$ wirklich $m + n + r$ Elemente hat, müssen die Vektoren paarweise verschieden sein.

Innerhalb der Basen von $E$ und von $F$ ist das klar. Es bleibt z.B. $e_i \neq f_j$ zu zeigen.

Wäre $e_i = f_j$, so wäre $e_i \in E \cap F = \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_m\})$. Dann wäre $\{a_1, \ldots, a_m, e_i\}$ linear abhängig – im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basis von $E$.

# Beweis (b): $B$ erzeugt $E + F$

Sei $v \in E + F$. Nach Definition gilt $v = e + f$ mit $e \in E$ und $f \in F$ (diese Darstellung ist im Allgemeinen nicht eindeutig).

$e$ ist eine Linearkombination von $\{a_1, \ldots, a_m, e_1, \ldots, e_n\}$, $f$ ist eine Linearkombination von $\{a_1, \ldots, a_m, f_1, \ldots, f_r\}$. Also ist $v = e + f$ eine Linearkombination der Vektoren aus $B$, d.h. $E + F \subseteq \operatorname{span}(B)$.

Umgekehrt ist $B \subseteq E + F$ (z.B. $e_i = e_i + \vec{0}$, $f_i = \vec{0} + f_i$), und $E + F$ ist ein Untervektorraum (Teil (a)). Nach Satz 6(b) folgt $\operatorname{span}(B) \subseteq E + F$.

Insgesamt: $\operatorname{span}(B) = E + F$.

# Beweis (b): $B$ ist linear unabhängig

Sei

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \nu_i f_i. \qquad (*)$$

Wir addieren $-\sum_{i=1}^{r} \nu_i f_i$ zu beiden Seiten:

$$v := \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i}_{\in E, \text{ da } a_i, e_i \in E} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} (-\nu_i) f_i}_{\in F, \text{ da } f_i \in F}.$$

Also liegt $v$ in $E$ und in $F$, d.h. $v \in E \cap F$.

# Beweis (b): Koeffizientenvergleich

Da $v \in E \cap F$, ist $v$ eine Linearkombination der $a_i$: $v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i$.

Wir haben also zwei Darstellungen von $v$ bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_m, f_1, \ldots, f_r\}$ von $F$:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i a_i + \sum_{i=1}^{r} 0 \cdot f_i \qquad \text{und} \qquad v = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot a_i + \sum_{i=1}^{r} (-\nu_i) f_i.$$

Nach Satz 7(b) ist die Darstellung bezüglich einer Basis eindeutig. Koeffizientenvergleich bei den $f_i$ liefert: alle $\nu_i = 0$.

# Beweis (b): Abschluss

Mit $\nu_i = 0$ wird $(*)$ zu

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i.$$

Da $\{a_1, \ldots, a_m, e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von $E$ und damit linear unabhängig ist, sind alle $\lambda_i = 0$ und alle $\mu_i = 0$.

Also ergibt eine Linearkombination von Elementen aus $B$ nur dann $\vec{0}$, wenn sie trivial ist: $B$ ist linear unabhängig. □

# Nächstes Ziel: Vektoren durch Zahlen beschreiben

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ein geordnetes Basis-Tupel. Nach Satz 7 kann jeder Vektor $w \in V$ eindeutig geschrieben werden als

$$w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

**Frage:** Welche Informationen genügen also, um $w$ bei fest gewählter Basis zu beschreiben?

**Antwort:** Die $n$ Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Diese nennen wir die Koordinaten von $w$ bezüglich $B$.

# Koordinaten in einer Basis

**Def.** *Sei* $B := (v_1, ..., v_n)$ *ein Basis-Tupel des Vektorraums* $(V, +, \cdot)$ *und* $w \in V$. *Der Koordinatenvektor von* $w$ *bezüglich dieser Basis ist das* $n$*-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *mit*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

*Die Skalare* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *heißen die Koordinaten von* $w$.

