Übungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie" im Sommersemester 2005 bei PD Dr. V. Matveev

Blatt 09 23.06.2005

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt.

1. Zeigen Sie: Es gibt kein Flächenstück $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$ so dass die erste und die zweite Fundamentalformen durch die folgenden Matrizen gegeben sind:

   (a) $g_{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h_{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (b) $g_{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h_{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   HINWEIS: Benutzen Sie Gauß-Gleichungen

2. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein *isothermes* Flächenstück, d.h., es gibt eine Funktion $u\colon U \to \mathbb{R}$, so daß $g_x(\cdot,\cdot) = e^{2u(x)} \langle \cdot,\cdot \rangle$ für alle $x \in U$.

   (a) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole von f in Termen von u und du (d.h., als Funktionen von u und $\frac{\partial u}{\partial x_i}$).

   (b) Zeigen Sie, daß die Gauß-Krümmung gegeben wird durch
   $$K(x) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) \right) e^{-2u(x)} \ .$$

   (c) Benutzen Sie 2b um zu beweisen, dass die Gauß-Krümmung der Ebene gleich Null ist, und dass die Gauß-Krümmung der Sphäre gleich 1 ist.

   HINWEIS: Benutzen Sie die erste Fundamentalform der Sphäre aus Aufgabe 2a von Blatt 6

3. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole für die Sphäre in sphärischen Koordinaten (HINWEIS: Benutzen Sie die erste Fundamentalform der Sphäre aus Aufgabe 2b von Blatt 6), und beweisen Sie mit Hilfe von Differentialgleichung der Geodätischen (Satz 15), dass die Grosskreise die Geodätische sind.

Abgabe: Donnerstag, 30.06.2005, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihr Blatt

Internet: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/difgeo/ElementareDiffgeo/`