Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 04 12.05.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Tailorentwicklung für Raumkurven**

   Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, $t_0 \in [a,b]$. Sei $\kappa(t_0) \neq 0$. O.B.d.A. sei das Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ so gewählt, daß $c(t_0) = (0,0,0)$, $c'(t_0) = (1,0,0)$, $n(t_0) = (0,1,0)$ und $b(t_0) = (0,0,1)$. Wir schreiben bzgl. dieses Koordinatensystems $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Zeigen sie:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - t_0 - \frac{\kappa(t_0)^2}{6}(t-t_0)^3 + O((t-t_0)^4), \\ y(t) &= \frac{\kappa(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \frac{\kappa'(t_0)}{6}(t-t_0)^3 + O((t-t_0)^4), \\ z(t) &= \frac{\kappa(t_0)\tau(t_0)}{6}(t-t_0)^3 + O((t-t_0)^4). \end{aligned}$$

2. **Schmiegeebene**

   Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve, $t_0 \in [a,b]$. Sei $\kappa(t_0) \neq 0$. Zeigen sie:

   (a) Für hinreichend kleines $h > 0$ liegen $c(t_0)$, $c(t_0 - h)$ und $c(t_0 + h)$ nicht auf einer Geraden.

   (b) Die Ebene E_h, die von $c(t_0)$, $c(t_0 - h)$ und $c(t_0 + h)$ erzeugt wird, konvergiert für $h \to 0$ gegen die **Schmiegeebene** von c in t_0, d.h. gegen die von $c'(t_0)$ und $n(t_0)$ aufgespannte Ebene.

   Hinweis: Sie können Aufgabe 1 verwenden.

3. **Ebene Kurven und verschwindende Torsion**

   Es sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine Frenet-Kurve. Zeigen Sie:

   (a) Ist c **eben**, d. h. in einer Ebene des $\mathbb{R}^3$ enthalten, so gilt $\tau \equiv 0$.

   (b) $b' = -\tau n$

   Hinweis: Berechnen Sie die Skalarprodukte von b' mit c', n, b.

4. Zeigen Sie nun die Umkehrung von (3a).

   Hinweis: Was ist $< b, c >'$?

Abgabe: Dienstag, 24.05.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`