**Warum ist das wohldefiniert?**

- **Existenz:** Da $\operatorname{span}(\{v_1, ..., v_n\}) = V$, ist jedes $w \in V$ eine Linearkombination der $v_1, ..., v_n$.
- **Eindeutigkeit:** Nach Satz 7(b) sind die Zahlen $\lambda_i$ eindeutig bestimmt.

# Die Koordinatenabbildung

**Def. (Fortsetzung).** *Die Abbildung*

$$C_B : V \to \mathbb{R}^n, \qquad C_B(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

*heißt die Koordinatenabbildung.*

**Bsp.** Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$. Der Koordinatenvektor von $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ selbst, denn

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

In der Standardbasis ist $C_B$ also die identische Abbildung.

# Warum Basis-Tupel und nicht Basis-Menge?

**Bemerkung.** In Woche 3 haben wir Basis-Mengen und Basis-Tupel (also "geordnete" Basen) definiert und für beide das Wort Basis verwendet.

Hier müssen wir Basen zum ersten Mal wirklich als Tupel verstehen: Ordnet man die Vektoren eines Basis-Tupels um, so werden auch die Koordinaten entsprechend umgeordnet.

**Bsp.** In $\mathbb{R}^2$ mit der umgeordneten Standardbasis $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ hat $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$, denn

$$y \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{v_1} + x \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

# Beispiel: Koordinaten in einer anderen Basis

**Bsp.** Wir betrachten die Basis

$$B := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$. Welche Koordinaten hat der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Basis?

**Antwort:** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Probe:** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

# Wie findet man die Koordinaten eines Vektors im $\mathbb{R}^n$?

Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}^n$. Alle Vektoren seien explizit gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix}, \ \ldots, \ v_n = \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}.$$

(Hier ist $v_i^j$ die $j$-te Komponente von $v_i$ – der obere Index ist kein Exponent.)

# Koordinaten im $\mathbb{R}^n$: Die Bedingung

Nach Definition sind die Koordinaten von $u$ die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}.$$

# Koordinaten als Lösung eines Gleichungssystems

Komponentenweise ist das das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \ldots + \lambda_n v_n^1 &= u^1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2 &= u^2 \\ & \vdots \\ \lambda_1 v_1^n + \ldots + \lambda_n v_n^n &= u^n \end{cases}$$

aus $n$ Gleichungen für die $n$ Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (die Zahlen $v_i^j$ und $u^j$ sind gegeben). Die Komponenten von $v_i$ bilden die $i$-te Spalte des Systems.

Die Lösung existiert und ist eindeutig (Satz 7(b)); sie liefert die Koordinaten des Vektors $u$ in der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

# Aufgabe: Koordinaten im $\mathbb{R}^3$

**Aufgabe.** Finde die Koordinaten des Vektors $u := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Die Koordinaten sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d.h. nach der Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Aufgabe: Lösen des Systems

Das ist ein System von drei Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{rcrl} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & Eq_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & Eq_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 & Eq_3 \end{array}\right.$$

Gauß-Verfahren:

$$\left\{\begin{array}{rcrl} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 & Eq_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & -4 & Eq_2 - Eq_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & -2 & Eq_3 - 2Eq_1 \end{array}\right.$$

# Aufgabe: Rückwärtseinsetzen

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 &= -4 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= -2 \end{cases}$$

Die letzte Gleichung minus die vorletzte ergibt $2\lambda_3 = 2$, also $\lambda_3 = 1$.

Einsetzen von $\lambda_3 = 1$ in die letzte Gleichung: $\lambda_2 - 1 = -2$, also $\lambda_2 = -1$.

Einsetzen in die erste Gleichung: $\lambda_1 - 1 + 2 = 2$, also $\lambda_1 = 1$.

