Logik und Beweisbarkeit

Winter 2019/20

Martin Mundhenk

Univ. Jena, Institut für Informatik

27. November 2019

Einleitung: Über Sinn und Form – Symbolisches Addieren

Al-Chwarizmi (etwa 783–850)

Problem: Was ist
MMMDCCCXCIX plus CMLIV ??

Einleitung: Über Sinn und Form – Symbolisches Addieren

Al-Chwarizmi (etwa 783–850)

Problem: Was ist
MMMDCCCXCIX plus CMLIV ??

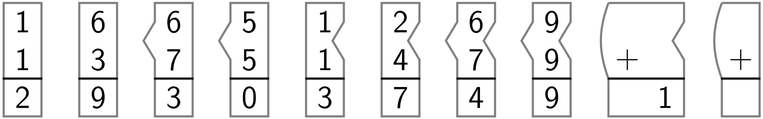
Abhilfe:

- Dezimaldarstellung
  = eine Sprache für Zahlen
- erlaubt symbolisches Addieren

$$\begin{array}{rccccc} & 7 & 8 & 2 & 2 & 4 \\ + & 1 & 3 & 8 & 1 & 2 \\ \hline & 9 & 2 & 0 & 3 & 6 \end{array}$$

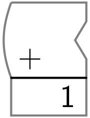
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

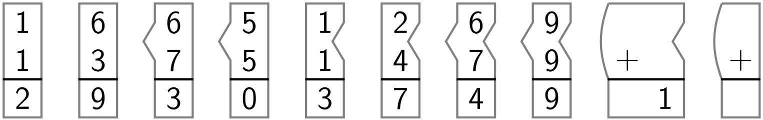
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

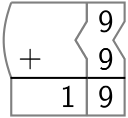
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

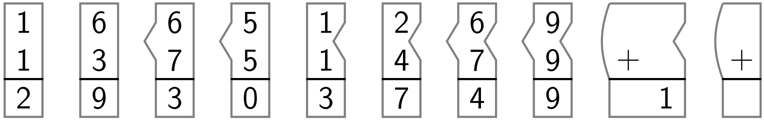
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

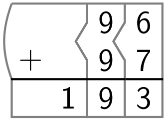
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

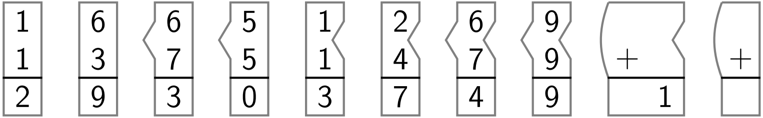
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

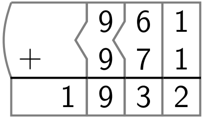
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

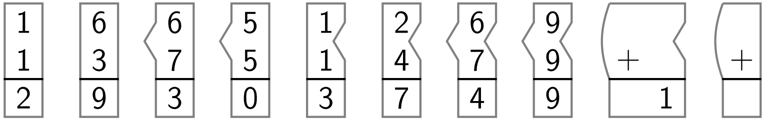
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

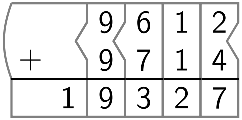
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

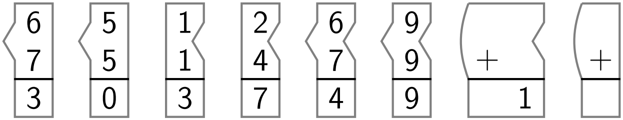
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

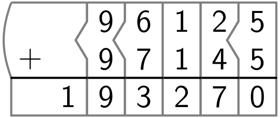
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

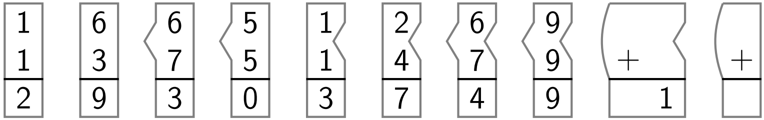
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

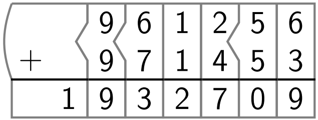
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) … sind wie Puzzlestücke.



- Regeln … korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form…

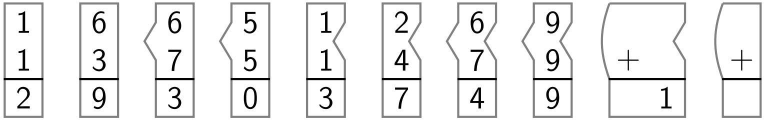
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

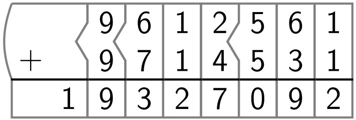
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) . . . sind wie Puzzlestücke.



- Regeln . . . korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form. . .

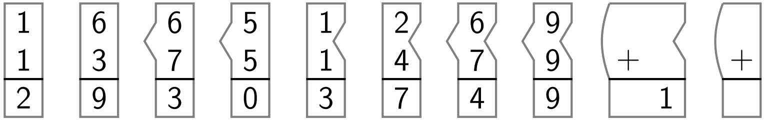
Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

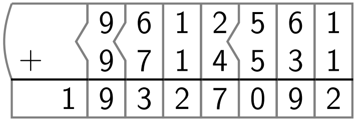
Additionen kann man puzzeln

- Grundwahrheiten (Axiome) ... sind wie Puzzlestücke.



- Regeln ... korrektes Zusammenlegen zu einer schönen Form...

Beispiel:



Jede korrekte Addition lässt sich puzzeln!

Geht das auch für die ganze Mathematik?

Symbolische Logik und Mathematik

Frege (1848-1925)

[Grundgesetze der Arithmetik (1893, 1902)]

Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

$$\forall x\, \exists y\, (y > x \land \underbrace{\forall a \forall b\, (a \cdot b = y \to (a = 1 \lor b = 1))}_{y \text{ ist Primzahl}})$$

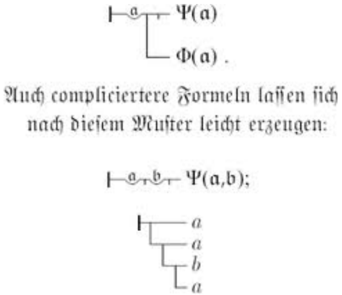
Beweis: Seien $p_1, \ldots, p_n$ alle Primzahlen $\leqslant x$.
Dann besitzt $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ kein p_i als Primfaktor.
Jede natürliche Zahl $\geqslant 2$ ist Produkt von Primfaktoren.
Seien $r_1, \ldots, r_m$ die Primfaktoren von q.
Dann ist jedes r_i eine Primzahl $> x$.
Da q mind. einen Primfaktor hat, gibt es eine Primzahl $y > x$.

Freges These: Es gibt Axiome und Regeln, mit denen man jeden Satz der Arithmetik formal beweisen kann. „Mathematik kann man puzzeln!?!“

Symbolische Logik und Mathematik

Frege (1848-1925)

[Grundgesetze der Arithmetik (1893, 1902)]



Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

$$\forall x\, \exists y\, (y > x \wedge \underbrace{\forall a \forall b\, (a \cdot b = y \to (a = 1 \vee b = 1))}_{y \text{ ist Primzahl}})$$

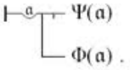
Beweis: Seien $p_1, \ldots, p_n$ alle Primzahlen $\leqslant x$.
Dann besitzt $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ kein p_i als Primfaktor.
Jede natürliche Zahl $\geqslant 2$ ist Produkt von Primfaktoren.
Seien $r_1, \ldots, r_m$ die Primfaktoren von q.
Dann ist jedes r_i eine Primzahl $> x$.
Da q mind. einen Primfaktor hat, gibt es eine Primzahl $y > x$.

Freges These: Es gibt Axiome und Regeln, mit denen man jeden Satz der Arithmetik formal beweisen kann. „Mathematik kann man puzzeln!?!“

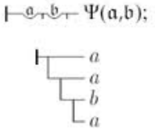
Symbolische Logik und Mathematik

Frege (1848-1925), Russell (1872-1970), Whitehead (1861-1947)

[Grundgesetze der Arithmetik (1893, 1902)]   [Principia Mathematica (1910-1913...)]



Auch compliciertere Formeln lassen sich nach diesem Muster leicht erzeugen:



$*54{\cdot}43$. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\supset : \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\equiv.\, \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 \,.\supset \vdash :. \alpha = \iota\text{‘}x \,.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv.\, x \neq y \,.$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda \,.$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 \,.\supset$

$\vdash :. (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota\text{‘}x \,.\, \beta = \iota\text{‘}y \,.\supset : \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv.\, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

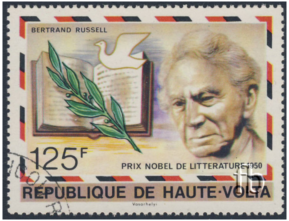
$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 \,.\supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Symbolische Logik und Mathematik

Frege (1848-1925), Russell (1872-1970), Whitehead (1861-1947)

[Grundgesetze der Arithmetik (1893, 1902)] [Principia Mathematica (1910-1913...)]



$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 \,.\supset: \alpha \cap \beta = \Lambda \,.\equiv.\, \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash .\, *54{\cdot}26 \,.\supset \vdash :. \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\supset: \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv.\, x \neq y \,.$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv .\, \iota`x \cap \iota`y = \Lambda \,.$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv .\, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash .\, (1) \,.\, *11{\cdot}11{\cdot}35 \,.\supset$

$\vdash :. (\exists x, y) \,.\, \alpha = \iota`x \,.\, \beta = \iota`y \,.\supset: \alpha \cup \beta \in 2 \,.\equiv.\, \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash .\, (2) \,.\, *11{\cdot}54 \,.\, *52{\cdot}1 \,.\supset \vdash .\,$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Hilberts Programm (1920)
Hilbert (1862-1943)

Aufgabe 1:

finde einen streng formalisierten Kalkül mit
einfachen unmittelbar einleuchtenden Axiomen,
der die Mathematik und Logik auf eine gemeinsame,
nachweisbar konsistente Basis stellt

—

d.h. finde die Puzzlestücke für das Mathe-Puzzle
und beweise, dass das stimmt.

Gödels Unvollständigkeitssatz (1931)

Gödel (1906-1978)

Hilberts Aufgabe 1
hat keine Lösung!

(Es gibt keine Axiome und Regeln zum Beweisen aller Sätze der Arithmetik.)

Gödels Unvollständigkeitssatz (1931)

Gödel (1906-1978)

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I [1].

Von **Kurt Gödel** in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM) [2] einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre [3] andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt [4], die sich aus den Axiomen nicht

[1]) Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

[2]) A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

[3]) Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden. — Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 88, Abh. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 93.

[4]) D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: $\overline{}$ (nicht), $\vee$ (oder), (x) (für alle), $=$ (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als $+$ (Addition), . (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe (x) sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

Hilberts Aufgabe 1
hat keine Lösung!

(Es gibt keine Axiome und Regeln zum Beweisen aller Sätze der Arithmetik.)

Hilberts Programm (1920)

Hilbert (1862-1943)

Aufgabe 1:

finde einen streng formalisierten Kalkül
(Axiome & Regeln) mit einfachen unmittelbar einleuchtenden Axiomen, mit dem man

jede wahre mathematische Aussage

beweisen kann.

Hilberts Programm (1920)
Hilbert (1862-1943)

Aufgabe 1:

finde ein Verfahren, mit dem man

jede wahre mathematische Aussage beweisen kann.

Hilberts Entscheidungsproblem (1927)

Hilbert (1862-1943)

Aufgabe 2:

finde ein Verfahren, mit dem man

logische Formel

für jede ~~wahre mathematische Aussage~~
beweisen kann, ob sie wahr oder falsch ist.

Hilberts Entscheidungsproblem (1927)

Hilbert (1862-1943)

Aufgabe 2:

finde ein Verfahren, mit dem man

logische Formel

für jede ~~wahre mathematische Aussage~~
beweisen kann, ob sie wahr oder falsch ist.

1. Finde Axiome und Regeln, mit denen man alle wahren logischen Formeln beweisen kann.

2. Finde Axiome und Regeln, mit denen man alle falschen logischen Formeln beweisen kann.

Gödels Vollständigkeitssatz (1929)

Gödel (1906-1978)

Aufgabe 2:

finde ein Verfahren, mit dem man

logische Formel

für jede ~~wahre mathematische Aussage~~
beweisen kann, ob sie wahr oder falsch ist.

1. Finde Axiome und Regeln, mit denen man alle wahren logischen Formeln beweisen kann. ✓
(Vollständigkeitssatz, Gödel 1929)
2. Finde Axiome und Regeln, mit denen man alle falschen logischen Formeln beweisen kann.

Gödels Vollständigkeitssatz (1929)

Gödel (1906-1978)

Aufgabe 2:

finde ein Verfahren, mit dem man

logische Formel

für jede ~~wahre mathematische Aussage~~
beweisen kann, ob sie wahr oder falsch ist.

1. Finde Axiome und Regeln, mit denen man alle wahren logischen Formeln beweisen kann. ✓
   (Vollständigkeitssatz, Gödel 1929)
2. Finde Axiome und Regeln, mit denen man alle falschen logischen Formeln beweisen kann.
   (Unvollständigkeitssatz, Turing 1936)

Turings Unvollständigkeitssatz (1936)

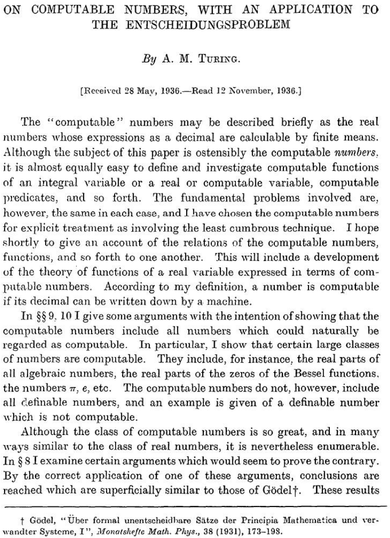
Turing (1912-1954)

Hilberts Aufgabe 2.2
hat keine Lösung!

(Es gibt keine Axiome und Regeln zum Beweisen der falschen logischen Formeln.)

Turings Unvollständigkeitssatz (1936)

Turing (1912-1954)


ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. Turing.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

The "computable" numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means. Although the subject of this paper is ostensibly the computable *numbers*, it is almost equally easy to define and investigate computable functions of an integral variable or a real or computable variable, computable predicates, and so forth. The fundamental problems involved are, however, the same in each case, and I have chosen the computable numbers for explicit treatment as involving the least cumbrous technique. I hope shortly to give an account of the relations of the computable numbers, functions, and so forth to one another. This will include a development of the theory of functions of a real variable expressed in terms of computable numbers. According to my definition, a number is computable if its decimal can be written down by a machine.

In §§ 9, 10 I give some arguments with the intention of showing that the computable numbers include all numbers which could naturally be regarded as computable. In particular, I show that certain large classes of numbers are computable. They include, for instance, the real parts of all algebraic numbers, the real parts of the zeros of the Bessel functions, the numbers π, e, etc. The computable numbers do not, however, include all definable numbers, and an example is given of a definable number which is not computable.

Although the class of computable numbers is so great, and in many ways similar to the class of real numbers, it is nevertheless enumerable. In § 8 I examine certain arguments which would seem to prove the contrary. By the correct application of one of these arguments, conclusions are reached which are superficially similar to those of Gödel†. These results

† Gödel, "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", *Monatshefte Math. Phys.*, 38 (1931), 173–198.

Hilberts Aufgabe 2.2 hat keine Lösung!

(Es gibt keine Axiome und Regeln zum Beweisen der falschen logischen Formeln.)

