Flüsse und Vektorfelder

Def. Ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine glatte (vektorwertige) Abbildung $V : U \to \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Wir werden später die Transformationsgesetze für den Koordinatenwechsel bei Vektorfeldern besprechen.

Def. Ein (lokaler) Fluss ist eine glatte Abbildung

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U' \to U \text{ wobei } U' \subseteq U$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Für jedes $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist die Einschränkung dieser Abbildung auf $\{(t_0, x) \mid x \in U'\}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild. Statt $\Phi(t, x)$ schreiben wir $\Phi_t(x)$.
- Für alle t, s mit $t, s, t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt: $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$.
- $\Phi_0 = \mathrm{Id}$

Bemerkung. Falls das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon) = (-\infty, \infty)$ ist und $U' = U$ gilt, sagen wir, dass der Fluss global ist.

Bsp. Wir betrachten

$$U' = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 4\} \ , \quad U = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$\varepsilon = 1$, und

$$\Phi_t(x) := (x_1 + t, x_2).$$

Bsp. Wenn in obigem Beispiel $U' = U = \mathbb{R}^2$ ist, so ist der Fluss global.

Flüsse vs. Vektorfelder

Plan.

- Wir zeigen, dass ein Fluss ein Vektorfeld generiert.
- Wir zeigen, dass ein Vektorfeld einen Fluss generiert.
- Wir zeigen, dass diese zwei Operationen zueinander invers sind.

Gegeben einen Fluss, wie konstruiert man ein Vektorfeld?

Ganz einfach: In jedem Punkt x betrachten wir die Kurve

$$t \mapsto \Phi_t(x).$$

Für $t = 0$ ist $\Phi_0(x) = x$, d.h. diese Kurve durchläuft in $t = 0$ den Punkt x.
Der Geschwindigkeitsvektor $\frac{d}{dt}\Phi_t(x)_{|t=0}$ dieser Kurve ist ein Vektor und die Abbildung $x \mapsto \frac{d}{dt}\Phi_t(x)_{|t=0}$ ist ein Vektorfeld.

Gegeben ein Vektorfeld, wie konstruiert man einen Fluss?

Sei $U' \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass der Abschluss von U' in U kompakt ist. Sei V ein Vektorfeld auf U. Wir definieren dann den Fluss (von) V wie folgt: Für jedes $x \in U'$ betrachten wir die Gew. Differentialgleichung (GDG)

$$\dot{x} = V(x(t)). \qquad (*)$$

Dies ist ein System von n Differentialgleichungen auf n unbekannten Funktionen $x_1, ..., x_n$ von t.

Bsp. Sei $n = 2$ und $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $(*)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1 \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{cases}.$$

Bsp. Sei $n = 2$ und $V(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Dann ist $(*)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Für jedes $x \in U'$ betrachten wir die GDG

$$\dot{x} = V(x(t)). \qquad (*)$$

Geometrische Beschreibung von Lösungen dieser GDG: Jede Lösung $x(t)$ ist eine Kurve, deren Geschwindigkeitsvektor $\dot{x}(t)$ für jedes t mit dem Vektor $V(x(t))$ übereinstimmt.

Bemerkung. Dieses System von GDG ist in Euler-Form.

Bekannter Satz aus der Theorie der Gew. Differentialgleichungen ($\sim$ Peano, Picard-Lindelöf). Für jedes t_0 und Anfangsbedingungen $x_0 \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und genau eine Lösung $x : (-\varepsilon + t_0, \varepsilon + t_0) \to U$ mit $x(t_0) = x_0$.

Bekannter Satz aus der Theorie von Gew. Differentialgleichungen in geometrischer Sprache. Für jedes t_0 und Anfangsbedingungen $x_0 \in U$ existiert (genau) eine Kurve $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, sodass in jedem Punkt $x(t)$ der Geschwindigkeitsvektor mit dem Vektor $V(x(t))$ übereinstimmt und die Kurve durch x_0 läuft.