# Aufgabe: Antwort

**Antwort:** Der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

**Probe:**

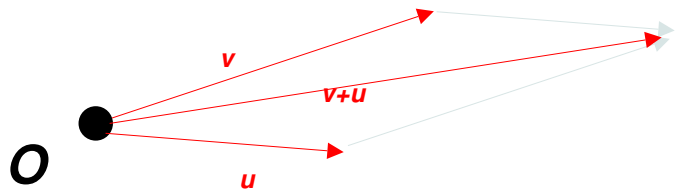
$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 + 2 \\ 1 - 2 - 1 \\ 2 - 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Basis in der (geometrischen) Ebene

**Wiederholung:** Sei $E$ eine Ebene, $O \in E$ ein Punkt und

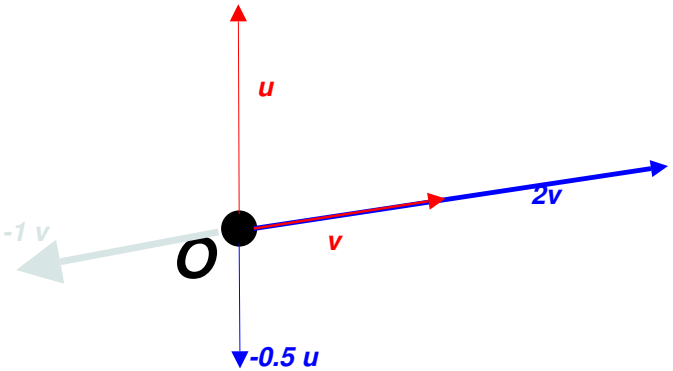
$V := \{\text{gerichtete Strecken mit Anfangspunkt } O \text{ und Endpunkt auf } E\}$.

Addition von Vektoren: Parallelogrammregel.



# Die geometrische Ebene: Skalarmultiplikation

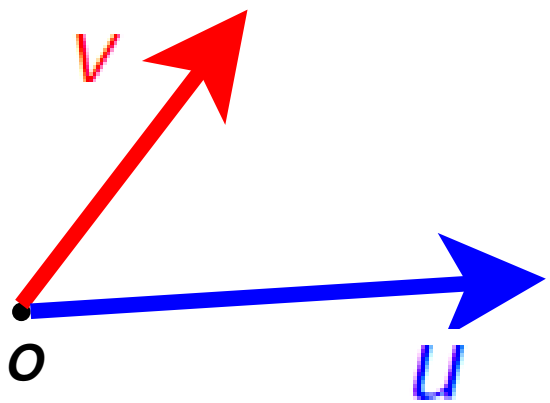
Multiplikation von Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ mit Vektoren: Streckungen/Stauchungen (für $\lambda < 0$ zusätzlich Umkehrung der Richtung).



# Die geometrische Ebene ist zweidimensional

**Behauptung.** *$V$ ist zweidimensional: Je zwei Vektoren $u, v \in V$ mit $u \neq \vec{0} \neq v$ und $\lambda u \neq v$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bilden eine Basis.*

Geometrisch bedeutet die Bedingung: $u$ und $v$ liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden durch $O$.




Wir müssen zeigen:

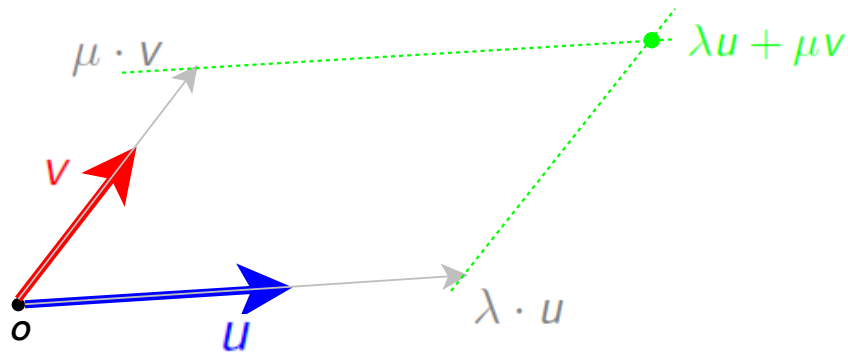
(a) $\{u, v\}$ ist linear unabhängig, d.h. aus $\lambda u + \mu v = \vec{0}$ folgt $\lambda = 0 = \mu$;

(b) $\{u, v\}$ ist erzeugend: $\forall w \in V \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda u + \mu v = w$.

