Woche 5: Überblick

- Lineare Abbildungen: Definition und Beispiele
- Koordinatenabbildung; Injektion, Surjektion, Bild und Kern
- Umkehrabbildungen, Isomorphismen und ihre Eigenschaften
- Hauptsatz über endlichdimensionale Vektorräume (Satz 11)
- Lineare Abbildungen durch Bilder einer Basis (Lemma 15)
- Dimensionsformel (Satz 12) und eine Anwendung

Rückblick aus Woche 4: Koordinaten

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Basis-Tupel von V. Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig in der Form

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

schreiben. Seine Koordinaten sind

$$C_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Frage: Was passiert bei der Addition zweier Vektoren mit ihren Koordinaten?
Antwort: Die Koordinaten addieren sich komponentenweise.

Lineare Abbildungen: Motivation

Bisher haben wir einzelne Vektorräume studiert: Basen, Dimension, Koordinaten.

Jetzt untersuchen wir Abbildungen zwischen Vektorräumen. Interessant sind diejenigen, die mit den Operationen "$+$" und "$\cdot$" verträglich sind.

Beispiel, das wir schon kennen: Die Koordinatenabbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$ "übersetzt" Vektoren aus V in Spaltenvektoren. Wir werden sehen: C_B respektiert Addition und Skalarmultiplikation (Lemma 10).

Lineare Abbildungen

Def. *Es seien* $(V_1, +, \cdot)$ *und* $(V_2, +, \cdot)$ *zwei Vektorräume. Eine Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *heißt linear, falls für alle Vektoren* $u, v \in V_1$ *und für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$,
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Bemerkung. Links steht "$+$" bzw. "$\cdot$" in V_1, rechts "$+$" bzw. "$\cdot$" in V_2.

In Worten: Es ist egal, ob man zuerst addiert (bzw. multipliziert) und dann abbildet, oder zuerst abbildet und dann addiert (bzw. multipliziert).

Beispiel: Einbettung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Bsp. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear.

Addition:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right).$$

Einbettung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: weitere Eigenschaften

Skalarmultiplikation:

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Beide Bedingungen sind erfüllt, also ist f linear.

Beispiel: Streckung

Bsp. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Streckung $f : V \to V$, $f(v) := \alpha \cdot v$, linear.

In der Tat:

$$f(v_1 + v_2) = \alpha(v_1 + v_2) \overset{\text{VII}}{=} \alpha v_1 + \alpha v_2 = f(v_1) + f(v_2),$$

$$f(\lambda v_1) = \alpha(\lambda v_1) = (\alpha\lambda)v_1 = (\lambda\alpha)v_1 = \lambda(\alpha v_1) = \lambda f(v_1).$$

(Hier benutzen wir die Axiome der Skalarmultiplikation und die Kommutativität in $\mathbb{R}$.)

Beispiel: Nullabbildung

Bsp. Ist die Abbildung $f : V_1 \to V_2$, $f(v) := \vec{0}$, linear?

Ja! Denn

$$f(v_1 + v_2) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = f(v_1) + f(v_2),$$
$$f(\lambda v_1) = \vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda f(v_1) \quad (\text{Lemma } 4).$$

(Für $V_1 = V_2$ ist das gerade die Streckung mit $\alpha = 0$.)

Ein Gegenbeispiel

Bsp. Die Verschiebung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$$

ist nicht linear.

Denn z.B.

$$f\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{aber} \qquad 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Merke: Eine lineare Abbildung bildet stets $\vec{0}$ auf $\vec{0}$ ab (Lemma 11(a) unten). Eine Verschiebung um einen Vektor $\neq \vec{0}$ ist daher nie linear.

Linearität und Linearkombinationen

Ist $f : V \to U$ linear, so gilt für $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Frage: Welche beiden Eigenschaften der Linearität werden hier verwendet?
Zuerst die Verträglichkeit mit der Addition, dann mit der Skalarmultiplikation.

Durch wiederholte Anwendung folgt für jede endliche Linearkombination

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Lemma 10: Die Koordinatenabbildung ist linear

Lemma 10. *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis von* $(V, +, \cdot)$ *und* $C : V \to \mathbb{R}^n$ *die Koordinatenabbildung, die jeden Vektor auf seinen Koordinatenvektor abbildet. Dann ist* C *linear.*

In Worten: Die Koordinaten einer Summe sind die Summen der Koordinaten, und die Koordinaten von λu sind λ-mal die Koordinaten von u.

Lemma 10: Was ist zu zeigen?

Beweis. Seien $u, w \in V$ mit

$$C(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Z.z.:

(a) $C(u + w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$,

(b) $C(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lemma 10: Beweis

Nach Definition der Koordinaten gilt

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i.$$

(a) Dann ist

$$u+w = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i \quad \Longrightarrow \quad C(u+w) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Lemma 10: Linearität der Koordinatenabbildung

(b) Ebenso ist

$$\lambda u = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) v_i \quad \Longrightarrow \quad C(\lambda u) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Bei "$\Longrightarrow$" benutzen wir die Eindeutigkeit der Koordinaten (Satz 7(b)). □

Exkurs in die Mengenlehre: Injektion

Es seien A, B zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung.

Def. f heißt Injektion (oder injektiv), falls für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ gilt: $f(x) \neq f(y)$.

