

## Mathematik für Business Administration

### Übungsaufgaben

#### Serie 4: Folgen, Finanzmathematik, Grenzwerte

- Bestimmen Sie für die nachstehenden Zahlenfolgen jeweils das allgemeine Glied  $a_n$  und entscheiden Sie, ob die Folgen arithmetisch oder geometrisch sind:
  - $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$
  - $1, 4, 7, 10, 13, \dots$
  - $8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$
  - $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots$
  - $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{9}, \frac{5}{64}, -\frac{6}{625}, \dots$
  - $4; 2, 5; 1; -0, 5; -2; \dots$
- Von einer arithmetischen Zahlenfolge  $\{a_n\}$  seien  $a_3 = 3$  und  $a_8 = 18$  bekannt. Berechnen Sie  $a_1$  sowie die Summe der ersten 100 Glieder dieser Folge.
- Von einer geometrischen Zahlenfolge  $\{a_n\}$  seien  $a_2 = 2,2$  und  $a_7 = 70,4$  bekannt. Berechnen Sie  $a_{10}$  sowie die Summe der ersten 12 Glieder dieser Folge.
- Von einer Zahlenfolge  $\{a_n\}$  seien  $a_2 = 2,8$ ,  $a_5 = 7,3$  und  $s_{10} = a_1 + \dots + a_{10} = 90,8$  bekannt. Untersuchen Sie, ob  $\{a_n\}$  eine arithmetische Folge ist.
- Einem Kind wird bei seiner Geburt ein Geldbetrag von 500 € geschenkt, der vom Sparkonto erst bei Vollendung des 18. Lebensjahres abgehoben werden darf. Auf welchen Betrag wächst das Geschenk bei 7% Verzinsung an?
- Welcher Betrag muß angelegt werden, damit dieser in 10 Jahren bei 5% jährlicher Verzinsung auf 5000 € anwächst?
- Kann sich ein Kapital bei 4%iger Verzinsung in 20 Jahren verdoppeln oder ist das nicht möglich?
- Wieviele Jahre muß man einen Betrag von 4000 € auf der Bank belassen, damit er bei 6% Verzinsung auf 7500 € anwächst?
- Zu welchem Zinssatz müßte man sein Geld anlegen können, wenn ein erst in 4 Jahren fälliger Betrag von 2500 € durch eine sofortige Zahlung von 1800 € beglichen werden soll und man dabei keinen Verlust erleiden will?
- Herr Glücklich hat in der Lotterie eine lebenslange vorschüssige Rente über 12 000 € jährlich gewonnen. Welchem "Sofortgewinn" entspricht dies, wenn Herr Glücklich noch 5, 15 bzw. 50 Jahre lebt (Zinssatz 5%)?
- Herr A. schließt zu seinem 50. Geburtstag einen Rentensparplan ab, der ihm im Ruhestand für 10 Jahre seine finanziellen Verhältnisse aufbessern soll. Dazu zahlt er über seine noch verbleibenden 15 Dienstjahre jährlich (vorschüssig) 4000 € ein. Welcher Betrag steht dann Herrn A. 10 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn zusätzlich zu seiner Rente zur Verfügung, wenn man annimmt, daß sein Guthaben während der Sparphase mit 6,5% und während der Rentenphase mit 6% p.a. verzinst wird?
- Für den Kauf eines Motorboots (geplanter Kaufpreis 30 000 €) legt D. jeweils zu Jahresbeginn 3000 € zur Seite. Wie lange muß er bei 7% Verzinsung sparen?

13. Herr K. schließt mit 40 Jahren eine Lebensversicherung über 20 000 € ab, die im Todesfall ohne Gewinnanteile ausbezahlt wird (Verwaltungskosten sollen unberücksichtigt bleiben). Die jährliche nachschüssige Prämie betrage 550 € bei 3%iger Verzinsung.
- Mit welchem Gewinn (Verlust) für die Versicherungsgesellschaft muß man rechnen, wenn Herr K. mit 59 Jahren (bzw. mit 72 Jahren) stirbt?
  - In welchem Alter müßte Herr K. sterben, damit für die Versicherungsgesellschaft weder Verlust noch Gewinn entsteht?
14. Herr E. tilgt einen Hypothekenkredit über 150 000 € mit konstanten jährlichen Zahlungen bei 5% Zinsen.
- Nach wievielen Jahren ist Herr E. schuldenfrei, wenn die jährlichen Zahlungen 18 000 € betragen?
  - Wie lange müßte Herr E. tilgen, wenn er mit seiner Bank eine anfängliche Tilgung von 2% der Anfangsschuld vereinbaren würde? Was würde eine Verdoppelung der anfänglichen Tilgung auf 4% bewirken?
  - Welche Mindestannuität muß Herr E. zahlen, um jemals schuldenfrei zu werden?
15. Frau S. finanziere einen Sportwagen mit einem Annuitätendarlehen über 10 Jahre, der Zins betrage dabei nur 0,4%, die jährliche Annuität 5000 €. Berechnen Sie den Kaufpreis des Wagens.  
Berechnen Sie die Annuitätenhöhe, mit der Frau S. bei gleichem Zins und einem Kaufpreis von 50 000 € nach 6 Jahren schuldenfrei wäre.
16. Eine Schuld über 25 000 € werde mittels zweier Annuitäten über je 20 000 € getilgt, die nach jeweils einem bzw. zwei Jahren gezahlt werden. Berechnen Sie mit Hilfe des Äquivalenzprinzips den dieser Tilgung zugrunde liegenden Zinssatz.
17. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{30}{2^n}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 5n}{5n^2}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 4n - 5}{-2n^2 + 7}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,5^n - 1}{0,5 - 1}$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$
18. In welcher Höhe kann man eine ewige jährliche Rente beziehen, wenn man heute bei 6% Verzinsung 50 000 € anlegt (vorschüssige und nachschüssige Betrachtungsweise)?
19. Welches Stiftungskapital ist erforderlich, um (auf ewige Zeit) am Ende eines jeden Jahres einen Studenten der Betriebswirtschaft an der EAH mit 12 000 € auszeichnen zu können (angenommene Verzinsung: 6,5%)?