

Mathematik für Business Administration

Übungsaufgaben

Serie 7: Funktionen mit mehreren Veränderlichen

1. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung folgender Funktionen (Defintionsbereiche beachten!):

a) $f(x, y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x + x + 5$ b) $f(x, y) = e^{x-y^2} \cdot x^2 + \ln(x^2) + x$

c) $f(x, y) = (x + 3)^3(y + 6)^2$ d) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

e) $f(x, y) = \frac{x^2+y}{x}$ f) $f(x, y) = (4 + x^2 - 2y^2)^2$

g) $f(x, y) = x \ln \frac{y^2}{2x+1}$ h) $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 2x^2y^2z + 5z^3$

i) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{x_2-x_3} + x_3 + \sqrt{x_1x_2 + x_3} + \ln(x_1 + x_3^2)$

j) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

k) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ (nur 1.Ordnung!)

2. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extremwerte:

a) $f(x, y) = x^3 - 48x - 6y + y^2$

b) $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + y^2 + 10y + 17$

c) $K(x, y) = 100 + xe^{0,3y}$

d) $F(x, y) = x^2 + 9y^2 - x^2 \cdot y^2$.

3. Für ein Unternehmen, das zwei Güter in den Mengen x_1 und x_2 herstellt, gilt die Gewinnfunktion $G(x_1, x_2) = 12x_1 + 22x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2$. Bestimmen Sie den Produktionsplan mit höchstem Gewinn.

4. Ein Unternehmen, das zwei Güter mit Ausbringungsmengen x und y produziere, arbeite mit der Kostenfunktion $K(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2 + 100$ und mit der Umsatzfunktion $E(x, y) = 30x + 20y$.

Für welche Mengen x und y wird der Gewinn $G(x, y) = E(x, y) - K(x, y)$ maximal? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn!

5. Ein Unternehmen produziere zwei Produkte mit den stückvariablen Kostenfunktionen

$$k_1(x) = 200 + 0,25x^2 - 8x \quad \text{bzw.} \quad k_2(y) = 400 - y + \frac{1}{243}y^3.$$

Für welche Ausbringungsmengen x und y werden die gesamten Kosten $k = k_1 + k_2$ dieses Unternehmens minimiert?

6. Für ein Unternehmen, welches zwei Güter in den Mengen x_1 und x_2 herstellt, gilt folgende Gewinnfunktion

$$G(x_1, x_2) = 7x_1 + ax_2 - x_2^2 - 2x_1^2 + x_1x_2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie a so, daß für $x_1 = 12$ der Gewinn maximal wird.

Berechnen Sie dafür den maximalen Gewinn.

7. Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des totalen Differentials die Auswirkung einer 1%igen Absenkung von x und einer 2%igen Erhöhung von y auf die Nutzensfunktion $U(x, y) = 10x^3y^2$.