Äquivalent (Kontraposition): $f(x) = f(y) \implies x = y$.

In Worten: jedes $b \in B$ hat höchstens ein Urbild.

Bsp. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist injektiv. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, ist nicht injektiv, da $g(1) = g(-1)$.

Exkurs: Surjektion

Def. $f : A \to B$ heißt Surjektion (oder surjektiv), falls für jedes $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$.

Äquivalent:

$$\text{Bild}_f := \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\} = B.$$

In Worten: jedes $b \in B$ hat mindestens ein Urbild.

Bsp. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, ist nicht surjektiv (-1 hat kein Urbild);
$g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, ist surjektiv.

Ob eine Abbildung surjektiv ist, hängt also auch von der Zielmenge B ab!

Exkurs: Bijektion

Def. $f : A \to B$ heißt Bijektion (oder bijektiv), falls f injektiv und surjektiv ist.

In Worten: jedes $b \in B$ hat genau ein Urbild.

Bsp. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist bijektiv; $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, ist bijektiv.

Die Bilder: Injektion und Surjektion

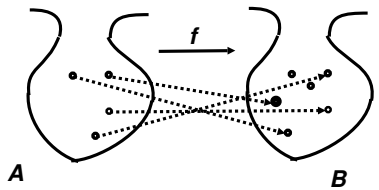


Abbildung: Injektion (Abbildung “in”)

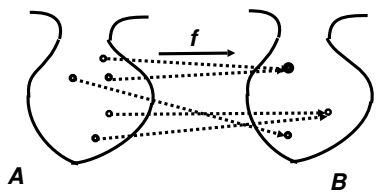


Abbildung: Surjektion (Abbildung “auf”)

Die Bilder: Bijektion

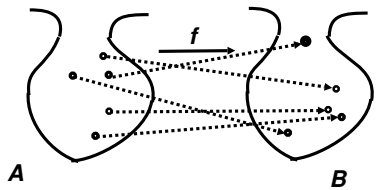


Abbildung: Bijektion = Surjektion und Injektion

Die Bildmenge

Wichtige Bezeichnung: $\text{Bild}_f := \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$.

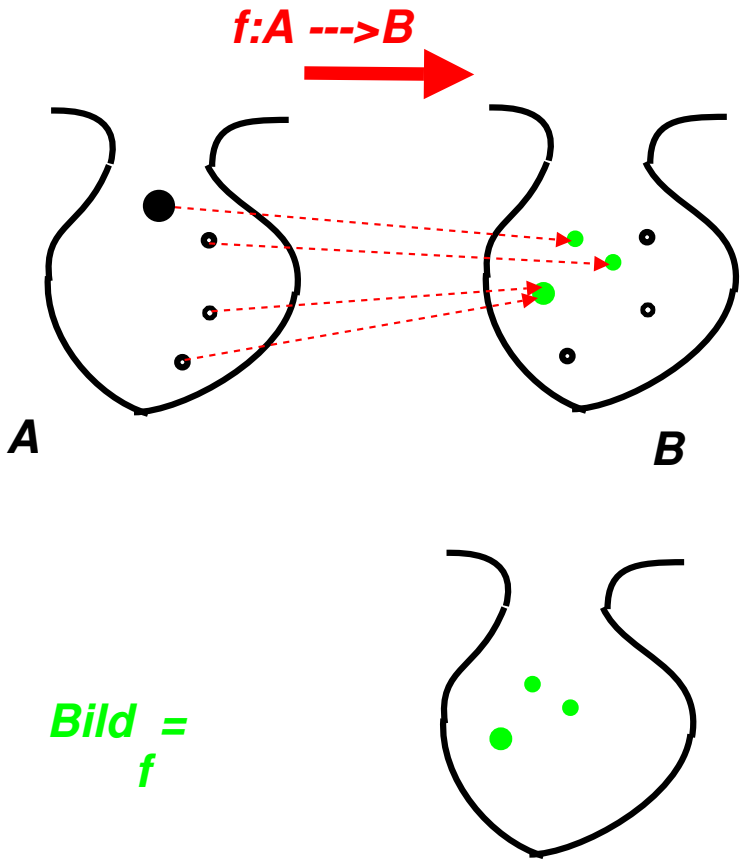


Abbildung: **Bsp:** Bild_f

Kern einer linearen Abbildung

Def. Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung, wobei $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume sind. Der Kern von f ist die Menge

$$\mathrm{Kern}_f := \mathrm{Urbild}_f(\{\vec{0}\}) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}.$$

Bsp. Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, ist $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$.

Für die Nullabbildung $f(v) = \vec{0}$ ist $\mathrm{Kern}_f = V$.

Lemma 11

Lemma 11. *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(b) *Für alle $v \in V$ gilt $f(-v) = -f(v)$.*

(c) $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\} \iff$ *f ist injektiv.*

Bedeutung von (c): Um die Injektivität einer linearen Abbildung zu prüfen, genügt es, die Gleichung $f(v) = \vec{0}$ zu lösen.

