Fachbereich Grundlagenwissenschaften
PD Dr. Hartmut Menzer
Wintersemester 2012/2013

Mathematik für Business Administration

Übungsaufgaben
Serie 6: Differentialrechnung und Anwendungen

1. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a)	$y = 7x\sqrt{x}$	b)	$y = \frac{1}{x^7}$	c)	$y = 2x^4 - 2x^2 + 7x - 1$
d)	$y = x^{\frac{1}{5}}$	e)	$y = \sqrt[4]{x^9}$	f)	$y = x^8\sqrt[3]{x}$
g)	$y = 3x^2 \cdot \ln x$	h)	$y = 7 \cdot \sqrt{e^x}$	i)	$y = x \cdot e^{\sqrt{x}}$
j)	$y = e^x \cdot \ln x$	k)	$y = x^2 \cdot e^{-x}$	l)	$y = \frac{2x^3+x}{e^x}$
m)	$y = \sqrt{(\ln x)^3}$	n)	$y = \frac{x-1}{x+1}$	o)	$y = \ln(x^2+1) - (\frac{x+1}{x-1})^2$
p)	$y = \|3x - 4\|$	q)	$y = x^5 + 5^x$	r)	$y = (x+2)^x$

2. Berechnen Sie die 1., 2. und die 3. Ableitung der Funktionen
   a) $y = \frac{9x^2+18x+7}{18x}$ b) $y = \frac{x^2+3x+1}{x^2+4}$ c) $y = \frac{x^4-x^3+1}{x-1}$.

3. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten folgender Kostenfunktionen $K(x)$ und klassifizieren Sie das Wachstum mit Hilfe der 2. Ableitung in progressives und degressives Wachstum:
   a) $K(x) = 200 + 20e^{0.4x}$ b) $K(x) = 0,2x^3 - 6x^2 + 80x + 100$.

4. Untersuchen Sie die Funktion $y = e^{-3x} + 3x$ auf Extremwerte und Wendepunkte. Bestimmen Sie ferner die Bereiche, in denen die Funktion streng monoton fallend bzw. steigend ist.

5. Untersuchen Sie die Funktion $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x - 1$ auf Extremwerte und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion konkav bzw. konvex ist.

6. Für die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 5}{x - 4}$ sind Definitionsbereich, Pole, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und die Asymptote zu bestimmen. Ferner sind die Intervalle zu berechnen, in denen $f(x)$ konvex bzw. monoton wachsend ist.
   Skizzieren Sie unter Verwendung der vorliegenden Resultate den Graphen der Funktion sowie die zu $f(x)$ gehörende Asymptote.

7. Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c der gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + c}$ derart, daß die Funktion f in $x_1 = -2$ einen Pol und in $x_2 = 1$ einen Extremwert mit $f(1) = -0,35$ besitzt.

8. Welchen Bedingungen müssen die Konstanten a, b genügen, damit für die Funktion $f(x) = a \cdot e^{bx}$ gilt:
   (a) f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv und monoton fallend oder
   (b) f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konkav.

   Kann die Funktion f beide Eigenschaften a) und b) gleichzeitig besitzen?

9. Die Gesamtkosten zur Herstellung von x Stück eines Produktes sind durch die Funktion $K(x) = \frac{1}{12}x^3 - 4x + 288$ für $x > 0$ gegeben.

   (a) Berechnen Sie die Funktion $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ der totalen Durchschnittskosten (TDK).

   (b) Bei welcher Stückzahl sind die TDK minimal? Berechnen Sie die minimalen TDK.

   (c) Bestimmen Sie das Intervall, in dem $\overline{K}(x)$ streng monoton wachsend ist.

   (d) Welche Produktionsmenge x führt auf minimale Gesamtkosten?

10. Die logistische Funktion $f(t) = \dfrac{20\,000}{1 + \mathrm{e}^{-at}}$, $a > 0$ beschreibe die Anzahl der Haushalte eines Landkreises, die über einen Zweitwagen verfügen, in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren).

   (a) Eine im Auftrag des Landratsamtes erfolgte Befragung im Jahr $t = 1$ ergab, daß 12 000 Haushalte einen Zweitwagen besaßen. Wie muß dann der Parameter a gewählt werden? Welcher Wert $f(t)$ ist für $t = 3$ zu erwarten?

   (b) Weisen Sie nach, daß die Funktion $f(t)$ streng monoton wachsend ist.

   (c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$. Zu welchem Zeitpunkt erreicht die Funktion 95% von diesem Grenzwert?

   (d) Besitzt die Funktion Extremstellen oder Wendepunkte? (Auf den Nachweis der Wendepunkte mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden!)

   (e) Wann ist der Zuwachs an Zweitwagen am größten?

11. Die Gesamtkostenfunktion eines Monopolisten laute $K(x) = 2000 + 60x$, seine Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 900 - 100x$ für die Menge x eines Gutes. Bestimmen Sie diejenige Ausbringungsmenge x und den zugehörigen Monopolpreis p, für die der Gewinn maximal wird.
    Hinweis: Der Gewinn $G(x)$ ergibt sich aus dem Umsatz $U(x)$ abzüglich der Kosten $K(x)$, der Umsatz berechnet sich aus der Ausbringungsmenge x multipliziert mit dem Preis $p(x)$, d.h. $G(x) = U(x) - K(x) = x \cdot p(x) - K(x)$.