Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 05 26.05.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Der Torus.**
   Sei $T := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 = 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 \}$ der **Torus.** Zeigen Sie, daß T eine reguläre Fläche ist und skizzieren Sie den Torus.

2. **Der Zylinder und der Torus als parametrisierte Flächen.**
   Sei $Z := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1 \}$ der **Zylinder**.
   (a) Geben Sie Immersionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ an, die als Bild den Zylinder bzw. den Torus haben.
   (b) Finden Sie eine surjektive stetige Abbildung $F\colon Z \to T$.

3,4. **Wahr oder falsch?**
   Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Geben Sie dazu eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.
   (a) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Dann ist $S \cap V \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.
   (b) Seien S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Dann ist $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.
   (c) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. Für alle $p \in S$ gebe es ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p \in V$, so daß $S \cap V$ eine reguläre Fläche ist. Dann ist auch S eine reguläre Fläche.
   (d) Seien S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakte reguläre Flächen mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Dann ist $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche.
   (e) Der Kegel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} = z\}$ ist eine reguläre Fläche.
   (f) Der Kegel ohne die Spitze $K \setminus \{(0,0,0)\}$ ist eine reguläre Fläche.

Abgabe: Donnerstag, 02.06.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`

Anweseheitsaufgaben am 31.05.2005

Quadriken.

Betrachten Sie für $a, b, c > 0$ die folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

(a) Ellipsoid: $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1\right\}$,

(b) einschaliges Hyperboloid: $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 1\right\}$,

(c) zweischaliges Hyperboloid: $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = -1\right\}$,

(d) elliptisches Paraboloid: $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z\right\}$,

(e) hyperbolisches Paraboloid: $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = z\right\}$.

Skizzieren Sie diese Mengen, und stellen Sie möglichst "große" Teilmengen als parametrisierte Fläche dar.