Lemma 11: Beweis von (a) und (b)

(a) Sei $v \in V$ beliebig. Nach Lemma 3 ist $\vec{0} = 0 \cdot v$. Also

$$f(\vec{0}) = f(0 \cdot v) \overset{f \text{ linear}}{=} 0 \cdot f(v) \overset{\text{Lemma 3}}{=} \vec{0}.$$

(b) Nach Woche 2 gilt $-v = (-1) \cdot v$. Also

$$f(-v) = f((-1) \cdot v) \overset{f \text{ linear}}{=} (-1) \cdot f(v) = -f(v).$$

Folgerung aus (b): Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1 + (-v_2)) = f(v_1) + f(-v_2) = f(v_1) - f(v_2).$$

Lemma 11: Beweis von (c), "$\Longrightarrow$"

Sei $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$. Z.z.: f ist injektiv, d.h. $f(v_1) = f(v_2) \Longrightarrow v_1 = v_2$.

Es gilt

$$f(v_1) = f(v_2) \iff f(v_1) - f(v_2) = \vec{0} \iff f(v_1 - v_2) = \vec{0},$$

wobei wir die Folgerung aus (b) benutzt haben.

Also liegt $v_1 - v_2$ im Kern von f. Da $\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}$, ist $v_1 - v_2 = \vec{0}$, d.h. $v_1 = v_2$.

Lemma 11: Beweis von (c), "$\Longleftarrow$"

Sei f injektiv, und sei $v \in \mathrm{Kern}_f$, also $f(v) = \vec{0}$.

Nach (a) gilt auch $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Also $f(\vec{0}) = f(v)$, und aus der Injektivität folgt $v = \vec{0}$.

Somit ist $\mathrm{Kern}_f \subseteq \{\vec{0}\}$, und wegen (a) ist $\vec{0} \in \mathrm{Kern}_f$. Also

$$\mathrm{Kern}_f = \{\vec{0}\}. \qquad \square$$

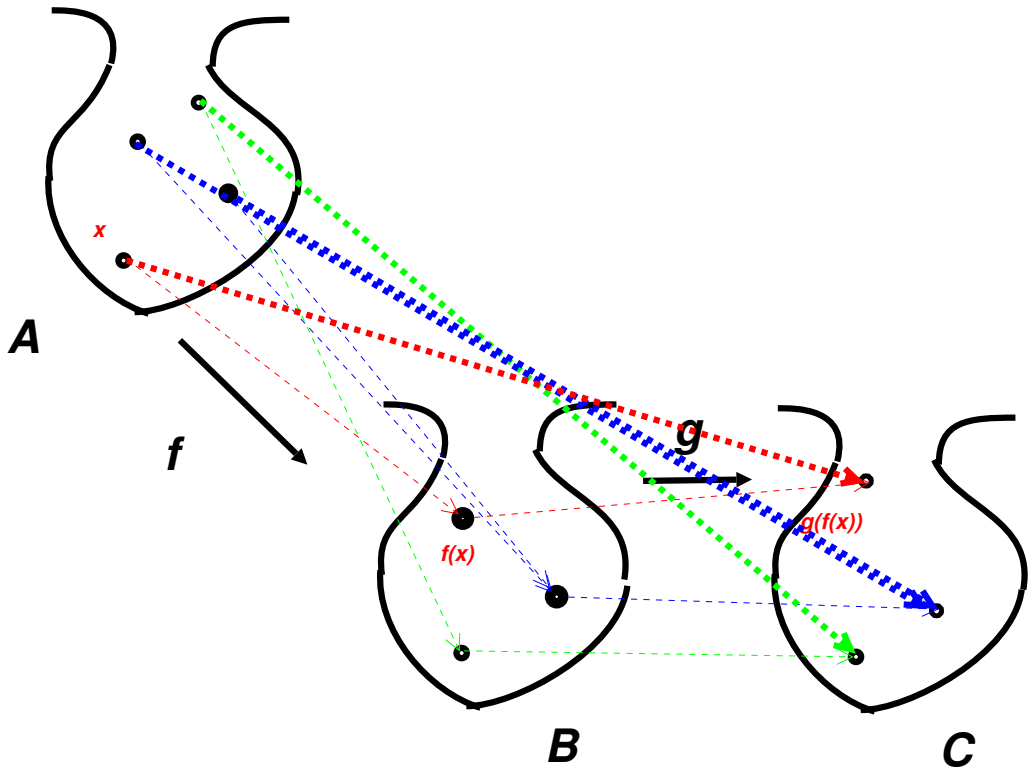
Verkettung von Abbildungen

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen.

Die Verkettung (auch Komposition, Hintereinanderausführung) von g und f ist die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Achtung: In $g \circ f$ wird zuerst f, dann g angewendet.



Verkettung: Beispiel

Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, $g(x) := \cos(x)$.