Inhalt der Vorlesung

1. Vollständigkeitssatz für einen Teil der Arithmetik
   - Aussagenlogik (2-3 Wochen)

     Natürliches Schließen & dessen Vollständigkeit
   - Robinsons Σ_1-Arithmetik (4 Wochen)

     Natürliches Schließen & dessen Vollständigkeit
2. Unvollständigkeitssatz der Arithmetik
   - Berechenbarkeit, (Semi-)Entscheidbarkeit (3-4 Wochen)
   - Unvollständigkeit von Robinsons und Peanos Arithmetik (2-3 Wochen)

Umfassende Frage: was kann man mit welcher Sprache ausdrücken?

Literatur:

van Dalen: Logic and Structure (Springer Verlag, 2008)

Cutland: Computability (Cambridge University Press, 1992)

Smith: An introduction to Gödel's theorems (Cambridge University Press, 2013)

Inhalt der Vorlesung

1. Vollständigkeitssatz für einen Teil der Arithmetik
   - Aussagenlogik (2-3 Wochen)

     Natürliches Schließen & dessen Vollständigkeit
   - Robinsons Σ_1-Arithmetik (4 Wochen)

     Natürliches Schließen & dessen Vollständigkeit
2. Unvollständigkeitssatz der Arithmetik
   - Berechenbarkeit, (Semi-)Entscheidbarkeit (3-4 Wochen)
   - Unvollständigkeit von Robinsons und Peanos Arithmetik (2-3 Wochen)

Umfassende Frage: was kann man mit welcher Sprache ausdrücken?

Literatur:

van Dalen: Logic and Structure (Springer Verlag, 2008)

Cutland: Computability (Cambridge University Press, 1992)

Smith: An introduction to Gödel's theorems (Cambridge University Press, 2013)

Inhalt der Vorlesung

1. Vollständigkeitssatz für einen Teil der Arithmetik
   - Aussagenlogik (2-3 Wochen)

     Natürliches Schließen & dessen Vollständigkeit
   - Robinsons Σ_1-Arithmetik (4 Wochen)

     Natürliches Schließen & dessen Vollständigkeit
2. Unvollständigkeitssatz der Arithmetik
   - Berechenbarkeit, (Semi-)Entscheidbarkeit (3-4 Wochen)
   - Unvollständigkeit von Robinsons und Peanos Arithmetik (2-3 Wochen)

Umfassende Frage: was kann man mit welcher Sprache ausdrücken?

Literatur:

van Dalen: Logic and Structure (Springer Verlag, 2008)

Cutland: Computability (Cambridge University Press, 1992)

Smith: An introduction to Gödel's theorems (Cambridge University Press, 2013)

Formalien zur Vorlesung/Übung

- Vorlesung/Übung mittwochs 12–14 Uhr, freitags 12–14 Uhr
- Logik-Café freitags 10–12 Uhr und nach Vereinbarung
  (EAP2, 3313)
- Zulassungsvoraussetzung zur Prüfung:
  erfolgreiche Bearbeitung der wöchentlichen Übungsaufgabe
- mündliche Prüfung in der vorlesungsfreien Zeit
  (Termin wird noch bekanntgegeben)

Vorlesung Logik und Beweisbarkeit (Winter 2019/20)

1. Vollständigkeitssätze

VL01: Aussagenlogik – die elementaren Begriffe der Logik
VL02: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann – Natürliches Schließen
VL03: Ein Vollständigkeitssatz: genau die „wahren“ Formeln sind beweisbar
VL04: Mini-Arithmetik – Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen
VL05: Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik
VL06: Die ganze Arithmetik – mit Variablen und Quantoren
VL07: Vollständigkeitssatz für ein Fragment der Arithmetik

2. Unvollständigkeitssätze

VL08: Totale und partielle URM-berechenbare Funktionen
VL09: Entscheidbare und semi-entscheidbare Mengen
VL10: Mengen beweisbarer Formeln sind semi-entscheidbar
VL11: URM-Programme sind wie Σ_1-Formeln
VL12: Die Unvollständigkeitssätze

Teil 1: Vollständigkeitssätze

Die Ziele sind ein Vollständigkeitssatz (7.10) für einen Teil der Arithmetik
und der Unvollständigkeitssatz (**??**) für die Robinson-Axiome:

Wir betrachten die Arithmetik über den natürlichen Zahlen.
Mit den Robinson-Axiomen

Q1 $\forall x\ (\ 0 \neq x+1\ )$

Q2 $\forall x \forall y\ (\ x+1 = y+1 \to x = y\ )$

Q3 $\forall x\ (\ 0 \neq x \to (\ \exists y\ x = y+1\ )\ )$

Q4 $\forall x\ (\ x+0 = x\ )$

Q5 $\forall x \forall y\ (\ x+(y+1) = (x+y)+1\ )$

Q6 $\forall x\ (\ x \cdot 0 = 0\ )$

Q7 $\forall x \forall y\ (\ x \cdot (y+1) = (x \cdot y)+x\ )$

lassen sich genau die „wahren“ arithmetischen Formeln formal beweisen, die nur Existenzquantoren und beschränkte Allquantoren enthalten.

Die Formel $\forall x\ (\ 0+x = x\ )$ lässt sich damit nicht beweisen.

Teil 1: Vollständigkeitssätze

Die Ziele sind ein Vollständigkeitssatz (7.10) für einen Teil der Arithmetik
und der Unvollständigkeitssatz (**??**) für die Robinson-Axiome:

Wir betrachten die Arithmetik über den natürlichen Zahlen.
Mit den Robinson-Axiomen lassen sich genau die „wahren“ arithmetischen Formeln formal beweisen, die nur Existenzquantoren und beschränkte Allquantoren enthalten.

Die Formel $\forall x \ (\ 0 + x = x \ )$ lässt sich damit nicht beweisen.

Arithmetische Formeln bestehen aus Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Formale Beweise regeln den Umgang mit Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

„Wahrheit“ von Formeln hängt ab von Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Konstruktion formaler Beweise für „wahre“ Formeln ist unterschiedlich für
Logiksymbole, Terme mit $=$, und Quantoren.

Teil 1: Vollständigkeitssätze

Die Ziele sind ein Vollständigkeitssatz (7.10) für einen Teil der Arithmetik
und der Unvollständigkeitssatz (**??**) für die Robinson-Axiome:

Wir betrachten die Arithmetik über den natürlichen Zahlen.
Mit den Robinson-Axiomen lassen sich genau die „wahren“ arithmetischen Formeln formal beweisen, die nur Existenzquantoren und beschränkte Allquantoren enthalten.

Die Formel $\forall x\ (\ 0 + x = x\ )$ lässt sich damit nicht beweisen.

Arithmetische Formeln bestehen aus Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Formale Beweise regeln den Umgang mit Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

„*Wahrheit*“ von Formeln hängt ab von Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Konstruktion formaler Beweise für „wahre“ Formeln ist unterschiedlich für
Logiksymbole, Terme mit $=$, und Quantoren.

Teil 1: Vollständigkeitssätze

Die Ziele sind ein Vollständigkeitssatz (7.10) für einen Teil der Arithmetik
und der Unvollständigkeitssatz (**??**) für die Robinson-Axiome:

Wir betrachten die Arithmetik über den natürlichen Zahlen.
Mit den Robinson-Axiomen lassen sich genau die „wahren“ arithmetischen Formeln formal beweisen, die nur Existenzquantoren und beschränkte Allquantoren enthalten.

Die Formel $\forall x \; (\; 0 + x = x \;)$ lässt sich damit nicht beweisen.

Arithmetische Formeln bestehen aus Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Formale Beweise regeln den Umgang mit Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

„Wahrheit“ von Formeln hängt ab von Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Konstruktion formaler Beweise für „wahre“ Formeln ist unterschiedlich für
Logiksymbole, Terme mit $=$, und Quantoren.

Teil 1: Vollständigkeitssätze

Die Ziele sind ein Vollständigkeitssatz (7.10) für einen Teil der Arithmetik
und der Unvollständigkeitssatz (**??**) für die Robinson-Axiome:

Wir betrachten die Arithmetik über den natürlichen Zahlen.
Mit den Robinson-Axiomen lassen sich genau die „wahren" arithmetischen Formeln formal beweisen, die nur Existenzquantoren und beschränkte Allquantoren enthalten.

Die Formel $\forall x \; (\; 0 + x = x \;)$ lässt sich damit nicht beweisen.

Arithmetische Formeln bestehen aus Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Formale Beweise regeln den Umgang mit Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

„Wahrheit" von Formeln hängt ab von Logiksymbolen, Termen mit $=$, und Quantoren.

Konstruktion formaler Beweise für „wahre" Formeln ist unterschiedlich für
Logiksymbole, Terme mit $=$, und Quantoren.

Teil 1: Vollständigkeitssätze

Die Ziele sind ein Vollständigkeitssatz (7.10) für einen Teil der Arithmetik
und der Unvollständigkeitssatz (**??**) für die Robinson-Axiome:

Wir betrachten die Arithmetik über den natürlichen Zahlen.
Mit den Robinson-Axiomen lassen sich genau die „wahren“ arithmetischen Formeln formal beweisen, die nur Existenzquantoren und beschränkte Allquantoren enthalten.

Die Formel $\forall x\ (\ 0 + x = x\ )$ lässt sich damit nicht beweisen.

Für die *Logiksymbole* betrachten wir die Aussagenlogik. (VL 1,2,3)

Die *Terme mit* $=$ kommen in der variablenfreien Arithmetik dazu. (VL 4,5)

Mit den *Quantoren* erhalten wir dann die Arithmetik. (VL 6,7)

1. Vollständigkeitssätze

VL01: Aussagenlogik – die elementaren Begriffe der Logik
VL02: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann – Natürliches Schließen
VL03: Ein Vollständigkeitssatz: genau die „wahren“ Formeln sind beweisbar
VL04: Mini-Arithmetik – Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen
VL05: Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik
VL06: Die ganze Arithmetik – mit Variablen und Quantoren
VL07: Vollständigkeitssatz für ein Fragment der Arithmetik

2. Unvollständigkeitssätze

[Literatur (siehe Semesterapparat):

van Dalen: Logic and Structure

Mendelson: Introduction to Mathematical Logic]

VL 1: Aussagenlogik – die elementaren Begriffe der Logik

Wir gehen die Grundbegriffe der (formalen) Aussagenlogik durch:

- Wie sehen aussagenlogische Formeln aus?
- Was ist eine Belegung und wann erfüllt sie eine Formel?
- Was sind gültige, erfüllbare und unerfüllbare Formeln?
- Wann sind Formeln äquivalent?
- Welche Verknüpfungszeichen braucht man überhaupt in Formeln?
  (adäquate Verknüpfungszeichen)

VL 2: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass die Semantik der Aussagenlogik die Menge aller Formeln in *gültige* und *nicht-gültige* Formeln aufteilt.

In dieser Vorlesung schauen wir uns ein Beweissystem an (*Natürliches Schließen*), mit dem man genau die gültigen Formeln beweisen will.

Es besteht aus Regeln zum Umformen von Formeln, durch die man Formeln *herleiten* kann.

Das Beweissystem teilt also die Menge aller Formeln in *herleitbare* und *nicht-herleitbare* Formeln auf.

Ziel ist es, Beweissysteme zu finden, mit denen genau die gültigen Formeln hergeleitet werden können.

- Was ist Natürliches Schließen?
- Was ist ein Beweissystem?
- Was ist eine Herleitung in einem Beweissystem?
- Kann man mit Natürlichem Schließen genau die gültigen Formeln herleiten?

VL 3: Ein Vollständigkeitssatz:
genau die „wahren“ Formeln sind beweisbar

In den letzten beiden Vorlesungen haben wir zwei Eigenschaften aussagenlogischer Formeln kennengelernt:

- Gültigkeit
- Herleitbarkeit (mittels Natürlichem Schließen)

In dieser Vorlesung werden wir sehen,
dass die beiden Eigenschaften gleich sind (Vollständigkeitssatz für die Aussagenlogik).

VL 4: Mini-Arithmetik:
Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen

Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen – bzw. Arithmetik ohne Variablen und Quantoren – ist sehr einfach.

Die Formeln sind ähnlich wie in der Aussagenlogik:

- Atome sind Aussagen der Art „$2 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 + 5$“
  mit Termen aus dem Konstantensymbol 0,
  dem Nachfolgerfunktionssymbol s
  und den Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$.
- Atome und Formeln können wie in der Aussagenlogik zu Formeln verknüpft werden.
- Es gibt keine Variablen, keine Quantoren und keine Prädikatensymbole außer $=$.

Die Semantik der Formeln ist etwas aufwändiger. Wir werden das Standardmodell $\mathfrak{N}$ kennenlernen, das die Formeln genauso interpretiert, wie wir sie verstehen.

Wir werden das Natürliche Schließen um Axiome und eine Regel für $=$ erweitern, so dass es korrekt und vollständig für die Mini-Arithmetik wird.

VL 5: Ein Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik

In den letzten beiden Vorlesungen haben wir zwei Eigenschaften von Formeln der Mini-Arithmetik kennengelernt:

- Erfüllung durch das Standardmodell der natürlichen Zahlen $\mathfrak{N}$
- Herleitbarkeit aus Axiomen $\mathcal{M}$ mittels Natürlichem Schließen

In dieser Vorlesung werden wir sehen,
dass die beiden Eigenschaften gleich sind (Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik).

VL 6: Die ganze Arithmetik mit Variablen und Quantoren

Von der Mini-Arithmetik gehen wir nun zur „richtigen" Arithmetik.
Dazu erlauben wir in Formeln auch Variablen und Quantoren.

Das Natürliche Schließen wird entsprechend erweitert.
Die *unendliche* Axiomenmenge $\mathcal{M}$ der Mini-Arithmetik können wir dann als eine *endliche* Axiomenmenge $\mathcal{Q}$ aufschreiben – damit erhalten wir die *Robinson-Arithmetik*.

Mit den Allquantoren haben wir die Büchse der Pandora geöffnet.
Jetzt gibt es Modelle, die die Axiome $\mathcal{Q}$ erfüllen, aber die Formeln nicht so interpretieren, wie wir sie verstehen.
Das werden wir uns anschauen.

VL 7: Ein Vollständigkeitssatz für ein Fragment der Arithmetik

Wir werden sehen, dass die Robinson-Arithmetik nicht vollständig für die Arithmetik ist:
d.h. es gibt Formeln, die nach unserem Verständnis „wahr“ sind, die man aber nicht beweisen kann.

Außerdem werden wir einen „Teil der Arithmetik“ sehen,
für den die Robinson-Arithmetik vollständig ist:
die Arithmetik aus Formeln ohne *unbeschränkte* Allquantoren.

Die Robinson-Arithmetik ist soetwas wie eine „minimale nicht-triviale“ Arithmetik.
Die *Peano-Arithmetik* erlaubt zusätzlich Induktions-Beweise.
Wir werden sehen, wie man Induktion formal in ein Beweissystem aufnimmt,
und dass man damit viele „einfache“ arithmetische Formeln beweisen,
bei denen das in der Robinson-Arithmetik nicht geht.

Gibt es auch „wahre“ Formeln, die man mit der Peano-Arithmetik nicht beweisen kann?

Vorlesung 1:
Aussagenlogik – die elementaren Begriffe der Logik

Wir benutzen Logik in der Umgangssprache.
Daraus hat sich die formale Logik entwickelt.

Es gibt Begriffe aus der umgangssprachlichen Logik,
die auch in der formalen Logik vorkommen.
Da sie in der formalen Logik klar definiert sind,
muss man diese Definitionen auch im Umgang mit der Logik benutzen
und darf sie nicht mit denen der umgangssprachlichen Logik verwechseln.

In der formalen Logik gibt es darüberhinaus Begriffe,
die in der umgangssprachlichen Logik nicht vorkommen.

Die grundlegenden Begriffe werden in dieser Vorlesung eingeführt.

