Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 01 14.04.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Geraden sind die Kürzesten**

   Zeigen Sie, dass die Gerade
   $$g : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (t,0),$$
   die kürzeste (rektifizierbare) Kurve von $(a,0)$ nach $(b,0)$ ist:

   Hinweis:

   (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Länge die Gleichung $L(g) = b-a$.

   (b) Ist $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine rektifizierbare Kurve mit $c(a) = (a,0)$ und $c(b) = (b,0)$, aber $c(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus [a,b] \times \{0\}$ für ein $t \in [a,b]$, so ist $L(c) > b-a$.

2. **Nicht-rektifizierbare Kurve**

   Es sei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) = \left(t, t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ für $t \in (0,1]$ und $c(0) = 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass c stetig ist.

   (b) Skizzieren Sie Bild(c) und zeigen Sie $\left|c\left(\frac{1}{k\pi}\right) - c\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right)\right| \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Folgern Sie, dass c nicht rektifizierbar ist.

3. **Logarithmische Spirale**

   Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definitert durch $c(t) := (\exp(t)\cos(t), \exp(t)\sin(t))$. Berechnen Sie die Länge der Kurve $c_{|[a,b]}$, sowie den Grenzwert $\lim_{a\to-\infty} L(c_{|[a,0]})$. Skizzieren Sie Bild$(c)$.

4. **Krümmung von Geraden und Kreisen**

   Parametrisieren Sie die Gerade und die Kreislinie
   $$g : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (\alpha_1 t + \beta_1, \alpha_2 t + \beta_2)$$
   $$c : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$$
   nach Bogenlänge, und berechnen Sie die Krümmung.

Abgabe: Dienstag, 19.04.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`

Übungsgruppen:

- Dienstag 16-18 SR 318 (Erster Termin: 19.04.2005)
- Mittwoch 16-18 SR 318 (Erster Termin: 20.04.2005)