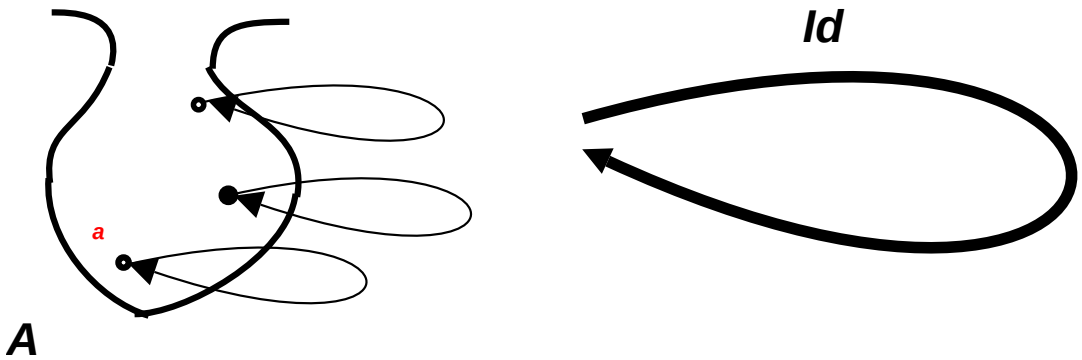
Dann ist

$$(g \circ f)(x) = \cos(x^3), \qquad \text{aber} \qquad (f \circ g)(x) = (\cos x)^3.$$

Im Allgemeinen ist also $g \circ f \neq f \circ g$: Die Verkettung ist nicht kommutativ.

Die identische Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A definieren wir $\mathrm{Id}_A : A \to A$, $\mathrm{Id}_A(a) := a$ für alle $a \in A$.



Die identische Abbildung: Eigenschaften

Wichtiges Bsp: Für jede Abbildung $f : A \to B$ gilt

- $f \circ \mathrm{Id}_A = f$, da für alle $a \in A$: $(f \circ \mathrm{Id}_A)(a) = f(\mathrm{Id}_A(a)) = f(a)$;
- $\mathrm{Id}_B \circ f = f$, da für alle $a \in A$: $(\mathrm{Id}_B \circ f)(a) = \mathrm{Id}_B(f(a)) = f(a)$.

Die identische Abbildung spielt für "$\circ$" die Rolle der 1 bei der Multiplikation.

Links- und Rechtsinverse

Def. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Linksinverse (bzw. Rechtsinverse) zu f, falls $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ (bzw. $f \circ g = \mathrm{Id}_B$).*

Lemma 12. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

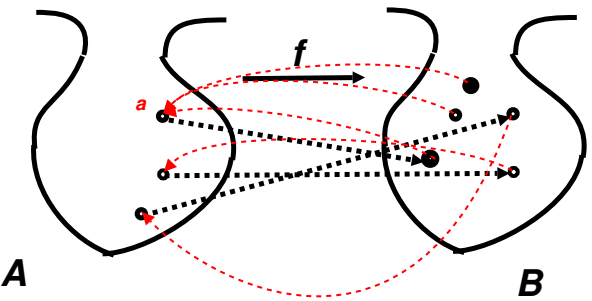
Links- und Rechtsinverse: Beispiel

Bsp. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \binom{x}{0}$, ist injektiv.

Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\left(\binom{x}{y}\right) = x$, ist eine Linksinverse: $g(f(x)) = x$.

Aber $f\left(g\left(\binom{x}{y}\right)\right) = \binom{x}{0}$, also ist g keine Rechtsinverse. (Passend dazu ist f nicht surjektiv.)

Lemma 12: Beweis von (1) "$\Longrightarrow$"



Sei f injektiv. Wir wählen ein festes $a \in A$ (möglich, da $A \neq \varnothing$).

Wir definieren die Linksinverse $g : B \to A$ so:

- Liegt y in Bild_f und ist $f(x) = y$, so sei $g(y) := x$. (Da f injektiv ist, ist x durch y eindeutig bestimmt.)
- Liegt y nicht in Bild_f, so sei $g(y) := a$.

Lemma 12: Linksinverse aus Injektivität

Für alle $x \in A$ gilt

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{Def.}}{=} g(f(x)) \overset{y:=f(x)}{=} g(y) \overset{f(x)=y}{=} x = \mathrm{Id}_A(x).$$

Also ist g eine Linksinverse.

Bemerkung. Die Linksinverse ist nicht immer eindeutig: das Element a können wir beliebig wählen.

Lemma 12: Beweis von (1) "$\Longleftarrow$"

Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$. Wir müssen $x = y$ zeigen.

Dazu wenden wir g auf beide Seiten an:

$$g(f(x)) = g(f(y)).$$

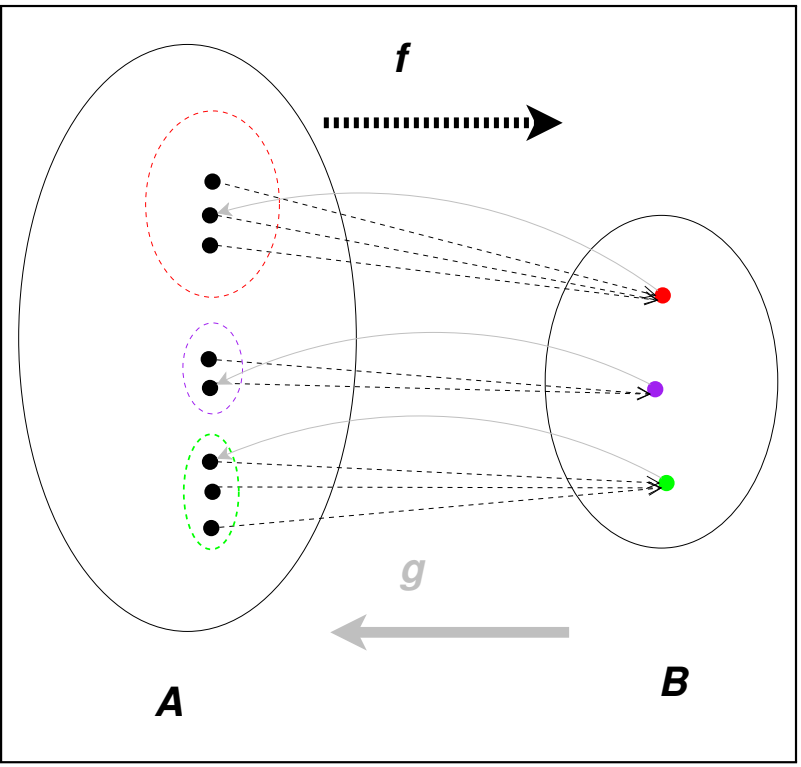
Wegen $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ erhalten wir