1. Vollständigkeitssätze

VL01: Aussagenlogik – die elementaren Begriffe der Logik

- Formeln und deren Semantik
- Äquivalente Formeln
- Gültige und erfüllbare Formeln
- Semantische Folgerung

VL02: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann – Natürliches Schließen

VL03: Ein Vollständigkeitssatz: genau die „wahren“ Formeln sind beweisbar

VL04: Mini-Arithmetik – Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen

VL05: Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik

VL06: Die ganze Arithmetik – mit Variablen und Quantoren

VL07: Vollständigkeitssatz für ein Fragment der Arithmetik

1.1 Formeln und deren Semantik

Die formale Aussagenlogik ist ein abstraktes Modell der umgangssprachlichen Aussagenlogik.

Zuerst modelliert man die Zusammensetzung von Aussagen (Syntax).
Das ergibt die *Formeln* der Aussagenlogik (wie eine formale Sprache).

Anschließend modelliert man die Wahrheitswerte durch eine *Erfüllungsrelation* (Semantik).

Definition 1.1 (die Syntax der Aussagenlogik: Formeln)

Die Menge aller Atome ist eine abzählbare Menge $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$.

(Aussagenlogische) Formeln sind induktiv definiert wie folgt.

1. Die Konstanten $\top$ (*verum*) und $\bot$ (*falsum*) und alle Atome sind Formeln.

2. Für alle Formeln α ist $\neg\alpha$ (*Negation von α*) ebenfalls eine Formel.

Für alle Formeln α und β sind

$(\alpha \wedge \beta)$ (*Konjunktion von α und β, logisches Und*),

$(\alpha \vee \beta)$ (*Disjunktion von α und β, logisches Oder*) und

$(\alpha \rightarrow \beta)$ (*Implikation von α und β, logisches Wenn ... dann*)

ebenfalls Formeln.

(3. Es gibt keine anderen Formeln.)

Wir haben gesehen,
wie die Form von ugs. Aussagen durch Formeln modelliert wird.

Nun brauchen wir noch eine Modellierung der Wahrheitswerte.
Dazu definieren wir die *Belegung* und die *Erfüllungsrelation*.

Definition 1.2 (Belegung)

Eine Belegung $\mathcal{B}$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ von Atomen.

Der Wahrheitswert der Aussage „$A_i \in \mathcal{B}$" modelliert,
dass A_i für eine wahre Aussage steht – bezogen auf die „Welt" $\mathcal{B}$.

Die Erfüllungsrelation modelliert,
wie sich Wahrheitswerte in zusammengesetzten Aussagen übertragen.

[Die Begriffe *Aussage*, *Wahrheitswert*, *wahr* und *falsch* werden in der formalen Logik nicht verwendet!]

Definition 1.3 (die Semantik der Aussagenlogik: die Erfüllungsrelation $\models_{\mathcal{A}}$)

Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung, α und β seien Formeln.

Die Erfüllungsrelation $\models_{\mathcal{A}}$ zwischen Belegungen und Formeln ist wie folgt definiert.

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \top & & \\
\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \bot & & \\
\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} A_i & \text{gdw.} & A_i \in \mathcal{B}, \text{ für atomare Formeln } A_i \\
\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha & \text{gdw.} & \mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \\
\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \wedge \beta) & \text{gdw.} & \mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \\
\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \vee \beta) & \text{gdw.} & \mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \\
\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \rightarrow \beta) & \text{gdw.} & \mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta
\end{array}$$

Man spricht die Aussage „$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \varphi$“ als „$\mathcal{B}$ erfüllt φ“ aus.

Für „Nicht $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \varphi$“ schreibt man „$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \varphi$“ (auch „$\mathcal{B}$ erfüllt φ nicht“ oder „$\mathcal{B}$ erfüllt φ ist falsch“).

Beispiel: $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} \neg(A_0 \to A_1) \wedge A_2$

Mit der Semantik der formalen Aussagenlogik (Definition (1.3)) und Äquivalenzen der umgangssprachlichen Aussagenlogik können wir folgende äquivalente Umformungen machen:

$\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} \neg(A_0 \to A_1) \wedge A_2$

gdw. $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} \neg(A_0 \to A_1)$ und $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_2$ (Semantik von $\wedge$)

gdw. $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_0 \to A_1$ ist falsch und $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_2$ (Semantik von $\neg$)

gdw. $(\{A_0, A_2, A_4\} \not\models_{\mathcal{A}} A_0$ oder $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_1)$ ist falsch und $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_2$ (Semantik von $\to$)

gdw. $\{A_0, A_2, A_4\} \not\models_{\mathcal{A}} A_0$ ist falsch und $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_1$ ist falsch und $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_2$ (ugs.)

gdw. $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_0$ und $\{A_0, A_2, A_4\} \not\models_{\mathcal{A}} A_1$ und $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} A_2$ (ugs.)

gdw. $\underbrace{A_0 \in \{A_0, A_2, A_4\} \text{ und } A_1 \notin \{A_0, A_2, A_4\} \text{ und } A_2 \in \{A_0, A_2, A_4\}}_{\text{wahre Aussage}}$ (Semantik von A_i)

Also ist $\{A_0, A_2, A_4\} \models_{\mathcal{A}} \neg(A_0 \to A_1) \wedge A_2$ eine wahre Aussage.

Beispiel: $\{A_1\} \not\models_{\mathcal{A}} (A_0 \to A_1) \to (A_1 \to A_0)$

Mit der Semantik der formalen Aussagenlogik (Definition (1.3)) und Äquivalenzen der umgangssprachlichen Aussagenlogik können wir folgende äquivalente Umformungen machen:

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\{A_1\} \models_{\mathcal{A}} (A_0 \to A_1) \to (A_1 \to A_0)} & \\
\quad \text{gdw.} & \{A_1\} \models_{\mathcal{A}} A_0 \to A_1 \text{ ist falsch oder } \{A_1\} \models_{\mathcal{A}} A_1 \to A_0 & \text{(Semantik von } \to\text{)} \\
\quad \text{gdw.} & (\{A_1\} \not\models_{\mathcal{A}} A_0 \text{ oder } \{A_1\} \models_{\mathcal{A}} A_1) \text{ ist falsch oder } \{A_1\} \models_{\mathcal{A}} A_1 \to A_0 & \text{(Semantik von } \to\text{)} \\
\quad \text{gdw.} & (\{A_1\} \models_{\mathcal{A}} A_0 \text{ und } \{A_1\} \not\models_{\mathcal{A}} A_1) \text{ oder } \{A_1\} \not\models_{\mathcal{A}} A_1 \text{ oder } \{A_1\} \models_{\mathcal{A}} A_0 & \text{(ugs.)} \\
\quad \text{gdw.} & \underbrace{(A_0 \in \{A_1\} \text{ und } A_1 \notin \{A_1\}) \text{ oder } A_1 \notin \{A_1\} \text{ oder } A_0 \in \{A_1\}}_{\text{falsche Aussage}} & \text{(Semantik von } A_i\text{)}
\end{array}
$$

Also ist $\{A_1\} \models_{\mathcal{A}} (A_0 \to A_1) \to (A_1 \to A_0)$ eine falsche Aussage.
D.h. $\{A_1\} \not\models_{\mathcal{A}} (A_0 \to A_1) \to (A_1 \to A_0)$ ist eine wahre Aussage.

1.2 Äquivalente Formeln

Abkürzende Schreibweise: wir schreiben auch $A, B, C, \ldots$ für $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

Die Formeln $(A \wedge B)$ und $\neg(\neg A \vee \neg B)$ werden von den gleichen Belegungen erfüllt.

- Die Belegung $\{A, B\}$ erfüllt beide Formeln.
- Die Belegungen $\emptyset$, $\{A\}$ und $\{B\}$ erfüllen beide Formeln nicht.
- Jede andere Belegung entspricht für die Atome A und B einer der obigen Belegungen.

Definition 1.4 ((semantische) Äquivalenz von Formeln)

Seien α und β Formeln. Die Relation $\equiv$ zwischen Formeln ist wie folgt definiert:

$\alpha \equiv \beta$ („α ist äquivalent zu β“) genau dann, wenn

für jede Belegung $\mathcal{B}$gilt: $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$ genau dann, wenn $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$.

Lemma 1.5 ($\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation)

Die Relation $\equiv$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Äquivalenzen, die wir noch brauchen werden

Lemma 1.6

Für jede Formel α gilt: $\neg\alpha \equiv \alpha \to \bot$.

Beweis:

Sei α eine beliebige Formel.

Zu zeigen ist:

für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$ gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \bot$.

Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung.

Dann gilt: $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$ gdw. $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ (Semantik von $\neg$)

gdw. $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \bot$ (da $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \bot$, ugs.)

gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \bot$ (Semantik von $\to$)

Damit ist „$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$ gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \bot$“ gezeigt. $\square$

Lemma 1.7

Für alle Formeln α und β gilt: $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \to \bot) \to \beta$.

Beweis:

Seien α und β beliebige Formeln. Zu zeigen ist:

für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \vee \beta$ gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to \bot) \to \beta$.

Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung.

Dann gilt:

$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \vee \beta$	gdw.	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$	(Semantik von $\vee$)
	gdw.	$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$	(Semantik von $\neg$)
	gdw.	$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \to \bot$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$	(Lemma (1.6))
	gdw.	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to \bot) \to \beta$	(Semantik von $\to$)

Damit ist „$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \vee \beta$ gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to \bot) \to \beta$“ gezeigt. $\square$

Lemma 1.8

Für alle Formeln α und β gilt: $\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha \to (\beta \to \perp)) \to \perp$.

Beweis:

Seien α und β beliebige Formeln. Zu zeigen ist:

für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \wedge \beta$ gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to (\beta \to \perp)) \to \perp$.

Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. Dann gilt:

$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \wedge \beta$	gdw.	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$	(Semantik von $\wedge$)
	gdw.	„$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \beta$“ ist falsch	(ugs.)
	gdw.	„$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\beta$“ ist falsch	(Semantik von $\neg$)
	gdw.	„$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \to \perp$“ ist falsch	(Lemma (1.6))
	gdw.	„$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to (\beta \to \perp)$“ ist falsch	(Semantik von $\to$)
	gdw.	$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \to (\beta \to \perp)$	(Schreibweise)
	gdw.	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg(\alpha \to (\beta \to \perp))$	(Semantik von $\neg$)
	gdw.	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to (\beta \to \perp)) \to \perp$	(Lemma (1.6))

Damit ist „$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \wedge \beta$ gdw. $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to (\beta \to \perp)) \to \perp$“ gezeigt. $\square$

Lemma 1.9 (Ersetzbarkeitstheorem)

Sei α eine Formel mit einer Teilformel β, und $\beta \equiv \beta'$.
Dann ist die Formel α', die aus α entsteht,
indem ein Vorkommen der Teilformel β durch β' ersetzt wird,
äquivalent zu α.

Lemma 1.10 ($\{\perp, \to\}$ ist adäquat)

Für jede Formel φ gibt es eine äquivalente Formel φ', die nur aus Atomen, $\perp$ und $\to$ besteht.

Beispiel für die Umwandlung einer Formel:

$$
\begin{aligned}
&\neg(A \wedge B) \vee \neg C \\
&\quad \equiv \quad (\neg(A \wedge B) \to \perp) \to \neg C && (1.7) \\
&\quad \equiv \quad (\neg(A \wedge B) \to \perp) \to (C \to \perp) && (1.6) \text{ und } (1.9) \\
&\quad \equiv \quad (((A \wedge B) \to \perp) \to \perp) \to (C \to \perp) && (1.6) \text{ und } (1.9) \\
&\quad \equiv \quad ((((A \to (B \to \perp)) \to \perp) \to \perp) \to \perp) \to (C \to \perp) && (1.8) \text{ und } (1.9)
\end{aligned}
$$

1.3 Erfüllbarkeit und Gültigkeit

Von besonderem Interesse sind Formeln,
die von jeder Belegung erfüllt werden.

Definition 1.11 (gültig, erfüllbar)

1. Eine Formel α heißt gültig (oder Tautologie),
   wenn α von jeder Belegung erfüllt wird (Schreibweise: $\models_{\mathcal{A}} \alpha$).
2. Eine Formel heißt erfüllbar,
   wenn es eine Belegung gibt, die sie erfüllt.

   Anderenfalls heißt die Formel unerfüllbar (oder Kontradiktion).

Zur Übung im Umgang mit den Begriffen beweisen wir ein paar Lemmas,
die wir später gebrauchen werden.

Lemma 1.12

Für alle Formeln α und β gilt: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ *ist gültig.*

Beweis:
Zu zeigen ist: für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung. Es gilt:

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to (\beta \to \alpha) & \text{gdw.} & \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta \to \alpha & \text{(Sem. von } \to\text{)} \\
& \text{gdw.} & \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \beta \text{ oder } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha & \text{(Sem. von } \to\text{)} \\
& \text{gdw.} & \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha & \text{(ugs. Logik)}
\end{array}
$$

Da „$\mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha$“ eine wahre Aussage ist,
ist „$\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to (\beta \to \alpha)$“ ebenfalls eine wahre Aussage. □

Lemma 1.13

Für alle Formeln α, β und φ gilt:

$(\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$ *ist gültig.*

Beweis:

Zu zeigen ist:

für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$.

Wir werden benutzen, dass die Aussagen

„x oder (nicht x und y)" und „x oder y"

stets den gleichen Wahrheitswert haben.

Das gleiche gilt für die Aussagen

„x und (nicht x oder y)" und „x und y".

Das kann man sich z.B. mit Hilfe von Wahrheitstafeln klar machen.

Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung.

Mit der Semantik von $\rightarrow$ und ugs. Logik kann man die Aussage wie folgt umformulieren:

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))} & \\
\quad \text{gdw.} & \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi) \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \rightarrow \beta \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \varphi & (\text{Sem. } \rightarrow) \\
\quad \text{gdw.} & \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \varphi \text{ oder } (\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ und } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta \text{ und } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \varphi) & \\
 & \quad \text{oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } (\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ und } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \beta) & (\text{Sem. } \rightarrow) \\
\quad \text{gdw.} & \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \varphi \text{ oder } (\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ und } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta) & \\
 & \quad \text{oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \beta & (\text{ugs.}) \\
\quad \text{gdw.} & \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \varphi \text{ oder } \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \beta & (\text{ugs.}) \\
\quad \text{gdw.} & \mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta \text{ oder } \mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \beta & (\text{ugs.})
\end{array}
$$

Da „$\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta$ oder $\mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \beta$“ eine wahre Aussage ist,
ist „$\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$“ ebenfalls eine wahre Aussage. □

Lemma 1.14

Seien α und β Formeln.
Wenn α und $\alpha \to \beta$ gültig sind, dann ist auch β gültig.

Beweis:
Zu zeigen ist: wenn α und $\alpha \to \beta$ gültig sind, dann gilt für jede Belegung $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta$.

Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung.
Da α gültig ist, gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha$.
Da $\alpha \to \beta$ gültig ist, gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \beta$.
Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha$ und ($\mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta$).
Da $\mathcal{A} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ falsch ist, gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \alpha$ und $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta$.
Folglich gilt $\mathcal{A} \models_{\mathcal{A}} \beta$. $\square$

1.4 Semantische Folgerung

Eine Verallgemeinerung von $\models_{\mathcal{A}}$

Für Formelmengen Γ bedeutet $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma$ („$\mathcal{B}$ erfüllt Γ“),
dass $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \varphi$ für alle $\varphi \in \Gamma$ gilt.

Definition 1.15 (Semantische Folgerung)

Sei Γ eine Formelmenge und φ eine Formel.

Die Relation $\Vdash\!\!\models_{\mathcal{A}}$ zwischen Formelmengen und Formeln ist wie folgt definiert:

$\Gamma \Vdash\!\!\models_{\mathcal{A}} \varphi$ genau dann, wenn
jede Belegung, die Γ erfüllt, ebenfalls φ erfüllt.