Bemerkung. Es ist klar, dass für $\varepsilon' < \varepsilon$ und alle t_0, t_0' die Beschränkung der Lösung $x : (-\varepsilon + t_0, \varepsilon + t_0) \to U$ auf das Intervall $(-\varepsilon' + t_0, \varepsilon' + t_0)$ auch eine (eindeutige) Lösung ist, jedoch auf dem Intervall $(-\varepsilon', \varepsilon')$ definiert. Es ist auch klar und folgt aus der Kettenregel für die Verkettung der Abbildungen $x(t)$ und $T(t) := t - t_0 + t_0'$, für jede Lösung $x(t)$ auf dem Intervall $(-\varepsilon + t_0, \varepsilon + t_0)$, dass die Abbildung $x \circ T : (-\varepsilon + t_0', \varepsilon + t_0') \to U$ auch eine Lösung ist. Wir definieren, für jedes $x_0 \in U$, die Funktion

$$\varepsilon_{\mathsf{max}}(x_0) := \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exists\, x(t), \text{ sodass } x(t) \text{ eine Lösung mit } x(0) = x \}.$$

$\varepsilon_{\mathsf{max}}$ ist eine Funktion auf U, die auch unendliche Werte annehmen kann.

Aus der Theorie der GDG folgt, dass die Funktion $\varepsilon_{\mathsf{max}}$ stetig ist. Da nach unseren Voraussetzungen der Abschluss von U' in U kompakt ist, nimmt die Funktion $\varepsilon_{\mathsf{max}}$ ihr Minimum auf dem Abschluss von U' in U an, und da die Funktion $\varepsilon_{\mathsf{max}}$ positiv ist, ist ihr Minimum auch positiv, also existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $x_0 \in U'$ eine Lösung $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ mit $x(0) = x_0$ existiert.

Konstruktion von Φ_t: Wir definieren $\Phi_t(x_0) := x(t)$, wobei $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ die Lösung ist mit $x(0) = x_0$.

Das auf der vorherigen Seite konstruierte Φ ist ein Fluss

1. Φ ist glatt.
2. Für jedes $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $\Phi_{t_0} : U' \to U$ ein Diffeomorphismus auf das Bild.
3. Für alle t, s mit $t, s, t+s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt: $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$.
4. $\Phi_0 = \mathrm{Id}$

Beweis. (1) Glattheit von Φ folgt aus der Theorie der GDG: die Lösungen von GDG in Euler-Form hängen glatt von den Anfangsbedingungen (also von x) und von t ab. $\square$

(4) $\Phi_0 = \mathrm{Id}$ nach Konstruktion: $\Phi_0(x_0) = x(0) = x_0$. $\square$

(3) Wir nehmen an das $t_0 > 0$ und $s > 0$, die Behandlung der anderen Fälle ist analog. Wir betrachten $x(t)$ mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = V(x(t))$. $\Phi_{t_0}(x_0)$ ist dann $x(t_0)$. Jetzt betrachten wir die Kurve $x(t + t_0)$. Wegen der Kettenregel erfüllt sie $\dot{x}(t + t_0) = V(x(t + t_0))$. Offensichtlich ist $x(0 + t_0) = x(t_0) = \Phi_{t_0}(x_0)$. Also ist $(\Phi_s(\Phi_{t_0}(x_0)) = x(s + t_0)$. Aber nach Definition ist $x(s + t_0) = \Phi(s + t_0)$ $\square$

(2) Die Abbildung $\Phi_{t_0} : U' \to U$ ist, wie oben bewiesen, glatt. Um zu zeigen, dass sie ein Diffeomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass sie eine glatte inverse Abbildung besitzt. Die Abbildung Φ_{-t_0} ist die inverse Abbildung, wegen $\Phi_{-t_0} \circ \Phi_{t_0} = \Phi_{-t_0+t_0} = \Phi_0 = \mathrm{Id}$ und analog für $\Phi_{t_0} \circ \Phi_{-t_0} = \mathrm{Id}$ $\square$

Die beiden Konstruktionen, Vektorfeld $\to$ Fluss und Fluss $\to$ Vektorfeld, sind zueinander invers.

Sei x_0 ein beliebiger Punkt von U'.
Die Lösung $x(t)$ aus der Konstruktion des Flusses erfüllt $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(t) = V(x(t))$. Nach Definition ist $\Phi_t(x_0) = x(t)$.
Deswegen ist $\frac{d}{dt}\Phi_t(x_0)_{|t=0} = \dot{x}(0) = V(x_0)$.

Wozu: Hamiltonsche Flüsse

Wir betrachten die Hamiltonschen Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,p,t)}{\partial p}\ ,\quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x,p,t)}{\partial x}.$$

Wir sehen, dass sie Gleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = V(x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x,p,t)}{\partial p} \\ -\frac{\partial H(x,p,t)}{\partial x} \end{pmatrix}$$

sind.

