Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 02 — 21.04.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Die Traktrix**

   Sei $c\colon (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \Big(\sin(t), \cos(t) + \ln\big(\tan(\frac{t}{2})\big)\Big)$, die *Traktrix.* Zeigen Sie: Die Länge des Segments der Tangente von c zwischen ihrem Berührpunkt und der y-Achse ist konstant 1. Skizzieren Sie Bild(c).

   (Die Tangente (oder die Tangentengerade) mit Berührpunkt $c(t_0)$ ist die Gerade

   $$\{c(t_0) + \lambda c'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2)$$

2. **Parallelkurven**

   Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve mit Krümmung $k(t)$. Betrachten Sie die Parallelkurve c_s. Zeigen Sie, dass die Krümmung k_s der Parallelkurve c_s gleich

   $$\frac{k(t)}{1 - sk(t)}$$

   ist.

3. **Charakterisierung von Kreislinien**

   Sei $p \in \mathbb{R}^2$. Sei c eine reguläre ebene Kurve derart, dass alle Normalen, d.h. alle Geraden

   $$\{c(t_0) + \lambda \cdot n(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

   durch p gehen. Zeigen Sie: c verläuft auf einer Kreislinie.

   Hinweis: Besonders einfach wird der Beweis bei Verwendung von Polarkoordinaten

4. **Krümmung unter linearen Abbildungen**

   Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve mit Krümmung $k(t)$. Wie ändert sich die Krümmung unter einer linearen Abbildung $A \in GL(2)$, d.h. was ist die Krümmung k_A der Kurve Ac? Für welche A bleibt sie unverändert?

   Hinweis: Benutzen Sie Satz 3 aus der Vorlesung

Abgabe: Dienstag, 26.04.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`