(D.h.: $\Gamma \Vdash\!\!\models_{\mathcal{A}} \varphi$ gdw. für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt: wenn $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma$, dann $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \varphi$.)

Die Aussage $\Gamma \Vdash\!\!\models_{\mathcal{A}} \varphi$ spricht man
„φ ist Folgerung von Γ“ oder „aus Γ folgt φ“ aus.

Beispiel: $\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \Vdash\!\models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$

Zu zeigen ist:
für jede Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \beta$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\beta$ gilt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$.

Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung mit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \beta$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\beta$.

$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha \to \beta$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\beta$

$\Rightarrow$	$(\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ oder $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta)$ und $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \beta$	(Sem. $\to$ und $\neg$)
$\Rightarrow$	$(\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ und $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \beta)$ oder $(\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$ und $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \beta)$	(ugs. Distrib.)
$\Rightarrow$	$\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$ und $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \beta$	(ugs. Vereinfach.)
$\Rightarrow$	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\beta$	(Sem. $\neg$)
$\Rightarrow$	$\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$	(ugs.)

Schreibweisen:

- Mengenklammern und Vereinigungszeichen lässt man gerne weg:
  z.B. schreibt man $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Vdash\!\!=_{\mathcal{A}} \varphi$ oder $\Gamma, \alpha \Vdash\!\!=_{\mathcal{A}} \varphi$.
- Statt $\emptyset \Vdash\!\!=_{\mathcal{A}} \varphi$ schreibt man $\Vdash\!\!=_{\mathcal{A}} \varphi$.

Lemma 1.16 ($\Vdash\!\!=_{\mathcal{A}}$ verallgemeinert $\models_{\mathcal{A}}$)

Sei φ eine Formel. Dann gilt: $\Vdash\!\!=_{\mathcal{A}} \varphi$ genau dann, wenn $\models_{\mathcal{A}} \varphi$.

Was haben wir in Vorlesung 1 gelernt?

- Wir haben die *formale* Aussagenlogik kennengelernt.
  Wir kennen Formeln, die
  induktiv aus Atomen, $\bot$, $\top$ und den Verknüpfungszeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\rightarrow$ aufgebaut sind.
  Wir wissen, was eine Belegung ist,
  und kennen die Erfüllungsrelation $\models_{\mathcal{A}}$ zwischen Belegungen und Formeln,
  die induktiv über den Aufbau der Formeln definiert ist.
- Wichtig: wir wollen die Begriffe der umgangssprachlichen Logik mit denen der formalen Logik nicht durcheinanderbringen.
- Wir können Formeln die Eigenschaften erfüllbar, gültig und unerfüllbar zuordnen.
- Wir kennen die Relation $\equiv$ der Äquivalenz von Formeln.
- Wir wissen, wie man die Äquivalenz von Formeln beweisen kann.
- Wir wissen, dass $\{\bot, \rightarrow\}$ eine adäquate Mengen von Verknüpfungszeichen ist.
- Wir kennen die semantische Folgerung $\Vdash_{\mathcal{A}}$ als Verallgemeinerung von $\models_{\mathcal{A}}$.

Vorlesung 2: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann – Natürliches Schließen

Die *Herleitung einer Formel α (Beweis) mittels natürlichem Schließen* kann zum Beispiel wie folgt dargestellt werden. Beide Herleitungen sind von oben nach unten zu lesen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]_2 \qquad [\alpha]_1}{\bot}\,(\to E)}{\beta}\,(\bot)}{\alpha\to\beta}\,(\to I)_1 \qquad \neg(\alpha\to\beta)}{\bot}\,(\to E)}{\alpha}\,(RAA)_2$$

(1)	$\neg\alpha \blacktriangleright \neg\alpha$	Axiom
(2)	$\alpha \blacktriangleright \alpha$	Axiom
(3)	$\alpha, \neg\alpha \blacktriangleright \bot$	$(\to E)(1)(2)$
(4)	$\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \blacktriangleright \bot$	$(Hyp)(3)$
(5)	$\alpha, \neg\alpha \blacktriangleright \beta$	$(RAA)(4)$
(6)	$\neg\alpha \blacktriangleright \alpha\to\beta$	$(\to I)(5)$
(7)	$\neg(\alpha\to\beta) \blacktriangleright \neg(\alpha\to\beta)$	Axiom
(8)	$\neg\alpha, \neg(\alpha\to\beta) \blacktriangleright \bot$	$(\to E)(6)(7)$
(9)	$\neg(\alpha\to\beta) \blacktriangleright \alpha$	$(RAA)(8)$

Ganz unten steht die Formel α, die hergeleitet wird.
Jeder horizontale Strich stellt die Anwendung einer Schlussregel dar, durch die aus den Formeln über dem Strich die Formel unter dem Strich entsteht.
Formeln, über denen kein Strich steht und die nicht eingeklammert sind, nennt man Hypothesen.

Vorlesung 2: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann – Natürliches Schließen

Die *Herleitung einer Formel* α *(Beweis) mittels natürlichem Schließen* kann zum Beispiel wie folgt dargestellt werden. Beide Herleitungen sind von oben nach unten zu lesen.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg\alpha]_2 \qquad [\alpha]_1}{\bot}\ (\rightarrow E)}{\beta}\ (\bot)}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I)_1 \qquad \neg(\alpha \rightarrow \beta)}{\cfrac{\bot}{\alpha}\ (RAA)_2}\ (\rightarrow E)
$$

(1)	$\neg\alpha \blacktriangleright \neg\alpha$	Axiom
(2)	$\alpha \blacktriangleright \alpha$	Axiom
(3)	$\alpha, \neg\alpha \blacktriangleright \bot$	$(\rightarrow E)(1)(2)$
(4)	$\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \blacktriangleright \bot$	$(Hyp)(3)$
(5)	$\alpha, \neg\alpha \blacktriangleright \beta$	$(RAA)(4)$
(6)	$\neg\alpha \blacktriangleright \alpha \rightarrow \beta$	$(\rightarrow I)(5)$
(7)	$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \blacktriangleright \neg(\alpha \rightarrow \beta)$	Axiom
(8)	$\neg\alpha, \neg(\alpha \rightarrow \beta) \blacktriangleright \bot$	$(\rightarrow E)(6)(7)$
(9)	$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \blacktriangleright \alpha$	$(RAA)(8)$

Beide Herleitunen zeigen $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \Vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ (für alle Formeln α, β).

Das werden wir am Ende der Vorlesung in Lemma (2.4) sehen.

Der Einfachheit halber betrachten wir jetzt nur noch Formeln aus Atomen, $\perp$ und $\rightarrow$.

Nach (1.10) reicht das aus.

Wir benutzen $\neg\alpha$ jetzt als abkürzende Schreibweise für $\alpha \rightarrow \perp$.

In dieser Vorlesung werden wir sehen,
wie man Formeln mittels natürlichem Schließen herleiten kann.

Wir werden zeigen (2.4),
dass diese (syntaktische) Herleitbarkeit die semantische Folgerung nach sich zieht.

In der nächsten Vorlesung werden wir sehen,
dass diese beiden Begriffe gleichbedeutend sind (3.10).

(Literatur: van Dalen: Logic and Structure)

1. Vollständigkeitssätze

VL01: Aussagenlogik – die elementaren Begriffe der Logik

VL02: Wie man aussagenlogische Formeln beweisen kann – Natürliches Schließen

- Schlussregeln für $\rightarrow$ (informell)
- Schlussregeln für $\perp$ (informell)
- Formale Definition
- Korrektheit

VL03: Ein Vollständigkeitssatz: genau die „wahren“ Formeln sind beweisbar

VL04: Mini-Arithmetik – Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen

VL05: Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik

VL06: Die ganze Arithmetik – mit Variablen und Quantoren

VL07: Vollständigkeitssatz für ein Fragment der Arithmetik

2.1 Schlussregeln für $\to$

Informelle Einführung

Die Implikations-Elimination:

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Die Implikations-Introduktion ohne und mit Auflösung einer Hypothese:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Eine Herleitung wird graphisch als Baum dargestellt,
der mit Hypothesen beginnt (Blätter)
und an dessen Wurzel die hergeleitete Formel steht.

Statt Kanten werden waagerechte Striche für Anwendungen von Schlussregeln gezeichnet.

Herleitung von $A \to (B \to A)$ und $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

Die Implikations-Regeln: $\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$ $\qquad$ $\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$

Herleitung von $A \to (B \to A)$ und $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$A$$

Die Implikations-Regeln: $\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$ $\qquad$ $\dfrac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$

Herleitung von $A \to (B \to A)$ und $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$\frac{A}{B \to A}\ (\to I)$$

Die Implikations-Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Herleitung von $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ und $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{[A]_1}{B \rightarrow A}\ (\rightarrow I)}{A \rightarrow (B \rightarrow A)}\ (\rightarrow I)_1$$

Die Implikations-Regeln: $\dfrac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I)$ $\qquad$ $\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I)$

Herleitung von $A \to (B \to A)$ und $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{[A]_1}{B \to A}\,(\to I)}{\color{blue}{A \to (B \to A)}}\,(\to I)_1$$

$$\alpha$$

Die Implikations-Regeln: $\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I)$ $\qquad$ $\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I)$

Herleitung von $A \to (B \to A)$ und $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{[A]_1}{B \to A}\ (\to I)}{\color{blue}{A \to (B \to A)}}\ (\to I)_1$$

$$\dfrac{\alpha}{\beta \to \alpha}\ (\to I)$$

Die Implikations-Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I)$$

Herleitung von $A \to (B \to A)$ und $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{[A]_1}{B \to A}\,(\to I)}{\color{blue}{A \to (B \to A)}}\,(\to I)_1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{[\alpha]_1}{\beta \to \alpha}\,(\to I)}{\color{blue}{\alpha \to (\beta \to \alpha)}}\,(\to I)_1$$

Damit sind Herleitungen für alle Formeln der Form $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ angegeben.

Die Implikations-Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\,(\to I)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (erste Hälfte)

Herleitung von $\alpha \to \neg\neg\alpha$ d.h. $\alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)$

Die Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (erste Hälfte)

Herleitung von $\alpha \to \neg\neg\alpha$ d.h. $\alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)$

$\alpha \qquad \neg\alpha \qquad\qquad \alpha \qquad \alpha \to \bot$

Die Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (erste Hälfte)

Herleitung von $\alpha \to \neg\neg\alpha$ d.h. $\alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)$

$$\dfrac{\alpha \qquad\qquad \neg\alpha}{\bot}\ (\to E) \qquad\qquad \dfrac{\alpha \qquad\qquad \alpha \to \bot}{\bot}\ (\to E)$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (erste Hälfte)

Herleitung von $\alpha \to \neg\neg\alpha$ d.h. $\alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad [\neg\alpha]_1}{\bot}\ (\to E)}{\neg\neg\alpha}\ (\to I)_1$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad [\alpha \to \bot]_1}{\bot}\ (\to E)}{(\alpha \to \bot) \to \bot}\ (\to I)_1$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (erste Hälfte)

Herleitung von $\alpha \to \neg\neg\alpha$ d.h. $\alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]_2 \qquad [\neg\alpha]_1}{\bot}\,(\to E)}{\neg\neg\alpha}\,(\to I)_1}{\alpha \to \neg\neg\alpha}\,(\to I)_2$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]_2 \qquad [\alpha \to \bot]_1}{\bot}\,(\to E)}{(\alpha \to \bot) \to \bot}\,(\to I)_1}{\alpha \to ((\alpha \to \bot) \to \bot)}\,(\to I)_2$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Die Implikations-Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$\alpha \qquad \alpha \to \beta$$

Die Implikations-Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$\frac{\alpha \qquad\qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Die Implikations-Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad\qquad \neg\beta$$

Die Implikations-Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \qquad\qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad\qquad\qquad\qquad \neg\beta}{\bot}\ (\to E)$$

Die Implikations-Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]_1 \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1
$$

Die Implikations-Regeln:

$$
\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)
$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\alpha]_1 \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E) \qquad [\neg\beta]_2}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1}{\neg\beta \to \neg\alpha}\,(\to I)_2
$$

Die Implikations-Regeln:

$$
\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)
$$

Herleitung von $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{[\alpha]_1 \quad [\alpha \to \beta]_3}{\beta}\ (\to E)
        \qquad [\neg\beta]_2
      }{\bot}\ (\to E)
    }{\neg\alpha}\ (\to I)_1
  }{\neg\beta \to \neg\alpha}\ (\to I)_2
}{(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)}\ (\to I)_3
$$

Die Implikations-Regeln:

$$
\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E)
$$

2.2 Schlussregeln für $\perp$

Informelle Einführung

Ex falso quod libet

$$\frac{\perp}{\alpha}\ (\perp)$$

Reductio ad absurdum

$$\begin{array}{c} [\neg\alpha] \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{\alpha}\ (\mathit{RAA}) \end{array}$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (zweite Hälfte)

Herleitung von $\neg\neg\alpha \to \alpha$:

Die Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg\alpha] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\ (RAA)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (zweite Hälfte)

Herleitung von $\neg\neg\alpha \to \alpha$:

$$\neg\neg\alpha \qquad \neg\alpha \qquad\qquad (\alpha \to \bot) \to \bot \qquad \alpha \to \bot$$

Die Regeln:

$$\frac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg\alpha]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\ (RAA)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (zweite Hälfte)

Herleitung von $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$:

$$\dfrac{\neg\neg\alpha \qquad \neg\alpha}{\bot}\ (\rightarrow E) \qquad\qquad \dfrac{(\alpha \rightarrow \bot) \rightarrow \bot \qquad \alpha \rightarrow \bot}{\bot}\ (\rightarrow E)$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}\ (\rightarrow E) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\ (RAA)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (zweite Hälfte)

Herleitung von $\neg\neg\alpha \to \alpha$:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha \qquad [\neg\alpha]_1}{\bot}\ (\to E)}{\alpha}\ (RAA)_1 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{(\alpha \to \bot) \to \bot \qquad [\alpha \to \bot]_1}{\bot}\ (\to E)}{\alpha}\ (RAA)_1$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\ (RAA)$$

Herleitung des Doppelnegationsgesetzes (zweite Hälfte)

Herleitung von $\neg\neg\alpha \to \alpha$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\alpha]_2 \quad [\neg\alpha]_1}{\bot}\,(\to E)}{\alpha}\,(RAA)_1}{\color{blue}{\neg\neg\alpha \to \alpha}}\,(\to I)_2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\alpha \to \bot) \to \bot]_2\,[\alpha \to \bot]_1}{\bot}\,(\to E)}{\alpha}\,(RAA)_1}{\color{blue}{((\alpha \to \bot) \to \bot) \to \alpha}}\,(\to I)_2$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\beta}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E) \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\,(RAA)$$

Herleitung von $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

Die Regeln:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\;(\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\;(\to E) \qquad \dfrac{\perp}{\alpha}\;(\perp)$$

Herleitung von $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

$$\neg\alpha \qquad\qquad\qquad \alpha$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}\ (\rightarrow E) \qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\ (\bot)$$

Herleitung von $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\neg\alpha \qquad\qquad\qquad \alpha}{\bot}\ (\to E)$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\ (\bot)$$

Herleitung von $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \qquad\qquad \alpha}{\bot}\,(\to E)}{\beta}\,(\bot)$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E) \qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\,(\bot)$$

Herleitung von $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \qquad\qquad [\alpha]_1}{\bot}\ (\to E)}{\beta}\ (\bot)}{\alpha \to \beta}\ (\to I)_1$$

Die Regeln:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ (\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\ (\to E) \qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\ (\bot)$$

Herleitung von $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]_2 \qquad [\alpha]_1}{\bot}\,(\to E)}{\beta}\,(\bot)}{\alpha \to \beta}\,(\to I)_1}{\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)}\,(\to I)_2
$$

Die Regeln:

$$
\dfrac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\,(\to I) \qquad \dfrac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E) \qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\,(\bot)
$$

2.3 Natürliches Schließen – formal

„Formaler gesehen“ geht es beim Natürlichen Schließen nicht um das Herleiten von Formeln, sondern um das Herleiten von *Sequenten* aus Hypothesen und einer Formel.