$$x = \mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y) = y.$$

Also ist f injektiv. □

Lemma 12: Beweis von (2) "$\Longrightarrow$"

Sei f surjektiv. Für jedes $y \in B$ gibt es also mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.



Sei $g\colon B \to A$ eine Abbildung, die jedem $y \in B$ eines seiner Urbilder x zuordnet.

Dann gilt für jedes $y \in B$:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = \mathrm{Id}_B(y).$$

Lemma 12: Beweis von (2) “$\Longleftarrow$”

Es gelte $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Sei $y \in B$. Wir müssen ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ angeben.

Wir setzen $x := g(y)$. Dann gilt

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{Id}_B(y) = y.$$

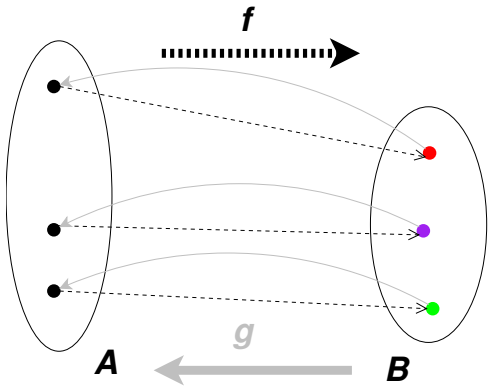
Also ist f surjektiv. □

Lemma 13: Inverse Abbildung

Lemma 13. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann gilt:*

f ist bijektiv $\iff$ es gibt $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

Ferner ist ein solches g eindeutig.



Bezeichnung. Ein solches g bezeichnen wir mit f^{-1} und nennen es die Inverse (oder Umkehrabbildung) von f.

Lemma 13: Beweis "$\Longleftarrow$"

g ist eine Links- und eine Rechtsinverse von f. Nach Lemma 12 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

(Lemma 12 setzt $A \neq \varnothing$ voraus. Ist $A = \varnothing$, so ist auch $B = \varnothing$, da es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt; dann ist f trivialerweise bijektiv.)

Lemma 13: Beweis "$\Longrightarrow$" (Existenz)

Sei f bijektiv (o.B.d.A. $A \neq \varnothing$). Nach Lemma 12 gibt es g_1 und g_2 mit

$$g_1 \circ f = \mathrm{Id}_A, \qquad f \circ g_2 = \mathrm{Id}_B.$$

Z.z.: $g_1 = g_2$. Für beliebiges $b \in B$ gilt

$$g_1(b) = g_1(\mathrm{Id}_B(b)) = g_1(f(g_2(b))) = (g_1 \circ f)\big(g_2(b)\big) = \mathrm{Id}_A(g_2(b)) = g_2(b). \quad (*$$

Also $g_1 = g_2$, und $g := g_1 = g_2$ erfüllt

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B.$$

Lemma 13: Beweis der Eindeutigkeit

Angenommen, g_1 und g_2 haben beide die gewünschte Eigenschaft:

$$g_i \circ f = \mathrm{Id}_A, \qquad f \circ g_i = \mathrm{Id}_B \qquad (i = 1, 2).$$

Insbesondere ist g_1 eine Linksinverse und g_2 eine Rechtsinverse.

Die Rechnung $(*)$ benutzt nur genau diese beiden Eigenschaften. Also gilt $g_1 = g_2$. □

Merke: Ist f bijektiv, so stimmen jede Linksinverse und jede Rechtsinverse mit f^{-1} überein.

Isomorphismus

Def. *Seien $(V, +, \cdot)$ und $(U, +, \cdot)$ Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to U$ heißt ein Isomorphismus. Wenn ein Isomorphismus $f : V \to U$ existiert, dann heißen die Räume V und U isomorph.*

Idee: Isomorphe Vektorräume "sehen gleich aus": f übersetzt die Elemente von V eindeutig in die Elemente von U, und dabei bleiben $+$ und $\cdot$ erhalten.

Isomorphismus: Das wichtigste Beispiel

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Die Koordinatenabbildung $C_B : V \to \mathbb{R}^n$ ist

- linear (Lemma 10),
- injektiv: aus $C_B(v) = \vec{0}$ folgt $v = 0v_1 + \cdots + 0v_n = \vec{0}$; also $\mathrm{Kern}_{C_B} = \{\vec{0}\}$ (Lemma 11(c)),
- surjektiv: zu $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ ist $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ein Urbild.

Jeder n-dimensionale Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Lemma 14: Die Inverse eines Isomorphismus

Lemma 14. *Sei $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Dann ist $f^{-1} : U \to V$ ebenfalls ein Isomorphismus.*

(Die Existenz von f^{-1} folgt aus Lemma 13, da ein Isomorphismus bijektiv ist.)