# Beweis (a): Lineare Unabhängigkeit

**Fall $\lambda \neq 0 \neq \mu$.** Nach der Parallelogrammregel ist der Endpunkt von $\lambda u + \mu v$ die dem Punkt $O$ gegenüberliegende Ecke des Parallelogramms mit den Seiten $\lambda u$ und $\mu v$.

Da $\lambda u$ und $\mu v$ nicht auf einer Geraden liegen, ist das Parallelogramm nicht entartet, und diese Ecke ist nicht $O$. Also $\lambda u + \mu v \neq \vec{0}$.



# Beweis (a): Die restlichen Fälle

**Fall $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.** Dann ist $\lambda u + \mu v = \lambda u$, und das ist nach Lemma 5 nicht $\vec{0}$ (da $\lambda \neq 0$, $u \neq \vec{0}$).

**Fall $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$:** analog.

Also ist nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$, d.h. $\{u, v\}$ ist linear unabhängig.

# Beweis (b): Erzeugendensystem, Fälle 1 und 2

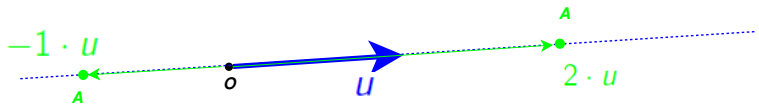
Z.z.: Ein beliebiger Vektor $w = \overrightarrow{OA}$ (mit Endpunkt $A$) ist eine Linearkombination von $u, v$.

**Fall 1.** $A$ liegt auf der Geraden durch $O$ und den Endpunkt von $u$. Dann ist $w = \lambda u$ mit

$$\lambda = \pm \frac{\text{Länge von } w}{\text{Länge von } u}$$

(Vorzeichen $+$, wenn $w$ und $u$ in dieselbe Richtung zeigen, sonst $-$).

# Beweis (b): Fall 1 (Bild) und Fall 2

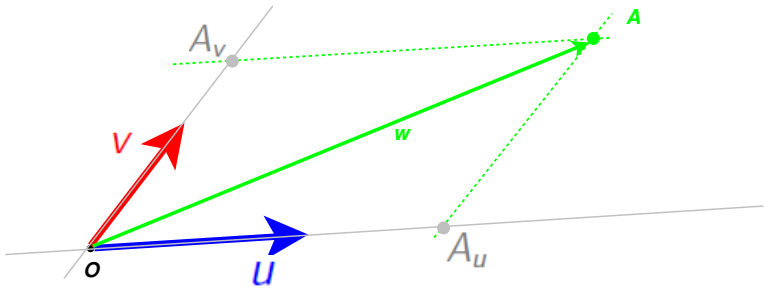



**Fall 2.** $A$ liegt auf der Geraden durch $O$ und den Endpunkt von $v$: analog, $w = \mu v$.

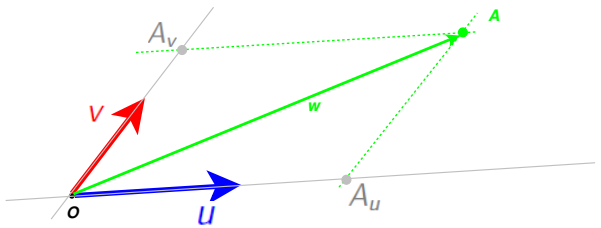
# Beweis (b): Fall 3

**Fall 3.** $A$ (= Endpunkt von $w$) liegt auf keiner der beiden Geraden.

Wir betrachten die Geraden durch $A$, die zu $u$ bzw. $v$ parallel sind. Sie schneiden die Gerade durch $O$ und den Endpunkt von $v$ bzw. von $u$ (sie schneiden sich, weil $u$ und $v$ nicht parallel sind). Die Schnittpunkte bezeichnen wir mit $A_u$ (auf der $u$-Geraden) und $A_v$ (auf der $v$-Geraden).