Definition 2.1 (Sequent)

Ein Sequent ist ein Paar $\Gamma \blacktriangleright \varphi$,

wobei Γ eine endliche Formelmenge und φ eine Formel ist.

Statt $\emptyset \blacktriangleright \varphi$ schreiben wir vereinfachend $\blacktriangleright \varphi$, und

statt $\Gamma \cup \{\alpha\} \blacktriangleright \varphi$ schreiben wir vereinfachend $\Gamma, \alpha \blacktriangleright \varphi$ etc.

Die Herleitungen beginnen mit Axiomen und werden durch Anwendungen von Regeln fortgesetzt.

Da wir für die verschiedenen Logiken verschiedene Systeme von Axiomen und Regeln benutzen werden, definieren wir den Prozess der Herleitung erstmal abstrakt für beliebige Axiome und Regeln.

Definition 2.2 (Herleitung in einem Beweissystem mit Sequenten)

1. Ein Beweissystem besteht aus einer Menge von *Axiomen* $\mathfrak{Ax}$ und einer Menge von *Schlussregeln* $\mathfrak{Sr}$.

2. Eine Herleitung eines Sequenten $\Gamma \blacktriangleright \alpha$ aus $\mathfrak{Ax}$ und $\mathfrak{Sr}$ ist eine Folge $\Gamma_1 \blacktriangleright \alpha_1, \Gamma_2 \blacktriangleright \alpha_2, \ldots,$ $\Gamma_\ell \blacktriangleright \alpha_\ell$ von Sequenten, so dass $\Gamma \blacktriangleright \alpha = \Gamma_\ell \blacktriangleright \alpha_\ell$ und für $i = 1, 2, \ldots, \ell$ gilt:

- $\Gamma_i \blacktriangleright \alpha_i$ ist in $\mathfrak{Ax}$ (also ein Axiom), oder
- es gibt $\Gamma_a \blacktriangleright \alpha_a$ und ggf. $\Gamma_b \blacktriangleright \alpha_b$ mit $a, b < i$, aus denen $\Gamma_i \blacktriangleright \alpha_i$ in einem Schritt mit einer Schlussregel in $\mathfrak{Sr}$ hergeleitet werden kann.

3. $\Gamma \vdash \alpha$ aus $\mathfrak{Ax}$ und $\mathfrak{Sr}$ bedeutet,
dass es eine Herleitung eines Sequenten $\Gamma' \blacktriangleright \alpha$ für ein $\Gamma' \subseteq \Gamma$ aus $\mathfrak{Ax}$ und $\mathfrak{Sr}$ gibt.

$\vdash \alpha$ ist Schreibweise für $\emptyset \vdash \alpha$.

Wir können nun das Natürliche Schließen für die Aussagenlogik als Axiome und Regeln für ein Beweissystem mit Sequenten aufschreiben – dadurch wird das bisher etwas schwammige „Auflösen von Hypothesen“ klar definiert.

Definition 2.3 (Natürliches Schließen für die Aussagenlogik $\vdash_{\mathcal{A}}$)

Sei φ eine aussagenlogische Formel aus Atomen, $\perp$ und $\rightarrow$,
und Γ sei eine Menge solcher Formeln.

$\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$ („φ ist aus Γ mittels natürlichem Schließen herleitbar“) bedeutet,
dass $\Gamma \vdash \varphi$ aus folgenden Axiomen und Schlussregeln:

1. Die Axiome sind Sequenten $\alpha \blacktriangleright \alpha$ für alle Formeln α.
2. Die Schlussregeln sind für Formelmengen Γ, Δ und Formeln α, β: („Γ, Δ“ steht für $\Gamma \cup \Delta$)

$$\frac{\Gamma, \beta \blacktriangleright \alpha}{\Gamma \blacktriangleright \beta \rightarrow \alpha}\ (\rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \blacktriangleright \alpha \qquad \Delta \blacktriangleright \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright \beta}\ (\rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma, \neg\beta \blacktriangleright \perp}{\Gamma \blacktriangleright \beta}\ (\mathit{RAA}) \qquad \frac{\Gamma \blacktriangleright \alpha}{\Gamma, \beta \blacktriangleright \alpha}\ (\mathit{Hyp})$$

(Bem.: „Alte“ Regeln ohne Hypothesenauflösung werden unter Verwendung von (*Hyp*) dargestellt.)

Beispiel: $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to (\beta \to \alpha)$

(1)	α	►	α	
(2)	α, β	►	α	$(Hyp)(1)$
(3)	α	►	$\beta \to \alpha$	$(\to I)(2)$
(4)		►	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$(\to I)(3)$

Beispiel: $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to \neg\neg\alpha$

(1)	α	$\blacktriangleright$	α	
(2)	$\neg\alpha$	$\blacktriangleright$	$\neg\alpha$	
(3)	$\alpha, \neg\alpha$	$\blacktriangleright$	$\bot$	$(\to E)(1),(2)$
(4)	α	$\blacktriangleright$	$\neg\neg\alpha$	$(\to I)(3)$
(5)		$\blacktriangleright$	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	$(\to I)(4)$

Beispiel: $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

(1)	α	$\blacktriangleright$	α	
(2)	$\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\alpha \to \beta$	
(3)	$\alpha, \alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	β	$(\to E)(1),(2)$
(4)	$\neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\beta$	
(5)	$\alpha, \alpha \to \beta, \neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\perp$	$(\to E)(3),(4)$
(6)	$\alpha \to \beta, \neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\alpha$	$(\to I)(5)$
(7)	$\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\beta \to \neg\alpha$	$(\to I)(6)$
(8)		$\blacktriangleright$	$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	$(\to I)(7)$

Beispiel: $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\alpha \to \alpha$

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & \neg\alpha & \blacktriangleright & \neg\alpha & \\
(2) & \neg\neg\alpha & \blacktriangleright & \neg\neg\alpha & \\
(3) & \neg\alpha, \neg\neg\alpha & \blacktriangleright & \perp & (\to E)(1),(2) \\
(4) & \neg\neg\alpha & \blacktriangleright & \alpha & (RAA)(3) \\
(5) & & \blacktriangleright & \neg\neg\alpha \to \alpha & (\to I)(4)
\end{array}$$

2.4 Korrektheit des Natürlichen Schließens

Auf dieser Folie schauen wir uns mal nur Herleitungen ohne Hypothesen an.
Das Natürliche Schließen unterteilt die Menge aller Formeln
in *herleitbare* Formeln und *nicht-herleitbare* Formeln.

- Sind alle herleitbaren Formeln gültig? (Korrektheit von $\vdash_{\mathcal{A}}$)
- Sind alle gültigen Formeln herleitbar? (Vollständigkeit von $\vdash_{\mathcal{A}}$)

Unser nächstes Ziel ist der Beweis eines Vollständigkeitssatzes (3.10).

Die herleitbaren Formeln sind genau die gültigen Formeln.

Wenn man ein Beweissystem als „Maschine“ betrachtet, die unendlich laufend alle herleitbaren Formeln ausgibt, dann bedeutet

- Korrektheit: die „Maschine“ gibt nur gültige Formeln aus, und
- Vollständigkeit: jede gültige Formel wird irgendwann ausgegeben.

Korrektheit von $\underset{\mathcal{A}}{\vdash}$

Da man beim Natürlichen Schließen mit Sequenten arbeitet,
ist es einfacher, etwas Allgemeineres zu beweisen.

Lemma 2.4 (Korrektheit von $\underset{\mathcal{A}}{\vdash}$)

Sei Γ *eine aussagenlogische Formelmenge und* α *eine aussagenlogische Formel.*
Dann gilt: *wenn* $\Gamma \underset{\mathcal{A}}{\vdash} \alpha$, *dann* $\Gamma \mathrel{|}\!\underset{\mathcal{A}}{\models} \alpha$.

Korrektheit von $\vdash_{\mathcal{A}}$: Beweis

Wir zeigen die Behauptung

mittels Induktion über die Länge der Herleitung von α aus Γ.

Induktionsanfang: $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ mit einer Herleitung der Länge 1.
Dann besteht die Herleitung nur aus dem Sequenten $\alpha \blacktriangleright \alpha$
(also $\Gamma \supseteq \{\alpha\}$), und offensichtlich gilt $\Gamma \Vvdash_{\mathcal{A}} \alpha$ für $\Gamma \supseteq \{\alpha\}$.

Induktionsvoraussetzung:

wenn $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ mit einer Herleitung der Länge $\leqslant n$, dann gilt $\Gamma \Vvdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

Induktionsschluss:

zu zeigen: wenn $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ mit einer Herleitung der Länge $n + 1$,

dann gilt $\Gamma \Vvdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

Sei $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ mit einer Herleitung von $\Gamma' \blacktriangleright \alpha$ der Länge $n+1$ für ein $\Gamma' \subseteq \Gamma$.
Wir unterscheiden, welche Regel im letzten Herleitungsschritt angewendet wird.

Fall 1: im letzten Herleitungsschritt wird das Axiom $\alpha \blacktriangleright \alpha$ benutzt.
Also ist $\Gamma' \supseteq \{\alpha\}$
Offensichtlich gilt $\alpha \Vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.
Da $\Gamma' \supseteq \{\alpha\}$ folgt $\Gamma' \Vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

Fall 2: im letzten Herleitungsschritt wird $(\to I)$ verwendet.
Was bedeutet das für die Herleitungsschritte $1 \dots n$?
Dann ergibt der letzte Herleitungsschritt $\Gamma' \blacktriangleright \beta \to \varphi$ (d.h. $\alpha = \beta \to \varphi$),
und die Herleitung enthält $\Gamma', \beta \blacktriangleright \varphi$, der mit $\leqslant n$ Schritten hergeleitet wird.
Was liefert die Induktionsvoraussetzung?
Laut IV gilt $\Gamma', \beta \mathrel{\|\!\!=}_{\mathcal{A}} \varphi$.
Was ist zu zeigen?
Wir zeigen nun $\Gamma' \mathrel{\|\!\!=}_{\mathcal{A}} \beta \to \varphi$,
Was heißt das genau?

d.h. für alle Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: wenn $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma'$, dann $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \to \varphi$.

Es ist ein „für alle"-Beweis zu führen …
Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung mit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma'$.
Jetzt muss argumentiert werden …
Fall 2.1: $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \beta$: dann folgt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \to \varphi$ (Semantik von $\to$).
Fall 2.2: $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$: gemäß IV gilt $\Gamma', \beta \mathrel{\|\!\!=}_{\mathcal{A}} \varphi$ und damit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \varphi$.
Gemäß Semantik von $\to$ folgt ebenfalls $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \to \varphi$.
Der „für alle"-Beweis wird abgeschlossen.
Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, folgt $\Gamma' \mathrel{\|\!\!=}_{\mathcal{A}} \beta \to \varphi$ – d.h. $\Gamma' \mathrel{\|\!\!=}_{\mathcal{A}} \alpha$.

Fall 3: im letzten Herleitungsschritt wird $(\to E)$ verwendet.
Der letzte Herleitungsschritt ergibt $\Gamma' \blacktriangleright \alpha$
und die Herleitung enthält Sequenten $\Delta \blacktriangleright \beta$ und $\Delta' \blacktriangleright \beta \to \alpha$ mit $\Gamma' = \Delta \cup \Delta'$, die beide mit $\leqslant n$ Schritten hergeleitet werden.
Laut IV gilt $\Delta \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{A}} \beta$ und $\Delta' \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{A}} \beta \to \alpha$.

Wir zeigen nun $\Gamma' \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$,
d.h. für jede Belegung $\mathcal{B}$ gilt: wenn $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma'$, dann $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung mit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma'$.
Da $\Delta, \Delta' \subseteq \Gamma'$, folgt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Delta$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Delta'$.
Mit der IV folgt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta$ und $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \beta \to \alpha$.
Folglich gilt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$.
Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, folgt $\Gamma' \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Fall 4: im letzten Herleitungsschritt wird (Hyp) verwendet.

Der letzte Herleitungsschritt ergibt $\Gamma' \blacktriangleright \alpha$, und die Herleitung enthält einen Sequenten $\Gamma' - \{\beta\} \blacktriangleright \alpha$, der mit $\leqslant n$ Schritten hergeleitet wird.

Laut IV gilt $\Gamma' - \{\beta\} \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung mit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma'$.

Dann folgt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma' - \{\beta\}$, und mit der IV folgt $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, folgt $\Gamma' \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Fall 5: im letzten Herleitungsschritt wird (RAA) verwendet.

Der letzte Herleitungsschritt ergibt $\Gamma' \blacktriangleright \alpha$, und die Herleitung enthält einen Sequenten $\Gamma', \neg\alpha \blacktriangleright \bot$, der mit $\leqslant n$ Schritten hergeleitet wird.

Laut IV gilt $\Gamma', \neg\alpha \mid\!\models_{\mathcal{A}} \bot$ (d.h. $\Gamma' \cup \{\neg\alpha\}$ ist unerfüllbar).

Sei $\mathcal{B}$ eine Belegung mit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \Gamma'$.

Da $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \bot$, folgt $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \neg\alpha$ aus der IV und damit $\mathcal{B} \models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, folgt $\Gamma' \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Also folgt in allen Fällen $\Gamma' \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$. Da $\Gamma' \subseteq \Gamma$, folgt schließlich $\Gamma \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$. $\square$

Was haben wir in Vorlesung 2 gelernt?

- Wir haben *Natürliches Schließen* für die Aussagenlogik kennengelernt.
- Wir kennen die Axiome und Regeln des Natürlichen Schließens.
- Wir können einige Formeln herleiten.
- Wir kennen die Relation $\vdash_{\mathcal{A}}$.
- Wir kennen das Korrektheitslemma für $\vdash_{\mathcal{A}}$ und können den Beweis mittels Induktion über die Länge der Herleitung führen.

