Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 07 09.06.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. **Kegel über einer Kurve**

   Sei $c : [a, b] \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre einfach geschlossene Kurve, wobei S^2 die Sphäre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\bigcup_{\substack{w \in \mathrm{Bild}_c([a,b]) \\ r > 0}} rw$$

   eine reguläre eingebettete Fläche ist. Skizzieren Sie die Fläche, berechnen Sie die erste Fundamentalform und und zeigen Sie, dass die Fläche zu der Ebene lokal isometrisch ist.

2. **Loxodrome**

   Ein Schiff fährt mit konstantem Kurs auf einem Ozean ($= S^2$) in nordöstlicher Richtung. Berechnen Sie und skizzieren Sie seine Bahnkurve (=Loxodrome). Welche Distanz kann man auf solch einer Kurve höchstens zurücklegen?

   Hinweis:

   - Konstanter Kurs bedeutet, dass die Bahnkurve zu den Längenkreisen konstanten Winkel hat.
   - Benutzen Sie sphärische Koordinaten und die erste Fundamentalform aus Aufgabe 2b, Blatt 6.

3. **Flächeninhalt des Torus**

   Berechne den Flächeninhalt des Torus aus Aufgabe 1, Blatt 5.

   Hinweis: Benutzen Sie die Parametrisierung aus Aufgabe 2, Blatt 5

4. **Gauß-Krümmung des Graphs einer Funktion**

   Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Sei $M := \{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in U \}$ der Graph von f. Leiten Sie die folgende Formel für die Gauß-Krümmung von M her:

$$K = \frac{\det(\mathrm{Hess})}{\left(1 + \mathrm{grad} f^2\right)^2} \qquad ,$$

   wobei Hess die folgende (2×2) Matrix ist:

$$\mathrm{Hess}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Abgabe: Donnerstag, 16.06.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`