# Beweis (b): Fall 3 (Fortsetzung)




$O, A_u, A, A_v$ bilden ein Parallelogramm, also ist nach der Parallelogrammregel

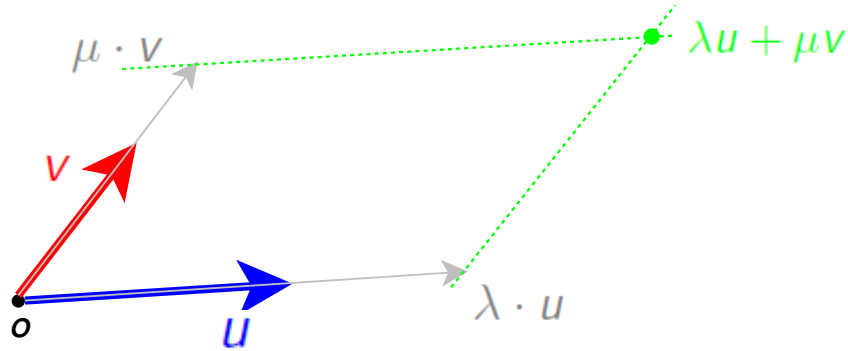
$$w = \overrightarrow{OA_u} + \overrightarrow{OA_v}.$$

Nach Fall 1 und 2 gilt $\overrightarrow{OA_u} = \lambda u$ und $\overrightarrow{OA_v} = \mu v$ für gewisse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Also $w = \lambda u + \mu v$. □

# Koordinaten eines Vektors in der Ebene

Wir betrachten die Basis $(u, v)$ der geometrischen Ebene.

Nach Definition sind die Koordinaten von $w$ die Zahlen $\lambda, \mu$ mit $w = \lambda u + \mu v$.



# Koordinaten eines Vektors in der Ebene: Berechnung

Mit den Punkten $A_u$, $A_v$ wie im Beweis von (b) gilt

$$\lambda = \pm \frac{\text{Länge von } OA_u}{\text{Länge von } u}, \qquad \mu = \pm \frac{\text{Länge von } OA_v}{\text{Länge von } v}.$$

Das Vorzeichen von $\lambda$ ist "+", wenn $A_u$ und der Endpunkt von $u$ auf derselben Seite von $O$ liegen, und sonst "−". Analog für $\mu$ (mit $A_v$ und $v$).

# Kartesische Koordinaten in der Ebene

**Behauptung.** Sind die Vektoren $u$, $v$ orthogonal und haben sie die Länge 1, dann stimmen die Koordinaten jedes Vektors in der Basis $(u, v)$ mit den kartesischen Koordinaten überein, die Sie aus der Schule kennen.

Die Geraden, die $u$ und $v$ enthalten, sind die $X$-Achse und die $Y$-Achse.