Weitere Beispiele für Herleitungen

Satz 2.5

Für alle Formeln α und β gilt

1. $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to \alpha$
2. $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
3. $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$
4. $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$
5. $\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$
6. $\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathcal{A}} \neg\beta$
7. $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\alpha \to \alpha$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to \alpha$

(1)	α	$\blacktriangleright$	α	
(2)		$\blacktriangleright$	$\alpha \to \alpha$	$(\to I)(1)$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

(1)	α	▶	α	
(2)	$\neg\alpha$	▶	$\neg\alpha$	
(3)	$\alpha, \neg\alpha$	▶	$\bot$	$(\to E)(1),(2)$
(4)	$\alpha, \neg\alpha, \neg\beta$	▶	$\bot$	$(Hyp)(3)$
(5)	$\alpha, \neg\alpha$	▶	β	$(RAA)(4)$
(6)	$\neg\alpha$	▶	$\alpha \to \beta$	$(\to I)(5)$
(7)		▶	$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$	$(\to I)(6)$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$

(1)	α	$\blacktriangleright$	α	
(2)	$\neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\beta$	
(3)	$\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\alpha \to \beta$	
(4)	$\alpha, \alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	β	$(\to E)(1),(3)$
(5)	$\alpha, \neg\beta, \alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\perp$	$(\to E)(2),(4)$
(6)	$\alpha, \neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\neg(\alpha \to \beta)$	$(\to I)(5)$
(7)	α	$\blacktriangleright$	$\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)$	$(\to I)(6)$
(8)		$\blacktriangleright$	$\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$	$(\to I)(7)$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

(1)	$\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\alpha \to \beta$	
(2)	α	$\blacktriangleright$	α	
(3)	$\alpha, \alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	β	$(\to E)(1)(2)$
(4)	$\neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\beta$	
(5)	$\alpha, \alpha \to \beta, \neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\bot$	$(\to E)(3)(4)$
(6)	$\alpha \to \beta, \neg\beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\alpha$	$(\to I)(5)$
(7)	$\neg\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\neg\alpha \to \beta$	
(8)	$\alpha \to \beta, \neg\beta, \neg\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	β	$(\to E)(6)(7)$
(9)	$\alpha \to \beta, \neg\beta, \neg\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$\bot$	$(\to E)(4)(8)$
(10)	$\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	β	$(RAA)(9)$
(11)	$\alpha \to \beta$	$\blacktriangleright$	$(\neg\alpha \to \beta) \to \beta$	$(\to I)(10)$
(12)		$\blacktriangleright$	$(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$	$(\to I)(11)$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$\alpha \to \beta \qquad\qquad\qquad \alpha$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$\dfrac{\alpha \to \beta \qquad\qquad \alpha}{\beta}\ (\to E)$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$\dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\ (\to E) \qquad \neg\beta$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\,(\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\,(\to E)$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad [\alpha]_1}{\beta}\,(\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \to \beta \qquad [\alpha]_1}{\beta}\ (\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\ (\to E)}{\neg\alpha}\ (\to I)_1 \qquad \neg\alpha \to \beta$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad [\alpha]_1}{\beta}\;(\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\;(\to E)}{\neg\alpha}\;(\to I)_1 \qquad \neg\alpha \to \beta}{\beta}\;(\to E)
$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$\neg\beta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad [\alpha]_1}{\beta}\,(\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1 \qquad \neg\alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$
\dfrac{\neg\beta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad [\alpha]_1}{\beta}\,(\to E) \qquad \neg\beta}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1 \qquad \neg\alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E)
$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg\beta]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad [\alpha]_1}{\beta}\,(\to E) \qquad [\neg\beta]_2}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1 \qquad \neg\alpha \to \beta}{\beta}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E)}{\beta}\,(RAA)_2
$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\beta]_2$}
\AxiomC{$\alpha \to \beta$}
\AxiomC{$[\alpha]_1$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{β}
\AxiomC{$[\neg\beta]_2$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)_1$}
\UnaryInfC{$\neg\alpha$}
\AxiomC{$[\neg\alpha \to \beta]_3$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{β}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(RAA)_2$}
\UnaryInfC{β}
\RightLabel{$(\to I)_3$}
\UnaryInfC{$(\neg\alpha \to \beta) \to \beta$}
\end{prooftree}
$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\beta]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \to \beta]_4 \qquad [\alpha]_1}{\beta}\,(\to E) \qquad [\neg\beta]_2}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1 \qquad [\neg\alpha \to \beta]_3}{\beta}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E)}{\beta}\,(RAA)_2}{(\neg\alpha \to \beta) \to \beta}\,(\to I)_3}{(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)}\,(\to I)_4
$$

Beweis für $\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\alpha]_2$}
\AxiomC{$[\alpha]_1$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot)$}
\UnaryInfC{β}
\RightLabel{$(\to I)_1$}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta$}
\AxiomC{$\neg(\alpha \to \beta)$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(RAA)_2$}
\UnaryInfC{α}
\end{prooftree}
$$

Beweis für $\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathcal{A}} \neg\beta$

$$
\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \to \beta) \qquad \dfrac{[\beta]_1}{\alpha \to \beta}\,(\to I)}{\bot}\,(\to E)}{\neg\beta}\,(\to I)_1
$$

Beweis für $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

(1)	$\neg\neg\alpha$	►	α	(2.5)(5)
(2)		►	$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	$(\rightarrow I)(1)$

Vorlesung 3: Ein Vollständigkeitsatz: genau die „wahren“ Formeln sind beweisbar

In der letzten Vorlesung haben wir die *Korrektheit* des Natürlichen Schließens gesehen:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha \quad (2.4)$$

In dieser Vorlesung geht es um die *Vollständigkeit*:

$$\Gamma \mid\!\models_{\mathcal{A}} \alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$$

Korrektheit und Vollständigkeit zusammen liefern den *Vollständigkeitssatz* (3.10).

1. Vollständigkeitssätze

Was in dieser Vorlesung passiert . . .

- Wir wollen zeigen:
  für alle Formelmengen Γ und alle Formeln α gilt: wenn $\Gamma \Vdash_{\mathcal{A}} \alpha$, dann $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

- Dazu zeigen wir „wenn $\Gamma \nvdash_{\mathcal{A}} \alpha$, dann $\Gamma \nVdash_{\mathcal{A}} \alpha$“ wie folgt:

$$\begin{array}{lcl}
\Gamma \nvdash_{\mathcal{A}} \alpha & \overset{(3.2)}{\Rightarrow} & \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \nvdash_{\mathcal{A}} \bot,\ \text{d.h. } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \text{ ist konsistent} \\
& \overset{(3.4)}{\Rightarrow} & \text{es gibt eine maximale konsistente Obermenge } \Gamma^* \text{ von } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \\
& \overset{(3.8)}{\Rightarrow} & \text{es gibt eine erfüllende Belegung für } \Gamma^* \\
& \Rightarrow & \text{es gibt eine erfüllende Belegung für } \Gamma \cup \{\neg\alpha\} \\
& \Rightarrow & \Gamma \nVdash_{\mathcal{A}} \alpha
\end{array}$$

Der Übergang „von Syntax zu Semantik“ findet in (3.8) statt . . .

3.1 Maximale konsistente Mengen

Definition 3.1 (konsistente Formelmengen)

Eine Formelmenge Γ heißt konsistent, falls $\Gamma \nvdash_{\mathcal{A}} \bot$.

1. $\emptyset$ ist konsistent.
2. Wenn Γ nicht konsistent ist, dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ für alle Formeln α.
3. Wenn Γ nicht konsistent ist,
   dann ist Γ unerfüllbar – d.h. $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \Gamma$ für alle Belegungen $\mathcal{B}$.
4. Wenn Γ konsistent ist, dann gilt für jede Formel α: $\alpha \notin \Gamma$ oder $\neg\alpha \notin \Gamma$.

3.1 Maximale konsistente Mengen

Definition 3.1 (konsistente Formelmengen)

Eine Formelmenge Γ heißt konsistent, falls $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{A}} \bot$.

1. $\emptyset$ ist konsistent.
2. Wenn Γ nicht konsistent ist, dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ für alle Formeln α.
3. Wenn Γ nicht konsistent ist,
   dann ist Γ unerfüllbar – d.h. $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \Gamma$ für alle Belegungen $\mathcal{B}$.
4. Wenn Γ konsistent ist, dann gilt für jede Formel α: $\alpha \notin \Gamma$ oder $\neg\alpha \notin \Gamma$.

3.1 Maximale konsistente Mengen

Definition 3.1 (konsistente Formelmengen)

Eine Formelmenge Γ heißt konsistent, falls $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{A}} \bot$.

1. $\emptyset$ ist konsistent.
2. Wenn Γ nicht konsistent ist, dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ für alle Formeln α.
3. Wenn Γ nicht konsistent ist,
   dann ist Γ unerfüllbar – d.h. $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \Gamma$ für alle Belegungen $\mathcal{B}$.
4. Wenn Γ konsistent ist, dann gilt für jede Formel α: $\alpha \notin \Gamma$ oder $\neg\alpha \notin \Gamma$.

3.1 Maximale konsistente Mengen

Definition 3.1 (konsistente Formelmengen)

Eine Formelmenge Γ heißt konsistent, falls $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{A}} \bot$.

1. $\emptyset$ ist konsistent.
2. Wenn Γ nicht konsistent ist, dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ für alle Formeln α.
3. Wenn Γ nicht konsistent ist,
   dann ist Γ unerfüllbar – d.h. $\mathcal{B} \not\models_{\mathcal{A}} \Gamma$ für alle Belegungen $\mathcal{B}$.
4. Wenn Γ konsistent ist, dann gilt für jede Formel α: $\alpha \notin \Gamma$ oder $\neg\alpha \notin \Gamma$.

Schritt 1: aus $\Gamma \nvdash_{\mathcal{A}} \alpha$ folgt $\Gamma, \neg\alpha \nvdash_{\mathcal{A}} \bot$

Lemma 3.2

Wenn $\Gamma \nvdash_{\mathcal{A}} \alpha$ *, dann ist* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *konsistent.*

Beweis:

Wir zeigen: wenn $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{A}} \bot$, dann $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$:

Aus $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{A}} \bot$ folgt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\alpha$ mit $(\rightarrow I)$.

Mit $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (2.5)(7) und $(\rightarrow E)$ folgt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$. $\square$

Schritt 2: Maximale konsistente Mengen

Definition 3.3 (maximale konsistente Formelmengen)

Eine konsistente Formelmenge Γ heißt maximal konsistent, wenn keine echte Obermenge von Γ konsistent ist.

Lemma 3.4

Jede konsistente Formelmenge besitzt eine maximale konsistente Obermenge.

Beweis: Sei Γ eine konsistente Formelmenge,
und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ sei eine Aufzählung aller Formeln.
Definiere Formelmengen $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ und Γ^* wie folgt.

$$\Gamma_0 := \Gamma \qquad \text{und} \qquad \Gamma_{i+1} := \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_{i+1}\}, & \text{falls } \Gamma, \varphi_{i+1} \nvdash_{\mathcal{A}} \perp \\ \Gamma_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Gamma^* := \bigcup_{i \geqslant 0} \Gamma_i$$

1.) Γ^* ist konsistent.

Angenommen, Γ^* ist nicht konsistent – also $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{A}} \perp$.

Dann gibt es eine *endliche* Herleitung von $\perp$ aus Γ^*,
in der eine nicht-leere *endliche* Menge von
Hypothesen φ_i aus Γ^* benutzt wird.

Sei b der größte Index aller dieser Hypothesen.

Dann ist $\varphi_b \in \Gamma_b$ und es gilt $\Gamma_b \vdash_{\mathcal{A}} \perp$.

Da $\Gamma_b = \Gamma_{b-1} \cup \{\varphi_b\}$ und $\Gamma_{b-1}, \varphi_b \vdash_{\mathcal{A}} \perp$,
folgt aus der Definition von Γ_b, dass $\varphi_b \not\in \Gamma_b$: Widerspruch.

2.) Γ^* ist maximal konsistent.

Sei $\varphi = \varphi_r$ eine beliebige Formel.

Wenn $\Gamma^* \cup \{\varphi_r\}$ konsistent ist,

dann ist auch $\Gamma_{r-1} \cup \{\varphi_r\}$ konsistent.

Also ist $\varphi_r \in \Gamma_r$ und damit $\varphi_r \in \Gamma^*$.

Folglich gibt es kein $\varphi \notin \Gamma^*$, so dass $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$ konsistent ist. $\square$

Schöne Eigenschaften maximaler konsistenter Mengen

Lemma 3.5 (Abgeschlossenheit unter Herleitbarkeit)

Jede maximale konsistente Formelmenge ist abgeschlossen unter Herleitbarkeit.
D.h. für jede maximal konsistente Formelmenge Γ *gilt:* $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$ *gdw.* $\alpha \in \Gamma$.

Beweis:
„$\Leftarrow$“: das gilt offensichtlich für jede Menge Γ.
„$\Rightarrow$“: Gelte $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.
Dann kann man aus Γ genau das Gleiche herleiten wie aus $\Gamma \cup \{\alpha\}$.
Da Γ konsistent ist, ist also $\Gamma \cup \{\alpha\}$ ebenfalls konsistent.
Da Γ *maximal* konsistent ist, folgt $\alpha \in \Gamma$. $\square$

Lemma 3.6 (maximale konsistente Mengen spiegeln die Semantik von $\rightarrow$)

Sei Γ maximal konsistent. Dann gilt $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ genau dann, wenn $\alpha \notin \Gamma$ oder $\beta \in \Gamma$.

($\Leftarrow$): Aus $\beta \in \Gamma$ folgt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \beta$.
Mit ($\rightarrow I$) folgt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha \rightarrow \beta$.

Aus $\alpha \notin \Gamma$ folgt $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{A}} \perp$ (da Γ maximal konsistent), und mit ($\rightarrow I$) dann $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \neg\alpha$.
Daraus folgt mit $\vdash_{\mathcal{A}} \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (2.5)(2) und ($\rightarrow E$) schließlich $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha \rightarrow \beta$.

In beiden Fällen folgt aus $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha \rightarrow \beta$ mit (3.5) dann $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$.

($\Rightarrow$): Aus $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ und $\alpha \in \Gamma$ folgt $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha \rightarrow \beta$ und $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.
Mit ($\rightarrow E$) erhalten wir daraus $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \beta$, und mit (3.5) schließlich $\beta \in \Gamma$. □

Folgerung 3.7

Für jede maximale konsistente Menge Γ und für jede Formel α gilt:
entweder $\alpha \in \Gamma$ oder $\neg\alpha \in \Gamma$ (und nicht $\alpha, \neg\alpha \in \Gamma$).

Schritt 3: Erfüllbarkeit maximal konsistenter Mengen

Lemma 3.8

Jede maximale konsistente Menge ist erfüllbar.

Beweis: Sei Γ eine maximale konsistente Menge.

Für jedes Atom A_i gilt entweder $A_i \in \Gamma$ oder $\neg A_i \in \Gamma$ (3.7).

Sei $\mathcal{B}_\Gamma$ die Belegung $\mathcal{B}_\Gamma = \{A_i \mid A_i \in \Gamma\}$.

Behauptung: $\mathcal{B}_\Gamma \models_{\mathcal{A}} \alpha$ genau dann, wenn $\alpha \in \Gamma$ (für jede Formel α).
Beweis mittels Induktion über den Formelaufbau von α.
IA: $\alpha = A_i$ ist ein Atom, oder $\alpha = \perp$: die Behauptung folgt aus der Definition von $\mathcal{B}_\Gamma$.
IS: $\alpha = \beta \to \gamma$, und für β und γ gilt die IV.

$\mathcal{B}_\Gamma \models_{\mathcal{A}} \alpha$	gdw.	$\mathcal{B}_\Gamma \not\models_{\mathcal{A}} \beta$ oder $\mathcal{B}_\Gamma \models \gamma$	(Semantik von $\to$)
	gdw.	$\beta \notin \Gamma$ oder $\gamma \in \Gamma$	(IV)
	gdw.	$\beta \to \gamma \in \Gamma$, also $\alpha \in \Gamma$	(3.6)

Mit der Behauptung folgt $\mathcal{B}_\Gamma \models_{\mathcal{A}} \Gamma$, d.h. $\mathcal{B}_\Gamma$ erfüllt Γ. $\square$

Schritt 4 und Schritt 5, und alles zusammen

Folgerung 3.9

Jede konsistente Menge ist erfüllbar.

Beweis:
Jede konsistente Menge besitzt eine maximal konsistente Obermenge (3.4), und diese Obermenge ist erfüllbar (3.8).
Jede Belegung, die eine Formelmenge M erfüllt, erfüllt auch jede Teilmenge von M. $\square$

Satz 3.10 (Vollständigkeitssatz für $\vdash_{\mathcal{A}}$ in der Aussagenlogik)

Für alle aussagenlogischen Formeln α und alle aussagenlogischen Formelmengen Γ gilt:

$\Gamma \models_{\mathcal{A}} \alpha$ *genau dann, wenn* $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Aus $\Gamma \nvdash_{\mathcal{A}} \alpha$ folgt, dass $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ erfüllbar ist ((3.2) und (3.9)).
Eine Belegung, die Γ und $\neg\alpha$ erfüllt, erfüllt Γ aber nicht α. Also folgt $\Gamma \not\models_{\mathcal{A}} \alpha$.

„$\Leftarrow$“: (2.4) $\square$

Was haben wir in Vorlesung 3 gelernt?