Beweis. Z.z.: f^{-1} ist (a) linear und (b) bijektiv.

(a) Addition. Für $u, v \in U$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(u+v) &= f^{-1}\left(f(f^{-1}(u)) + f(f^{-1}(v))\right) \quad \text{da } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_U \\ &= f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right)\right) \quad \text{da } f \text{ linear ist} \\ &= \left(f^{-1} \circ f\right)\left(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)\right) \\ &= f^{-1}(u) + f^{-1}(v) \quad \text{da } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V \ . \end{aligned}$$

Lemma 14: Linearität der Umkehrabbildung

(a) Skalarmultiplikation. Für $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt analog

$$f^{-1}(\lambda u) \quad = \quad f^{-1}\left(\lambda\, f(f^{-1}(u))\right) = f^{-1}\left(f\left(\lambda f^{-1}(u)\right)\right) = \lambda f^{-1}(u).$$

(b) Bijektivität. Es gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_U$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V$. Also erfüllt $g := f$ die Bedingungen aus Lemma 13 für die Abbildung f^{-1}. Nach Lemma 13 ist f^{-1} bijektiv (und $(f^{-1})^{-1} = f$). □

Folgerung. Ist V isomorph zu U, so ist auch U isomorph zu V.

Vom Vektorraum zum Isomorphismus

Wir haben Vektorräume durch Axiome beschrieben und daraus Rechenregeln abgeleitet. Die Räume $\mathbb{R}^n$ sind unsere wichtigsten Beispiele.

Frage: In welchem Sinn können zwei unterschiedlich dargestellte

Vektorräume als "gleich" betrachtet werden?
Antwort: Sie sind isomorph, wenn es eine bijektive lineare Abbildung zwischen ihnen gibt.

Satz 11: Hauptsatz der linearen Algebra

Satz 11. Zwei endlichdimensionale Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben. **Satz 11' (äquivalente**

Formulierung). Jeder Vektorraum der Dimension n ist zu $\mathbb{R}^n$ isomorph. Warum sind diese Formulierungen äquivalent? Wir zeigen zunächst beide

Richtungen und konstruieren einen Isomorphismus mit Hilfe einer Basis.

Satz 11: Was müssen wir beweisen?

Erste Richtung: Wenn $f : V \to U$ ein Isomorphismus ist, dann gilt $\dim V = \dim U$. **Frage:** Wie können wir aus einer Basis von V eine Basis von U erhalten?

Idee: Die Bilder der Basisvektoren unter f bilden eine Basis von U. Dazu müssen wir sowohl lineare Unabhängigkeit als auch die Erzeugendeneigenschaft nachweisen.

Satz 11: Bilder einer Basis sind unabhängig

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f : V \to U$ ein Isomorphismus. Angenommen, $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Wegen der Linearität gilt

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Da f injektiv ist und $f(\vec{0}) = \vec{0}$, folgt

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}.$$

Die Unabhängigkeit der v_i liefert $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Satz 11: Bilder einer Basis erzeugen den Raum

Wir zeigen, dass jedes $u \in U$ eine Linearkombination der $f(v_i)$ ist. Aus der Surjektivität gibt es $v \in V$ mit $f(v) = u$. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis ist, gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Daraus folgt

$$u = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Die $f(v_i)$ bilden also eine Basis von U. Somit $\dim U = n = \dim V$.

Satz 11': Die Koordinatenabbildung

Sei dim $V = n$ und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis. Wir betrachten

$$C_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad C_B\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Frage: Welche drei Eigenschaften braucht C_B, damit es ein Isomorphismus ist?
Antwort: Linearität, Injektivität und Surjektivität. Die Linearität haben wir bereits in Lemma 10 gezeigt.

Satz 11': Koordinaten sind eindeutig

Injektivität. Wenn $C_B(v) = C_B(w)$, haben v und w dieselben Koordinaten. Daher $v = w$. **Surjektivität.** Zu jedem Tupel

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gehört der Vektor $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Es gilt $C_B(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$. Also ist C_B ein Isomorphismus. Damit ist Satz

11' bewiesen.

Lemma 15: Bilder der Basisvektoren vorgeben

Lemma 15. Seien V und U Vektorräume, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $u_1, \ldots, u_n \in U$ beliebige Vektoren. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to U$ mit

$$f(v_i) = u_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Frage: Wie muss f auf einem beliebigen Vektor $v = \sum_i \lambda_i v_i$ aussehen?

$$\boxed{f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.}$$

Lemma 15: Konkretes Beispiel in $\mathbb{R}^3$

Sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Wir geben die Bilder vor:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Frage: Welchen Wert muss f an einem beliebigen Vektor $(x, y, z)^T$ annehmen?
Wegen der Linearität ist

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3).$$

Lemma 15: Die Formel für das Beispiel

Damit folgt

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}.$$

Diese Formel definiert tatsächlich eine lineare Abbildung. Keine andere lineare Abbildung kann die drei vorgegebenen Bilder der Standardbasis haben.

Lemma 15: Existenz der Abbildung

Jeder Vektor $v \in V$ hat eindeutige Koordinaten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezüglich B. Wir definieren

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Dies ist wohldefiniert, denn die Koordinaten sind eindeutig. Für $v = v_j$ ist $\lambda_j = 1$ und alle übrigen Koeffizienten sind null, also $f(v_j) = u_j$.

