

Mathematik für Business Administration

Übungsaufgaben

Serie 3: Gleichungen, Binomische Formeln, Ungleichungen

1. Stellen Sie die gegebenen Formeln um:

- a) $yy_0 = p(x + x_0)$ nach y und x b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ nach x
c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nach h und r d) $A_0 = 2(ab + ac + bc)$ nach a und b
e) $b_n = b_0(1 + \frac{p}{100})^n$ nach b_0, p und n f) $s = \frac{a}{1 - q}$ nach q
g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nach x h) $xx_0 + yy_0 = r^2$ nach x
i) $A \cdot B^{(C \cdot \lg D + E)} = F$ nach A, B, C, D und E .

2. Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf:

- a) $3x = 1 + x\sqrt{3}$ b) $mx + nx = a$ c) $9x - (24 - 5x) = x - (2x - 6)$
d) $2x^2 - 2x = 4$ e) $x^2 - x + 1 = 0$ f) $(7 + x)(9 - x) + (7 - x)(9 + x) = 76$
g) $-2x^4 + 10x^2 - 8 = 0$ h) $x^9 - 2x^8 - 8x^7 = 0$ i) $45x^3 + 15x^2 - 30x = 0$
j) $x^3 + 8 = 0$ k) $\frac{10}{x+2} = \frac{6}{x}$ l) $\frac{1}{x} = \frac{3x}{4} - \frac{2}{x}$ m) $\frac{16}{x-2} = \frac{10}{x} + 1$.

3. Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen:

- a) $7\sqrt{3x} - 1 = 5\sqrt{3x} + 5$ b) $3\sqrt{3x - 5} - 2 = 2\sqrt{3x - 5} + 2$
c) $a\sqrt{bx + c} - d\sqrt{ex + f} = 0$ d) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$
e) $\lg(\sqrt[3]{2x}) = 0,876$ f) $\lg(2x + 3) - \lg(3x - 2) = 2$ g) $\ln(2x^3) = 5 + \ln 2$
h) $3\lg x - \lg x^2 = 0$ i) $\lg x = \log_2 8$ j) $\frac{3\ln x - \ln x^2}{\ln 3} = 3$
k) $5^x = 20$ l) $12^{\frac{1}{x}} = 4,285$ m) $a^x b^{mx} = c$
n) $|\frac{3}{2}x - 2| = \frac{5}{2}$ o) $|x - 1| + 4x = x^2 + 3$.

4. Geben Sie für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alle Lösungen der folgenden Gleichung für x an:

$$\frac{ax}{b(a-x)} - \frac{bx}{a(a-x)} - \frac{b}{a} = 1.$$

5. Formen Sie durch Ausklammern und Anwenden der binomischen Formeln folgende Summen in Produkte um:

- a) $2u(u+v) - (u-v)(u+v)$ b) $a^2 - b^2 + (a+b)^2$ c) $49x^2 - 81y^2$
d) $169a^2 + 36b^2 + 156ab$ e) $-4x^2 + 12xy - 9y^2$ f) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$.

6. Wenden Sie zur Vereinfachung folgender Ausdrücke die binomischen Formeln an:

- a) $(\sqrt{xy} - 1)(-1 - \sqrt{xy})$ b) $\frac{9a^2 - 2b^2}{3\sqrt{2}a - 2b}$ c) $\frac{s^2 - t^2}{2s^2 + 4st + 2t^2}$.

7. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Kürzen und Zusammenfassen:

- a) $\frac{(n+1)!}{n(n-1)!}$ b) $\frac{n!}{(n+2)!}$ c) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ d) $\frac{100! - 99!}{98!}$.

8. Berechnen Sie:

a) $\binom{49}{6}$ b) $\binom{49}{43}$ c) $\binom{40}{28}$ d) $\binom{40}{29}$ e) $\binom{102}{99}$ f) $\binom{n}{n-1}$.

9. Für welche natürlichen Zahlen k gilt

a) $\binom{k+1}{2} = 78$ b) $\binom{k+2}{k} = 66$?

10. Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \dots + 2x_{20}y_{20}$ b) $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 18^2$
c) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$ d) $2 + 5 + 8 + \dots + 122$
e) $\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 + 4 + \dots + 1024$ f) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{6561}$.

11. Ermitteln Sie den Zahlenwert folgender Summen mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot 5^k \cdot (-4)^{6-k}$ b) $\sum_{k=1}^5 \binom{5}{k} \cdot 4^k \cdot (-2)^{5-k}$.

12. Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen :

a) $\frac{21+x}{2x} + 1 < 5$ b) $\frac{2x-1}{x-3} \geq -1$ c) $\frac{3x+2}{x^2+1} < 2$
d) $(x+2)^2 \leq 4$ e) $|x-4| < 6$ f) $|\ln(x+1)| \leq \frac{1}{2}$
g) $e^{x^2-1} \geq 1$ h) $\binom{k+1}{k-1} > \binom{k+11}{k+10}$.

13. Für welche reellen Zahlen sind folgende Ausdrücke jeweils definiert:

a) $A_1(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ b) $A_2(x) = 1 + \sqrt{x+2} + 3^x$
c) $A_3(x) = \frac{\ln(x+10)}{x+x^4}$ d) $A_4(x) = \frac{90}{1+e^{-2x+1}}$
e) $A_5(x) = \sqrt{(2x+3)(2x-5)}$.

14. Die Produktion von x Einheiten eines Artikels verursacht Kosten in Höhe von $5000 + 2x + x^2$. Für welche produzierte Menge $x > 0$ betragen die Kosten 15200?

15. Ein Anbieter einer Ware erzielt auf dem Markt einen Umsatz von $200p - 2p^3$, wobei p den Preis dieser Ware beschreibt. Für welche Preise beträgt der Umsatz Null? Erklären Sie die Ergebnisse aus betriebswirtschaftlicher Sicht.

16. Der mit dem Verkauf eines Artikels auf einer Messe erzielbare Tagesumsatz werde durch den Term $100p - 25p^2$ beschrieben (p – Verkaufspreis eines Artikels in €). Für welchen Preis p wird ein Tagesumsatz von mehr als 75 € erzielt?