- Wir haben den Vollständigkeitssatz für das Natürliche Schließen in der Aussagenlogik gesehen und den Beweis verstanden.

3.3 Anhang: Schlussregeln für weitere Verknüpfungszeichen

Wir werden später auch mal Formeln mit $\wedge$ und $\vee$ herleiten.

Die folgenden Regeln sind alle korrekt.

Schlussregeln für $\wedge$ und $\vee$

Die Schlussregeln für $\wedge$ sind recht intuitiv.

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta}\;(\wedge I) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\;(\wedge E) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\;(\wedge E)$$

Die für $\vee$ nicht sofort ...

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\;(\vee I) \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\;(\vee I) \qquad \frac{\alpha \vee \beta \qquad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\beta]\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\varphi}\;(\vee E)$$

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \vee \neg\alpha$

α

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \vee \neg\alpha$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \neg\alpha}\ (\vee I)$$

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \vee \neg\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \neg\alpha}\,(\vee I) \qquad \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}{\bot}\,(\rightarrow E)$$

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \vee \neg\alpha$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]_1}{\alpha \vee \neg\alpha}\ (\vee I) \qquad \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}{\perp}\ (\to E)}{\neg\alpha}\ (\to I)_1
$$

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \vee \neg\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]_1}{\alpha \vee \neg\alpha}\ (\vee I) \qquad \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}{\bot}\ (\rightarrow E)}{\neg\alpha}\ (\rightarrow I)_1}{\alpha \vee \neg\alpha}\ (\vee I)$$

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \vee \neg\alpha$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]_1}{\alpha \vee \neg\alpha}\,(\vee I) \qquad \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}{\bot}\,(\to E)}{\neg\alpha}\,(\to I)_1}{\alpha \vee \neg\alpha}\,(\vee I) \qquad \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}{\bot}\,(\to E)
$$

$\vdash_{\mathcal{A}} \alpha \lor \neg\alpha$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{[\alpha]_1}{\alpha \lor \neg\alpha}\,(\lor I)
        \qquad [\neg(\alpha \lor \neg\alpha)]_2
      }{\bot}\,(\to E)
    }{\neg\alpha}\,(\to I)_1
  }{\alpha \lor \neg\alpha}\,(\lor I)
  \qquad [\neg(\alpha \lor \neg\alpha)]_2
}{
  \dfrac{\bot}{\alpha \lor \neg\alpha}\,(RAA)_2
}\,(\to E)
$$

$\vdash_{\mathcal{A}} ((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \to ((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma))$

$$
\dfrac{\dfrac{[(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \beta]_1}{\alpha}\,(\wedge E)}{\alpha \vee \gamma}\,(\vee I) \quad \dfrac{[\gamma]_1}{\alpha \vee \gamma}\,(\vee I)}{\alpha \vee \gamma}\,(\vee E)_1 \qquad \dfrac{[(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma]_3 \quad \dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \beta]_2}{\beta}\,(\wedge E)}{\beta \vee \gamma}\,(\vee I) \quad \dfrac{[\gamma]_2}{\beta \vee \gamma}\,(\vee I)}{\beta \vee \gamma}\,(\vee E)_2}{\dfrac{(\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)}{((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \to ((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma))}\,(\to I)_3}\,(\wedge I)
$$

Die $\vee$-Elimination

lässt sich auch mit $\to$ und $\bot$ aufschreiben

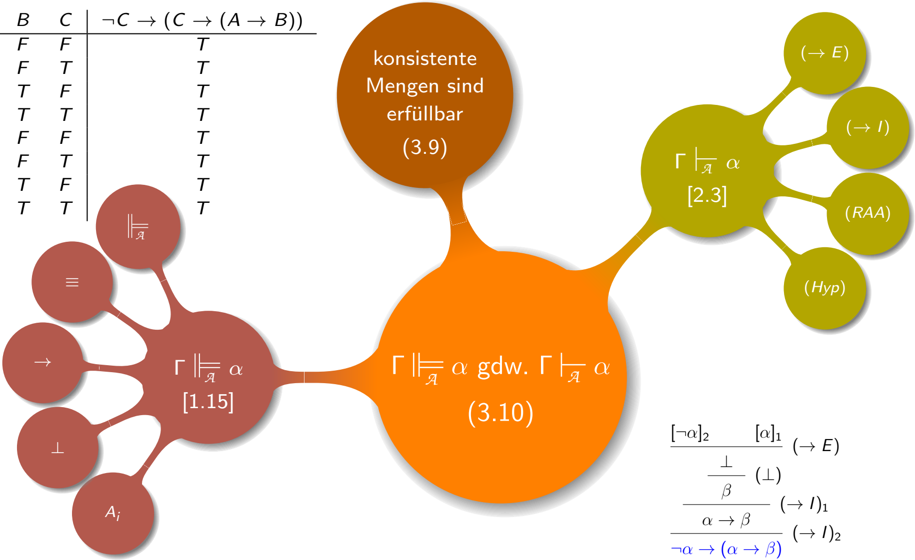
$$\dfrac{\neg\alpha \to \beta \qquad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\beta]\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\;(\vee E)$$

und als Abkürzung für folgendes ansehen.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\alpha \to \beta \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]_1\\ \vdots\\ \varphi\end{array} \quad [\neg\varphi]_3}{\bot}\;(\to E)}{\neg\alpha}\;(\to I)_1}{\beta}\;(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\beta]_2\\ \vdots\\ \varphi\end{array} \quad [\neg\varphi]_3}{\bot}\;(\to E)}{\neg\beta}\;(\to I)_2}{\dfrac{\bot}{\varphi}\;(RAA)_3}\;(\to E)$$

Aussagenlogik: Beweisen statt durchprobieren

A	B	C	$\neg C \to (C \to (A \to B))$
F	F	F	T
F	F	T	T
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]_2 \qquad [\alpha]_1}{\bot}\,(\to E)}{\beta}\,(\bot)}{\alpha \to \beta}\,(\to I)_1}{\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)}\,(\to I)_2$$

VL 4: Mini-Arithmetik: Aussagenlogik mit arithmetischen Atomen

Arithmetik ohne Variablen ist sehr einfach.

Die Formeln sind ähnlich wie in der Aussagenlogik:

- Atome sind Aussagen der Art „$2 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 + 5$“
  mit Termen aus dem Konstantensymbol 0 ,
  dem Nachfolgerfunktionssymbol s ,
  den Funktionssymbolen $+$ sowie $\cdot$,
  und Klammern.
- Atome und Formeln können wie in der Aussagenlogik zu Formeln verknüpft werden.
- Es gibt keine Variablen, keine Quantoren und
  keine Prädikatensymbole außer $=$.

Wir werden das Natürliche Schließen um Axiome und eine Regel für $=$ erweitern,
so dass es korrekt und vollständig für die variablenfreie Arithmetik wird.

1. Vollständigkeitssätze

4.1 Formeln der variablenfreien Arithmetik

Beispiele für variablenfreie arithmetische Terme:

- 0 (Konstantensymbol)
- $s(0)$ (s ist das Symbol für die Nachfolgerfunktion)
- $(0 + s(0))$ ($+$ ist das Symbol für die Additionsfunktion)
- $(s(0) \cdot s(0))$ ($\cdot$ ist das Symbol für die Multiplikationsfunktion)
- $(((s(s(0)) + s(0)) \cdot (s(0 + s(s(s(0)))))))$

Definition 4.1 (variablenfreie arithmetische Terme)

Variablenfreie arithmetische Terme sind induktiv definiert:

1. 0 ist ein variablenfreier arithmetischer Term.
2. Seien τ und σ variablenfreie arithmetische Terme.
   Dann sind auch $s(\tau)$, $(\tau + \sigma)$ und $(\tau \cdot \sigma)$ variablenfreie arithmetische Terme.

Abkürzende Schreibweisen für variablenfreie arithmetische Terme:

- „überflüssige“ Klammern können weggelassen werden
- Term $\overbrace{s(s(\ldots(s(}^{a\text{-mal „}s(\text{“}}0))\ldots))$ heißt *Zahlzeichen (Numeral)* und wird durch $\overline{a}$ abgekürzt (für $a \in \mathbb{N}$).

  Z.B. ist $\overline{2}$ Abkürzung für $s(s(0))$, und $\overline{0}$ ist Abkürzung für 0.
- $(\overline{2} + \overline{3}) \cdot \overline{4}$
- $s((\overline{2} + \overline{3}) \cdot \overline{4})$
- $((\overline{2} + \overline{3}) \cdot \overline{4}) + \overline{1}$

Wir erweitern die Sprache der Aussagenlogik,
indem wir den Begriff *Atom* neu definieren.

Definition 4.2 (Atome der variablenfreien Arithmetik)

Ein Atom der variablenfreien Arithmetik hat die Form $(\tau = \sigma)$
für variablenfreie arithmetische Terme τ und σ.

Definition 4.3 (Formeln der variablenfreien Arithmetik)

1. $\perp$ und alle Atome der variablenfreien Arithmetik sind Formeln der variablenfreien Arithmetik.
2. Wenn α und β Formeln der variablenfreien Arithmetik sind, dann ist auch $(\alpha \to \beta)$ eine Formel der variablenfreien Arithmetik.

Beispiele für Formeln:

- $((\ 0 = s(0) + s(s(0))\ ) \to ((s(s((s(0) \cdot s(0)))) = s(0)) \to \bot))$
  soll mit dem Standardmodell der natürlichen Zahlen stehen für
  „wenn $0 = 1 + 2$, dann $((1 \cdot 1) + 2) \neq 1$“ (umgangssprachlich)
- $\overline{0} = \overline{1} + \overline{2} \to ((\overline{1} \cdot \overline{1}) + \overline{2}) \neq \overline{1}$
- $0 = \overline{1 + 2} \to \overline{(1 \cdot 1) + 2} \neq \overline{1}$

Abkürzungen:

- $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\neg$ wie üblich
- $(\sigma \neq \tau)$ für $\neg(\sigma = \tau)$
- „überflüssige“ Klammern werden weggelassen

4.2 Semantik der variablenfreien Arithmetik

Das Standardmodell $\mathfrak{N}$ für die natürlichen Zahlen (informell)

In der Aussagenlogik haben wir uns
für *alle* Belegungen (=Modelle) gleichermaßen interessiert.

In der Arithmetik interessieren wir uns speziell für *ein* Modell:
das Standardmodell $\mathfrak{N}$ für die natürlichen Zahlen.

Jeder Term τ wird in $\mathfrak{N}$ zu einer natürlichen Zahl $\tau^{\mathfrak{N}}$ ausgewertet:

$$\tau^{\mathfrak{N}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \tau \text{ der Term } 0 \text{ ist} \\ \sigma^{\mathfrak{N}} + 1, & \text{falls } \tau \text{ der Term } s(\sigma) \text{ ist} \\ \sigma^{\mathfrak{N}} + \theta^{\mathfrak{N}}, & \text{falls } \tau \text{ der Term } (\sigma + \theta) \text{ ist} \\ \sigma^{\mathfrak{N}} \cdot \theta^{\mathfrak{N}}, & \text{falls } \tau \text{ der Term } (\sigma \cdot \theta) \text{ ist} \end{cases}$$

4.2 Semantik der variablenfreien Arithmetik

Das Standardmodell $\mathfrak{N}$ für die natürlichen Zahlen (informell)

In der Aussagenlogik haben wir uns
für *alle* Belegungen (=Modelle) gleichermaßen interessiert.

In der Arithmetik interessieren wir uns speziell für *ein* Modell:
das Standardmodell $\mathfrak{N}$ für die natürlichen Zahlen.

Jeder Term τ wird in $\mathfrak{N}$ zu einer natürlichen Zahl $\tau^{\mathfrak{N}}$ ausgewertet:

$$\tau^{\mathfrak{N}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \tau \text{ der Term } 0 \text{ ist} \\ \sigma^{\mathfrak{N}} + 1, & \text{falls } \tau \text{ der Term } s(\sigma) \text{ ist} \\ \sigma^{\mathfrak{N}} + \theta^{\mathfrak{N}}, & \text{falls } \tau \text{ der Term } (\sigma + \theta) \text{ ist} \\ \sigma^{\mathfrak{N}} \cdot \theta^{\mathfrak{N}}, & \text{falls } \tau \text{ der Term } (\sigma \cdot \theta) \text{ ist} \end{cases}$$

natürliche Zahlen und Operationen $+$ und $\cdot$ darauf

Damit können wir $\mathfrak{N} \models \varphi$ für Formeln φ der variablenfreien Arithmetik definieren
(die allgemeine Definition von $\models$ kommt später).

Die Relation $\models$ zwischen $\mathfrak{N}$ und Formeln der variablenfreien Arithmetik ist wie folgt definiert.

$\mathfrak{N} \not\models \bot$

$\mathfrak{N} \models \sigma = \tau$ gdw. $\sigma^{\mathfrak{N}} = \tau^{\mathfrak{N}}$

$\mathfrak{N} \models \alpha \to \beta$ gdw. $\mathfrak{N} \not\models \alpha$ oder $\mathfrak{N} \models \beta$

Lemma 4.4 (0 ist in $\mathfrak{N}$ kein Nachfolger einer Zahl)

Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{N} \models 0 \neq s(\overline{a})$.

Beweis:

Für alle $a \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{N} \models 0 \neq s(\overline{a})$

gdw. f.a. $a \in \mathbb{N} : 0 \neq a + 1$ (Semantik von Termen, $=$, $\rightarrow$ und $\perp$)

gdw. f.a. $a \in \mathbb{N} : -1 \neq a$ (ugs. Rechnung auf $\mathbb{N}$) [das ist eine wahre Aussage] $\square$

Lemma 4.5 (jede Zahl (außer 0) in $\mathfrak{N}$ hat genau einen Vorgänger)

Für alle $b, c \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} s(\overline{b}) = s(\overline{c}) \;\rightarrow\; \overline{b} = \overline{c}$.

Beweis:

Für alle $b, c \in \mathbb{N} : \mathfrak{N} \models s(\overline{b}) = s(\overline{c}) \;\rightarrow\; \overline{b} = \overline{c}$

gdw. f.a. $b, c \in \mathbb{N} : b + 1 \neq c + 1$ oder $b = c$ (Semantik von Termen, $=$, $\rightarrow$ und $\perp$)

gdw. f.a. $b, c \in \mathbb{N} : b \neq c$ oder $b = c$ (ugs. Rechnung auf $\mathbb{N}$) [wahre Aussage] $\square$

Modelle für die Arithmetik

...interpretieren jedes in einem variablenfreien arithmetischen Term vorkommende

• Funktionssymbol	durch	• eine Funktion
• Konstantensymbol		• ein Element des Universums

über einem Universum (nicht-leere Menge).

Solche Modelle bestehen also aus

Universum U	• $\mathbb{N}$
Funktion $f_s : U \to U$ für s	• $f_s(n) = n + 1$
Funktion $f_+ : U \times U \to U$ für $+$	• $f_+(a, b) = a + b$
Funktion $f_\cdot : U \times U \to U$ für $\cdot$	• $f_\cdot(a, b) = a \cdot b$
$c \in U$ für 0	• 0

Modelle für die Arithmetik

...interpretieren jedes in einem variablenfreien arithmetischen Term vorkommende

• Funktionssymbol	durch	• eine Funktion
• Konstantensymbol		• ein Element des Universums

über einem Universum (nicht-leere Menge).

Solche Modelle bestehen also aus

Universum U	• $\{1, 2\}$
Funktion $f_s : U \to U$ für s	• $f_s(n) = 2$ für alle $n \in U$
Funktion $f_+ : U \times U \to U$ für $+$	• $f_+(a, b) = \max(a, b)$
Funktion $f_\cdot : U \times U \to U$ für $\cdot$	• $f_\cdot(a, b) = \min(a, b)$
$c \in U$ für 0	• 1

Definition 4.6 (Modelle für arithmetische Formeln)

Ein Arithmetik-Modell $\mathfrak{A}$ ist eine Folge $\mathfrak{A} = \langle U, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, c\rangle$.
Dabei ist

- U eine nicht-leere Menge (*Universum*),
- $\mathcal{F}_1$ eine Funktion $U \to U$,
- $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_3$ Funktionen $U \times U \to U$, und
- c ein Element von U.