Lemma 15: Warum ist f linear?

Seien $v = \sum_i \lambda_i v_i$ und $w = \sum_i \mu_i v_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(v+w) &= \sum_i (\lambda_i + \mu_i) u_i \\ &= \sum_i \lambda_i u_i + \sum_i \mu_i u_i = f(v) + f(w). \end{aligned}$$

Für $c \in \mathbb{R}$ gilt ebenso

$$f(cv) = \sum_i (c\lambda_i) u_i = c \sum_i \lambda_i u_i = cf(v).$$

Damit ist f linear.

Lemma 15: Beweis der Eindeutigkeit

Sei $g : V \to U$ eine weitere lineare Abbildung mit $g(v_i) = u_i$. **Frage:**

Können f und g auf anderen Vektoren unterschiedliche Werte annehmen?
Nein: Für $v = \sum_i \lambda_i v_i$ gilt

$$g(v) = \sum_i \lambda_i g(v_i) = \sum_i \lambda_i u_i = f(v).$$

Da dies für jedes $v \in V$ gilt, ist $g = f$. Lemma 15 ist bewiesen.

Satz 11: Die umgekehrte Richtung

Seien V und U zwei Vektorräume derselben endlichen Dimension n. Wir wählen Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(u_1, \ldots, u_n)$. Nach Lemma 15 gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to U$ mit $f(v_i) = u_i$. **Frage:** Warum ist f bijektiv?

Die Abbildung überträgt die eindeutigen Koordinaten bezüglich der ersten Basis auf dieselben Koordinaten bezüglich der zweiten Basis.

Satz 11: Injektivität und Surjektivität

Für $v = \sum_i \lambda_i v_i$ gilt $f(v) = \sum_i \lambda_i u_i$. **Injektivität:** Ist $f(v) = \vec{0}$, dann sind alle $\lambda_i = 0$, weil die u_i unabhängig sind. Also $v = \vec{0}$ und f ist injektiv (Lemma 11). **Surjektivität:** Jedes $u \in U$ hat eine Darstellung $u = \sum_i \lambda_i u_i = f(\sum_i \lambda_i v_i)$. Damit ist f ein Isomorphismus und Satz 11 vollständig bewiesen.

Beispiel und Bedeutung des Hauptsatzes

Die geometrische Ebene mit festem Ursprung ist ein zweidimensionaler reeller Vektorraum. Die Wahl eines Basis-Tupels liefert einen

Isomorphismus mit $\mathbb{R}^2$. Das bedeutet nicht, dass die beiden Räume

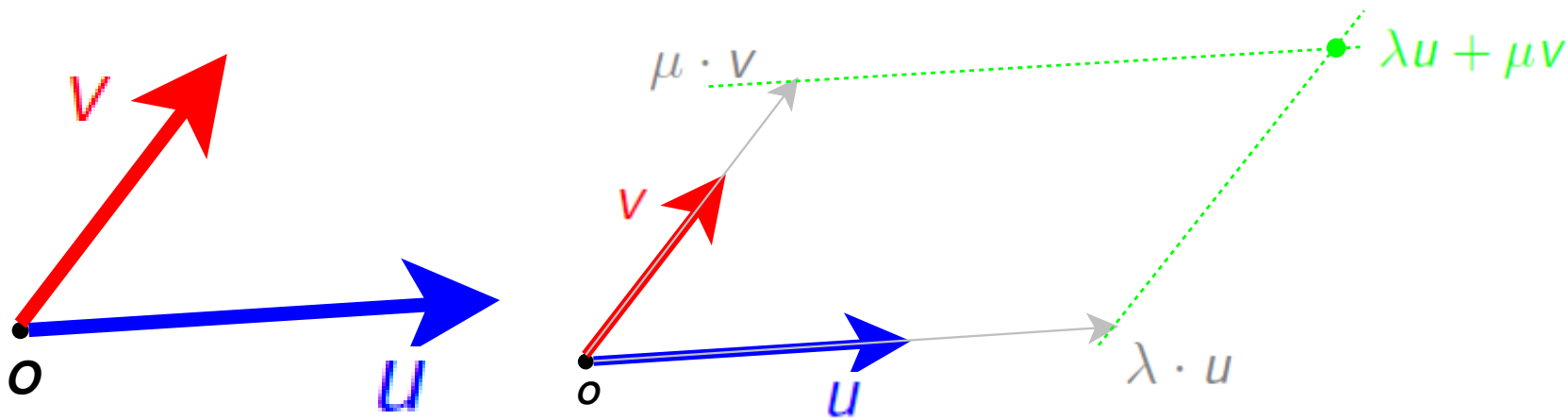
buchstäblich dieselben Elemente enthalten, sondern dass ihre Vektorraumoperationen vollständig übereinstimmen, wenn man die Elemente durch den Isomorphismus identifiziert.

Ein geometrisches Beispiel: Die Ebene

Sind u, v zwei nicht parallele Vektoren der geometrischen Ebene, so ist (u, v) eine Basis. Die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V, \qquad F\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \lambda u + \mu v$$

ist nach Satz 11 ein Isomorphismus.