Physikalische Sprache: Das Vektorfeld $V = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(x,p,t)}{\partial p} \\ -\frac{\partial H(x,p,t)}{\partial x} \end{pmatrix}$ heißt Hamiltonsches Vektorfeld und sein Fluss heißt Phasenfluss.

Bemerkung. In den Flüssgleichungen $\dot{x} = V$ auf der vorherigen Folien hängte das Vektorfeld V nicht vom t ab. Im Phasenfluss ist es der Fall nur wenn H nicht vom t abhängt, also wenn das system autonom ist. Wir werden in den Beispielen haupsächlich nur mit solchen Systemen arbeiten. Allerdings kann man den Begriff Flüss auch für nichtautonomen Vektorfelder und Hamiltonsche Systemen veralgemenern; und die Volum- und symplektische-Struktur-Erhaltungsätze bleiben auch im nichtautonomen Fall richtig.

Verhalten von Vektorfeldern unter Diffeomorphismen (= unter Koordinatenwechseln)

Def. Sei $\phi : U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus. Sei V ein Vektorfeld auf U_1. Wir definieren den Pushforward des Vektorfeldes V als das Vektorfeld $\phi_* V$ auf U_2 durch die folgender Bedingung:

$$\phi_* V(x) = d_{\phi^{-1}(x)}\phi(V(\phi^{-1}(y))).$$

Satz 9. Sei $\phi : U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus und V ein Vektorfeld auf U_2. Sei $U_1' \subseteq U$ mit kompakten Abschluss und $U_2' := \phi(U_1')$. Die Flüsse von V und $\phi_* V$ bezeichne man mit Φ_t^V und $\Phi_t^{\phi_* V}$.
Es gilt (für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$):

$$\phi \circ \Phi_t^V = \Phi_t^{\phi_* V} \circ \phi.$$

Bemerkung. Vergleichen Sie bitte die Aussage mit Satz 3 (über Koordinatenunabhängigkeit der Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen).

Satz 9.

$$\phi \circ \Phi_t^V = \Phi_t^{\phi_* V} \circ \phi.$$

Beweis. Nach Konstruktion ist $\Phi_{t_0}(x_0) = x(t_0)$, wobei $x(t)$ die Lösung der GDG $\dot{x}(t) = V(x(t))$ mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ ist. Wir betrachten die Kurve $\phi(x(t))$. Sie hat den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\phi(x(t))} = d_{x(t)}\phi(\dot{x}) = \phi_* V(x(t)), \text{ und } \phi(x(0)) = \phi(x_0)\ .$$

Deswegen ist $\phi(x(t)) = \Phi_t^{\phi_* V}(\phi(x_0))$, woraus

$$\phi(\Phi_t(x_0)) = \Phi_t^{\phi_* V}(\phi(x_0))$$

und damit die Behauptung des Satzes folgt. $\square$

Volumenerhaltende Flüsse

Def. Wir sagen, dass ein Diffeomorphismus $\phi : U_1 \to U_2$ volumenerhaltend ist, wenn für jedes offene beschränkte $T \subseteq U_1$ gilt

$$\text{Volume}(T) = \text{Volume}(\phi(T)).$$

ein Vektorfeld (oder Fluss des Vektorfeldes) volumenerhaltend ist, wenn Φ_t für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ volumenerhaltend ist.

Bemerkung. Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$, sodass der Begriff des Volumens klar ist:

$$\text{Volume}(T) = \int_T 1 dx_1 ... dx_n.$$

Fortgeschrittene Themen wie etwa Volumenform, Verhalten der Volumenform unter Diffeomorphismen u.s.w. werden wir zunächst nicht behandeln. Sie kommen erst später.

Satz 10 (Liouville). Der Fluss von V ist genau dann volumenerhaltend, wenn seine Divergenz

$$\tfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + ... + \tfrac{\partial V_n}{\partial x_n}$$

identisch Null ist.

Satz 10. Der Fluss von V ist genau dann volumenerhaltend, wenn seine Divergenz

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}$$

identisch Null ist.

Folgerung. Der Hamiltonsche Fluss (auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten (x, p)) ist volumenerhaltend.

Beweis. Wir rechnen die Divergenz aus: Die Koordinaten sind $(x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n)$ und die Divergenz lautet damit:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_{n+1}}{\partial p_1} + ... + \frac{\partial V_{2n}}{\partial p_n}. \qquad (*)$$

Das Hamiltonsche Vektorfeld V hat die Einträge

$$V_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., V_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, V_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., V_{2n} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}.$$

Wir setzten dies in $(*)$ ein und bekommen 0 wegen $\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i}$.