Fachhochschule Jena
University of Applied Sciences Jena

Fachbereich Grundlagenwissenschaften
PD Dr. Hartmut Menzer
Wintersemester 2012/2013

Mathematik für Business Administration

Übungsaufgaben
Serie 6: Differentialrechnung und Anwendungen - Lösungshinweise - Skizzen zu A6) und A10) werden noch ergänzt -

1. a) $y' = \frac{21}{2}\sqrt{x}$ b) $y' = -\frac{7}{x^8}$ c) $y' = 8x^3 - 4x + 7$

   d) $y' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ e) $y' = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$ f) $y' = \frac{25}{3}x^7\sqrt[3]{x}$

   g) $y' = 3x(2\ln x + 1)$ h) $y' = \frac{7}{2}\sqrt{e^x}$ i) $y' = e^{\sqrt{x}}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x})$

   j) $y' = e^x(\ln x + \frac{1}{x})$ k) $y' = x \cdot e^{-x}(2 - x)$ l) $y' = \frac{-2x^3+6x^2-x+1}{e^x}$

   m) $y' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$ n) $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$ o) $y' = \frac{2x}{(x^2+1)} + 4\frac{x+1}{(x-1)^3}$

   p) $y' = \begin{cases} 3 & : x > \frac{4}{3} \\ -3 & : x < \frac{4}{3} \end{cases}$ q) $y' = 5x^4 + 5^x \cdot \ln 5$ r) $y' = (x+2)^x \cdot (\ln(x+2) + \frac{x}{x+2})$

   Hinweis zu p): Die Funktion $y = |3x - 4|$ ist nicht differenzierbar bei $x = \frac{4}{3}$.

2. a) $y' = \frac{1}{2} - \frac{5}{18x^2}$ $y'' = \frac{5}{9x^3}$ $y''' = -\frac{5}{3x^4}$

   b) $y' = 3\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $y'' = 6\frac{x^3-3x}{(x^2+1)^3}$ $y''' = 18\frac{-x^4+6x^2-1}{(x^2+1)^4}$

   c) $y' = 3x^2 - \frac{1}{(x-1)^2}$ $y'' = 6x + \frac{2}{(x-1)^3}$ $y''' = 6 - \frac{6}{(x-1)^4}$

3. a) $K'(x) = 8e^{0,4x}$, $K''(x) = 3,2e^{0,4x} \Longrightarrow K(x)$ ist streng monoton wachsend, das Wachstum ist progressiv.
   b) $K'(x) = 0,6x^2 - 12x + 80$, $K''(x) = 1,2x - 12 \Longrightarrow K(x)$ ist streng monoton wachsend, das Wachstum ist degressiv für $x < 10$ und progressiv für $x > 10$.

4. Minimum bei $x_E = 0$, keine Wendepunkte,
   streng monoton wachsend für $x > 0$, streng monoton fallend für $x < 0$

5. Minimum bei $x_{E_1} = 6$, Maximum bei $x_{E_2} = -2$, Wendepunkt bei $x_W = 2$,
   konvex für $x > 2$, konkav für $x < 2$

6. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, Polstelle bei $x_P = 4$, Nullstellen bei $x_{N_1} = 3,618$ und $x_{N_2} = 1,382$,
   Maximum bei $x_{E_1} = 3$, Minimum bei $x_{E_2} = 5$, keine Wendepunkte,
   streng monoton wachsend für $x < 3$ und für $x > 5$, konvex für $x > 4$,
   Asymptote $y_{\mathrm{AS}}(x) = x - 1$
   Skizze:

Aufg6Serie6.jpg

7. $a = -0,7 \quad b = 1,75 \quad c = -4$, d.h. $f(x) = \frac{-0,7x+1,75}{x^2-4}$

8. a) $a > 0$ und $b \leq 0$
   b) $a < 0$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow f$ kann beide Eigenschaften nicht gleichzeitig besitzen.

9. a) $\overline{K}(x) = \frac{1}{12}x^2 - 4 + \frac{288}{x}$
   b) Minimum bei $x = 12$ und $\overline{K}(12) = 32$
   c) $\overline{K}(x)$ ist streng monoton wachsend für $x > 12$
   d) $x = 4$

10. a) $a = -\ln\frac{2}{3} = 0,4055$ und $f(3) = 15\,429$
    b) $f'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$
    c) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 20\,000 \Longrightarrow t = 7,262$, da $f(7,262) = 19000$
    d) keine Extremstellen, Wendepunkt bei $t = 0$
    e) Zuwachs maximal (d.h. $f''(t) = 0$) bei $t = 0$
    Skizze:

    Aufg10Serie6.jpg

11. $x = 4,2$ und $p(4,2) = 480$