Von geometrischen Modellen zur linearen Algebra

In der Geometrie abstrahieren wir Eigenschaften des Raums und leiten daraus mit logischen Schlüssen weitere Aussagen ab. Die

Vektorraumaxiome sind ein Beispiel dafür: Sie gelten in vielen verschiedenen Modellen.

Empirische Wissenschaft	**Formal-logische Theorie**
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente
Experimente, Beobachtungen Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus Axiomen (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als *Hinweis* auf Beweisführungen
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik
Schule Alltag Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (so genanntes lokales Ordnen)

Satz 12: Die erste Dimensionsformel

Satz 12. Sei $f : V \to U$ linear. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von U.

(b) $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) Falls V endlichdimensional ist, gilt

$$\boxed{\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f).}$$

Satz 12: Fragen vor dem Beweis

Wir wollen Bild und Kern als Untervektorräume nachweisen. **Welche drei Eigenschaften müssen wir jeweils zeigen?**
Nichtleere, Abgeschlossenheit unter Addition und unter Skalarmultiplikation. **Und wie gehen wir bei der Dimensionsformel vor?**
Wir beginnen mit einer Basis des Kerns, ergänzen sie zu einer Basis von V und untersuchen die Bilder der hinzugefügten Basisvektoren.

Satz 12 (a): Das Bild ist ein Untervektorraum

Da $f(\vec{0}) = \vec{0}$, ist $\vec{0} \in \text{Bild}(f)$. Seien $y_1 = f(v_1)$ und $y_2 = f(v_2)$ im Bild.

Dann gilt

$$y_1 + y_2 = f(v_1 + v_2) \in \text{Bild}(f).$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ folgt ebenso

$$cy_1 = f(cv_1) \in \text{Bild}(f).$$

Satz 12 (b): Der Kern ist ein Untervektorraum

Da $f(\vec{0}) = \vec{0}$, ist $\vec{0} \in \text{Kern}(f)$. Seien $v, w \in \text{Kern}(f)$. Dann

$$f(v + w) = f(v) + f(w) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Für $c \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$f(cv) = cf(v) = c\vec{0} = \vec{0}.$$

Also ist der Kern ein Untervektorraum von V.

Satz 12 (c): Basis des Kerns ergänzen

Sei dim $V = n$ und $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von Kern(f). Nach dem Basisergänzungssatz können wir diese zu einer Basis

$$(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

von V ergänzen. **Behauptung:** Die Vektoren

$$f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$$

bilden eine Basis des Bildraums.

Satz 12: Das Bild wird erzeugt

Sei $y = f(v)$ ein beliebiger Vektor des Bildes. Wir schreiben $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Da $f(v_i) = \vec{0}$ für $i \leq k$, folgt

$$y = f(v) = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Die Vektoren $f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n)$ erzeugen daher Bild(f).

Satz 12: Die Bilder sind unabhängig

Angenommen,

$$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Dann liegt $w = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i$ im Kern. Also gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_k$ mit $w = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$. Die Unabhängigkeit der gesamten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ erzwingt $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Satz 12: Abschluss des Beweises

Somit ist $(f(v_{k+1}), \ldots, f(v_n))$ eine Basis des Bildes. Daraus folgt

$$\dim \text{Bild}(f) = n - k, \qquad \dim \text{Kern}(f) = k.$$

Also

$$\boxed{\dim V = \dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f).}$$

Dies ist die erste Dimensionsformel.

Folgerung aus Satz 12: Endomorphismen

Folgerung. Sei V endlichdimensional und $f : V \to V$ linear. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ surjektiv.}$$

Frage: Warum ist die Voraussetzung $V \to V$ wichtig?

Weil Definitions- und Zielraum dieselbe endliche Dimension besitzen.

Folgerung: Surjektiv impliziert injektiv

Angenommen, $f : V \to V$ ist surjektiv und $\dim V = n$. Dann ist $\text{Bild}(f) = V$, also $\dim \text{Bild}(f) = n$. Die Dimensionsformel ergibt

$$n = \dim \text{Kern}(f) + n.$$

Also $\dim \text{Kern}(f) = 0$ und damit $\text{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Nach Lemma 11 ist f injektiv.

Folgerung: Injektiv impliziert surjektiv

Ist $f : V \to V$ injektiv, so ist nach Lemma 11 $\text{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Wegen der Dimensionsformel folgt

$$n = 0 + \dim \text{Bild}(f).$$

Das Bild ist also ein n-dimensionaler Untervektorraum des n-dimensionalen Raums V. Nach dem Basistest aus Satz 10 ist damit $\text{Bild}(f) = V$; also ist f surjektiv.

Woche 5: Was haben wir erreicht?

- Wir haben lineare Abbildungen und ihre wichtigsten Eigenschaften kennengelernt.
- Mit Bild und Kern können wir Injektivität und Surjektivität untersuchen.
- Isomorphe endlichdimensionale Vektorräume haben dieselbe Dimension; umgekehrt sind Räume gleicher Dimension isomorph.
- Lineare Abbildungen werden durch ihre Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt.
- Die Dimensionsformel verbindet $\dim(V)$, $\dim(\text{Bild}\, f)$ und $\dim(\text{Kern}\, f)$.

Nächstes Ziel (Woche 6): Lineare Abbildungen mit Matrizen beschreiben.