Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 03 28.04.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Die Ellipse**

   Die Kurve $c(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, $a \geq b > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ heist **Ellipse**. Die Punkte $F_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ sind ihre Brennpunkte.

   (a) Zeigen Sie, dass die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist, und zwar $|c(t) - F_+| + |c(t) - F_-| = 2a$.
   (Hierauf beruht die sogenannte Gärtnerkonstruktion, die eine Ellipse durch einen Faden mit Endpunkten $F_\pm$ erzeugt.)

   (b) Rechnen Sie nach, dass die Winkel zwischen Kurventangente und Brennstrahlen gleich sind, d.h. $\angle(c(t) - F_+, -c'(t)) = \angle(c(t) - F_-, c'(t))$. Daher werden von F_+ ausgehende Lichtstrahlen an der Ellipse nach F_- reflektiert. Spiegelt man F_- an allen Tangenten, so erhält man einen Kreis vom Radius $2a$, den Leitkreis.

   (c) Zeigen Sie, dass der kleinste Schmiegkreis der Ellipse innerhalb, der größte außerhalb der Menge $\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ liegt.

   (d) Berechnen Sie die Krümmungsfunktion und zeigen Sie, dass sie genau 4 Extrema hat.

2. **Die Zykloide**

   Eine Kreisscheibe von Radius 1 in der x, y Ebene rollt gleichmäßig auf der x-Achse entlang. Die durch einen Punkt auf dem Umfand der Kreisscheibe beschriebene Kurve heißt **Zykloide**.

   (a) Finden Sie eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, deren Bild die Zykloide ist, und bestimmen Sie ihre Punkte mit $c' = 0$. Machen Sie eine Skizze.

   (b) Zeigen Sie, dass die Evolute der Zykloide eine verschobene und umparametrisierte Zykloide ist (und kontrollieren Sie Ihre Rechnung an einer Skizze).

3. **Reguläre Kurven versus glatte Kurven**

   Betrachten Sie die Kurve $c(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$. Zeigen Sie:

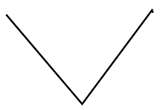

Abbildung 1: Die Kurve $c(t) = (t, |t|)$

   (a) Man kann die Kurve nicht umparametrisieren, so dass sie regulär wird.
   (Hinweis: Betrachten Sie die Tailorentwicklung im Punkt 0).

   (b) Finden Sie eine Umparametrisierung $\varphi(t)$, so dass $c \circ \varphi \in C^2([1, 1], \mathbb{R}^2)$ ist.

4. **Eilinie**

Eine reguläre geschlossene convexe Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit $k(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ heißt **Eilinie**. Zeigen Sie: Eine Eilinie besitz zu jedem Einheitsvektor v_0 genau ein t mit $n(t) = v_0$.

Abgabe: Dienstag, 10.05.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`