Der Vektor $w$ habe die Koordinaten $\binom{x}{y}$ in der Basis $(u, v)$, also

$$w = x \cdot u + y \cdot v.$$

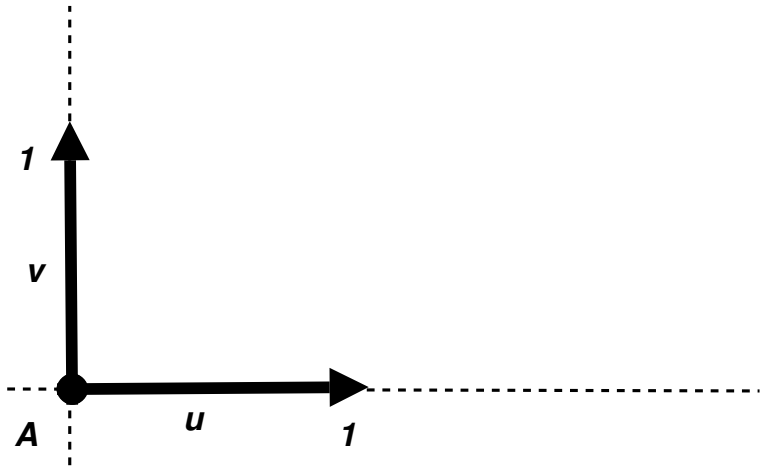
# Kartesische Koordinaten: Begründung

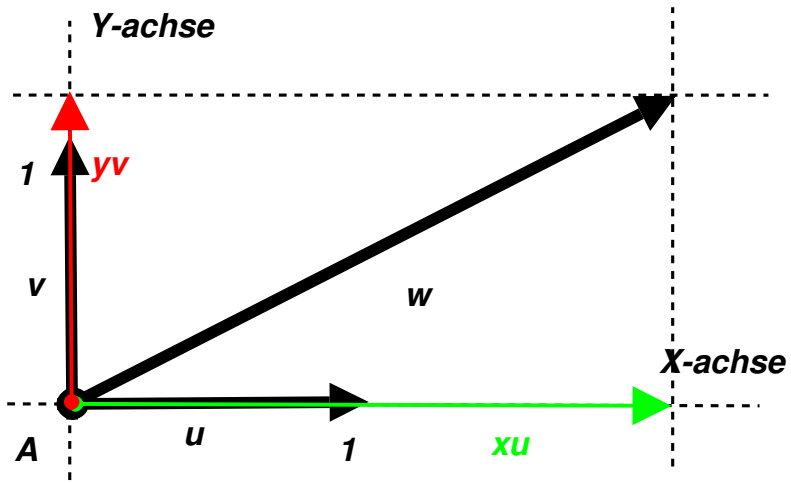
- Da $u$ die Länge 1 hat, hat $xu$ die Länge $|x|$.
- Da $u \perp v$, ist das Parallelogramm aus Fall 3 ein Rechteck: $A_u$ ist der Fußpunkt des Lotes von $A$ auf die $X$-Achse.

Also ist $|x|$ der Abstand von $O$ zum Lotfußpunkt auf der $X$-Achse, und das Vorzeichen gibt an, auf welcher Seite von $O$ er liegt; analog für $y$.

Also sind die kartesischen Koordinaten von $w$ ebenfalls $\binom{x}{y}$.

# Kartesische Koordinaten: Bilder



# Woche 4: Was haben wir erreicht?

- Mit dem **Austauschsatz von Steinitz** (Lemma 9) haben wir bewiesen, dass die Anzahl der Basisvektoren nicht von der Basis abhängt (Satz 9).
- Wir können entscheiden, wann $n$ Vektoren in einem $n$-dimensionalen Raum eine Basis bilden, und linear unabhängige Mengen zu Basen ergänzen.
- Wir kennen die Summe von Untervektorräumen und den **Dimensionssatz** (Satz 10).
- Wir können Vektoren durch **Koordinaten bezüglich einer Basis** beschreiben und haben die Verbindung zu den kartesischen Koordinaten gesehen.

# Ausblick auf Woche 5

Bisher haben wir Vektorräume, ihre Basen, Dimension und Koordinaten untersucht.

Als Nächstes werden wir **Abbildungen zwischen Vektorräumen** betrachten: Welche Abbildungen vertragen sich mit Addition und Skalarmultiplikation?

Die Definition *linearer Abbildungen* und ihre Eigenschaften sind Gegenstand von **Woche 5**.