Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 06 02.06.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Ketten- und Wendelfläche (Katenoid und Helikoid) sind lokal isometrisch.**

   Skizzieren Sie die folgenden Flächen und berechnen Sie die erste Fundamentalform und die Weingartenabbildung:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= (\cosh x\ \cos y, \cosh x\ \sin y, x)\ , \\ f_2(x,y) &= (\sinh x\ \cos y, \sinh x\ \sin y, y)\ . \end{aligned}$$

   Zeigen Sie: Beide Flächen sind lokal isometrisch (d.h. sie haben dieselbe erste Fundamentalform.)

2. **Die erste Fundamentalform der Sphäre.**

   Betrachten Sie die folgenden zwei (lokalen) Parametrisierungen der Sphäre:

   (a) Stereographische Projektion: $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}\,(2x, 2y, x^2+y^2-1)$.

   (b) Sphärische Koordinaten: $f(\theta,\varphi) = (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))$.

   Berechnen Sie die erste Fundamentalform.

3,4 **Der Zylinder, die Ebene und der Kegel sind lokal isometrisch.**

   Betrachten Sie

   (a) den Zylinder $Z := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 = 1 \right\}$ (aus Blatt 5, Aufgabe 2,)

   (b) den Kegel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ \sqrt{x^2+y^2} = z\}$ (aus Blatt 5, Aufgaben 3,4) und

   (c) die Ebene $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : z = 0 \right\}$

   Wählen Sie irgendeine Parametrisierung für jede Fläche, und berechnen Sie die erste Fundamentalform, die Weingartenabbildung, die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen. Zeigen Sie: alle drei Flächen sind lokal isometrisch (d.h. für geeignete Parametrisierungen sind die erste Fundamentalformen gleich.)

Abgabe: Donnerstag, 09.06.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`