Zusätzlich hat $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft,
dass für jedes $v \in U$ ein Konstantensymbol $\tilde{v}$ mit $\tilde{v}^{\mathfrak{A}} = v$ benutzt werden kann.

Definition 4.7 (Wert $\tau^{\mathfrak{A}}$ eines variablenfreien Terms unter einem Modell)

Sei $\mathfrak{A} = \langle U, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, c \rangle$ ein Arithmetik-Modell
und τ ein variablenfreier arithmetischer Term.

τ wird von $\mathfrak{A}$ durch das Element $\tau^{\mathfrak{A}}$ des Universums U interpretiert. Es gilt:

$$\tau^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} c, & \text{falls } \tau \text{ der Term } 0 \text{ ist} \\ \mathcal{F}_1(\sigma^{\mathfrak{A}}), & \text{falls } \tau \text{ der Term } s(\sigma) \text{ ist} \\ \mathcal{F}_2(\sigma^{\mathfrak{A}}, \theta^{\mathfrak{A}}), & \text{falls } \tau \text{ der Term } (\sigma + \theta) \text{ ist} \\ \mathcal{F}_3(\sigma^{\mathfrak{A}}, \theta^{\mathfrak{A}}), & \text{falls } \tau \text{ der Term } (\sigma \cdot \theta) \text{ ist} \end{cases}$$

Definition 4.7 (Wert $\tau^{\mathfrak{A}}$ eines variablenfreien Terms unter einem Modell)

Sei $\mathfrak{A} = \langle U, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, c \rangle$ ein Arithmetik-Modell
und τ ein variablenfreier arithmetischer Term.

τ wird von $\mathfrak{A}$ durch das Element $\tau^{\mathfrak{A}}$ des Universums U interpretiert. Es gilt:

$$\tau^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} c, & \text{falls } \tau = 0 \\ \mathcal{F}_1(\sigma^{\mathfrak{A}}), & \text{falls } \tau = s(\sigma) \\ \mathcal{F}_2(\sigma^{\mathfrak{A}}, \theta^{\mathfrak{A}}), & \text{falls } \tau = (\sigma + \theta) \\ \mathcal{F}_3(\sigma^{\mathfrak{A}}, \theta^{\mathfrak{A}}), & \text{falls } \tau = (\sigma \cdot \theta) \end{cases}$$

Definition 4.8 (Erfüllungsrelation der variablenfreien Arithmetik)

Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell.

Die Erfüllungsrelation $\models_{\mathcal{P}}$ zwischen Arithmetik-Modellen und variablenfreien Formeln ist wie folgt definiert.

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A} & \not\models_{\mathcal{P}} & \perp & \\ \mathfrak{A} & \models_{\mathcal{P}} & \tau = \sigma & \text{gdw.} \quad \tau^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{A}} \\ \mathfrak{A} & \models_{\mathcal{P}} & \alpha \to \beta & \text{gdw.} \quad \mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{P}} \alpha \text{ oder } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \beta \end{array}$$

Die übrigen logischen Verknüpfungszeichen fassen wir wieder als Abkürzungen auf.

Beispiel: Sei $\mathfrak{B} = \langle U, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, c\rangle$ ein Arithmetik-Modell mit

- $U = \{\clubsuit, \spadesuit\}$
- $\mathcal{F}_1(\clubsuit) = \spadesuit$ und $\mathcal{F}_1(\spadesuit) = \clubsuit$
- $\mathcal{F}_2(x, y) = \begin{cases} \spadesuit, & \text{falls } \spadesuit \in \{x, y\} \\ \clubsuit, & \text{sonst} \end{cases}$ und $\mathcal{F}_3(x, y) = \begin{cases} \clubsuit, & \text{falls } \spadesuit \in \{x, y\} \\ \spadesuit, & \text{sonst} \end{cases}$
- $c = \clubsuit$

Behauptung (1): $\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} 0 \neq 0 \cdot s(0)$.

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} 0 \neq 0 \cdot s(0)} \\
\quad \text{gdw.} & 0^{\mathfrak{B}} \neq (0 \cdot s(0))^{\mathfrak{B}} & \text{(Semantik von $=$, $\rightarrow$ und $\bot$)} \\
\quad \text{gdw.} & \clubsuit \neq \mathcal{F}_3(\clubsuit, \mathcal{F}_1(\clubsuit)) & \text{(Semantik von Termen)} \\
\quad \text{gdw.} & \clubsuit \neq \mathcal{F}_3(\clubsuit, \spadesuit) & \text{(ugs. Rechnung mit $\mathcal{F}_1$)} \\
\quad \text{gdw.} & \clubsuit \neq \clubsuit & \text{(ugs. Rechnung mit $\mathcal{F}_3$)} \quad \text{[das ist eine falsche Aussage]}
\end{array}
$$

Also ist Behauptung (1) falsch.

Beispiel: Sei $\mathfrak{B} = \langle U, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, c\rangle$ ein Arithmetik-Modell mit

- $U = \{\clubsuit, \spadesuit\}$
- $\mathcal{F}_1(\clubsuit) = \spadesuit$ und $\mathcal{F}_1(\spadesuit) = \clubsuit$
- $\mathcal{F}_2(x,y) = \begin{cases} \spadesuit, & \text{falls } \spadesuit \in \{x,y\} \\ \clubsuit, & \text{sonst} \end{cases}$ und $\mathcal{F}_3(x,y) = \begin{cases} \clubsuit, & \text{falls } \spadesuit \in \{x,y\} \\ \spadesuit, & \text{sonst} \end{cases}$
- $c = \clubsuit$

Behauptung (2): für alle $a \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} 0 \neq s(\bar{a})$.

Wir zeigen $\mathfrak{B} \not\models_{\mathcal{P}} 0 \neq s(\bar{1})$.
Folglich ist Behauptung (2) falsch.

$\mathfrak{B} \not\models_{\mathcal{P}} 0 \neq s(\bar{1})$

gdw.	$\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} 0 = s(\bar{1})$	(Semantik von $\rightarrow$ und $\perp$)	
gdw.	$0^{\mathfrak{B}} = (s(\bar{1}))^{\mathfrak{B}}$	(Semantik von $=$)	
gdw.	$\clubsuit = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_1(\clubsuit))$	(Semantik von Termen)	
gdw.	$\clubsuit = \clubsuit$	(ugs. Rechnung mit $\mathcal{F}_1$)	[das ist eine wahre Aussage]

Definition 4.9 (Gültigkeit, Äquivalenz, Konsequenz)

Für Formeln α, β, φ, Mengen Γ von Formeln und Arithmetik-Modelle $\mathfrak{A}$ benutzen wir die folgenden Schreibweisen (entsprechend zur Aussagenlogik):

$\models_{\mathcal{P}} \alpha$ gdw. $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ für alle Arithmetik-Modelle $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma$ gdw. $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi$ für alle Formeln $\varphi \in \Gamma$

$\Gamma \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha$ gdw. für alle Arithmetik-Modelle $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma$ gilt $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha$

$\alpha \equiv \beta$ gdw. $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \beta$ für alle Arithmetik-Modelle $\mathfrak{A}$

4.3 Natürliches Schließen für die variablenfreie Prädikatenlogik

Wir erweitern das Natürliche Schließen für die Aussagenlogik um Axiome und Regeln für die „neuen“ überall gleichbedeutenden Bestandteile variablenfreier arithmetischer Formeln:

- Axiome und Regeln für $=$

Am Ende werden wir das natürliche Schließen $\vdash_{v\mathcal{P}}$ für die Definition der Mini-Arithmetik benutzen.

Ersetzung von Termen

Für eine variablenfreie Formel φ, Term τ und Term σ erhält man die Formel $\varphi_{[\tau\leftarrow\sigma]}$, indem man ein Vorkommen von σ in φ durch τ ersetzt.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\varphi &= (s(0)+s(s(0)))\cdot s(0) = s(s(s(0))\cdot s(s(0))) \rightarrow s(0) = s(s(0))\\
\sigma &= s(s(0))\\
\tau &= s(s(0+s(0)))
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\varphi_{[\tau\leftarrow\sigma]} & \text{ist} & (s(0)+s(s(0+s(0))))\cdot s(0) = s(s(s(0))\cdot s(s(0))) \rightarrow s(0) = s(s(0))\\
& \text{oder} & (s(0)+s(s(0)))\cdot s(0) = s(s(s(0+s(0)))\cdot s(s(0))) \rightarrow s(0) = s(s(0))\\
& \text{oder} & (s(0)+s(s(0)))\cdot s(0) = s(s(s(0))\cdot s(s(0+s(0)))) \rightarrow s(0) = s(s(0))\\
& \text{oder} & (s(0)+s(s(0)))\cdot s(0) = s(s(s(0))\cdot s(s(0))) \rightarrow s(0) = s(s(0+s(0)))
\end{array}$$

Axiome und Schlussregeln für $=$

- $\tau = \tau$ für jeden Term τ wird zu den Axiomen hinzugenommen.

(Das entspricht einer *$=$-Introduktion*.)

Die Gleichheits-Elimination für variablenfreie Formeln wird zu den Regeln hinzugenommen. Sie erlaubt das Ersetzen eines Terms in einer Formel durch einen beweisbar gleichen Term. Für Terme τ und σ, für Formel φ und Formelmengen Γ und Δ:

$$\frac{\sigma = \tau \qquad\qquad \varphi}{\varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}}\ (= E') \qquad\qquad \frac{\Gamma \blacktriangleright \sigma = \tau \qquad\qquad \Delta \blacktriangleright \varphi}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright \varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}}\ (= E')$$

Definition 4.10 (Natürliches Schließen für die variablenfreie Prädikatenlogik $\vdash_{v\mathcal{P}}$)

Sei φ eine variablenfreie Formel und Γ sei eine Menge solcher Formeln.
$\Gamma \vdash_{v\mathcal{P}} \varphi$ ist Kurzschreibweise für $\Gamma \vdash \varphi$ aus folgenden Axiomen und Schlussregeln:

1. Die *Axiome* sind
   - Sequenten $\alpha \blacktriangleright \alpha$ für alle variablenfreien Formeln α, und
   - Sequenten $\blacktriangleright \tau = \tau$ für alle variablenfreien Terme τ.
2. Die *Schlussregeln* sind $(\rightarrow I)$, $(\rightarrow E)$, (RAA), (Hyp) und $(= E')$.

Beispiel: Symmetrie und Transitivität von $=$

Lemma 4.11 (Symmetrie und Transitivität von $=$ sind herleitbar)

Seien σ und τ variablenfreie Terme. Dann gilt:

1. $\sigma = \tau \vdash_{v\mathcal{P}} \tau = \sigma$
2. $\sigma = \tau, \tau = \theta \vdash_{v\mathcal{P}} \sigma = \theta$

Beweis zu 1.:

(1)	$\sigma = \tau \blacktriangleright \sigma = \tau$	Axiom von $\vdash_{v\mathcal{P}}$
(2)	$\blacktriangleright \sigma = \sigma$	Axiom von $\vdash_{v\mathcal{P}}$
(3)	$\sigma = \tau \blacktriangleright \tau = \sigma$	$(= E')(1)(2)$

Beweis zu 2.:

(1)	$\sigma = \tau \blacktriangleright \tau = \sigma$	(4.11(1))
(2)	$\tau = \theta \blacktriangleright \tau = \theta$	Axiom von $\vdash_{v\mathcal{P}}$
(3)	$\sigma = \tau, \tau = \theta \blacktriangleright \sigma = \theta$	$(= E')(1)(2)$

□

4.4 Die Mini-Arithmetik

Die Axiome und Schlussregeln von $\vdash_{v\mathcal{P}}$ behandeln die in der Prädikatenlogik vorkommenden Bestandteile von Formeln.

Im Folgenden wird noch eine zusätzliche Menge $\mathcal{M}$ von Axiomen angegeben,
die die „arithmetischen" Bestandteile der Formeln behandelt.

Die *Mini-Arithmetik* ist das Natürliche Schließen für die variablenfreie Prädikatenlogik mit der zusätzlichen Axiomenmenge $\mathcal{M}$.

Die Definition von $\mathcal{M}$ ist in 3 Teile aufgeteilt:

- Definition (4.12): Axiome für s
- Definition (4.17): Axiome für $+$
- Definition (4.20): Axiome für $\cdot$

Wenn man Formel α mit $\vdash_{v\mathcal{P}}$ aus $\mathcal{M}$ herleiten kann,
schreiben wir $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$ (wie üblich).

Axiome in $\mathcal{M}$ für das Funktionssymbol s

Definition 4.12 (Teil 1 der Definition von $\mathcal{M}$: Axiome für s)

Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ sind die folgenden Formeln in $\mathcal{M}$:

1. $\neg(0 = s(\overline{a}))$, d.h. $0 \neq s(\overline{a})$
2. $s(\overline{b}) = s(\overline{c}) \ \rightarrow\ \overline{b} = \overline{c}$

In Lemmas (4.4) und (4.5) haben wir bereits gezeigt:

Lemma 4.13 ($\mathfrak{N}$ erfüllt die Axiome für s)

Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} 0 \neq s(\overline{a})$ und $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} s(\overline{b}) = s(\overline{c}) \ \rightarrow\ \overline{b} = \overline{c}$.

Man kann Herleitungen machen wie gewohnt, z.B. für:

Lemma 4.14

$\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \; \overline{b} \neq \overline{c} \;\to\; s(\overline{b}) \neq s(\overline{c})$ *für alle* $b, c \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Zur Vereinfachung schreiben wir Axiome aus $\mathcal{M}$ nicht in die Hypothesenmenge.

(1) ▶ $s(\overline{b}) = s(\overline{c}) \;\to\; \overline{b} = \overline{c}$ — $\mathcal{M}$-Axiom
(2) ▶ $(s(\overline{b}) = s(\overline{c}) \to \overline{b} = \overline{c}) \to (\overline{b} \neq \overline{c} \to s(\overline{b}) \neq s(\overline{c}))$ — Theorem $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
(3) ▶ $\overline{b} \neq \overline{c} \to s(\overline{b}) \neq s(\overline{c})$ — $(\to E)(1)(2)$ □

Lemma 4.15 (Gleichheit von Zahlzeichen ist herleitbar)

Für jedes $a \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \overline{a} = \overline{a}$.

Beweis:
Sei $a \in \mathbb{N}$.
Die folgende Herleitung zeigt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \overline{a} = \overline{a}$:
▶ $\overline{a} = \overline{a}$ (Axiom von $\vdash_{v\mathcal{P}}$) □

Lemma 4.16 (Ungleichheit von Zahlzeichen ist herleitbar)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $a \neq b$ *gilt:* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \neg(\overline{a} = \overline{b})$.

Beweis: sei $a < b$. Dann ist $a + k = b$ für ein $k > 0$.
Die Formel $\overline{a} \neq \overline{b}$ ist dann $\overline{a} \neq \overline{k + a}$, und $\overline{k}$ ist $s(\overline{k-1})$.
Wir können $\overline{a} \neq \overline{k + a}$ wie folgt herleiten.

(1)	▶ $0 \neq \overline{k}$	$\mathcal{M}$-Axiom
(2)	▶ $0 \neq \overline{k} \rightarrow \overline{1} \neq \overline{k+1}$	(4.14)
(3)	▶ $\overline{1} \neq \overline{k+1}$	$(\rightarrow E)(1)(2)$
(4)	▶ $\overline{1} \neq \overline{k+1} \rightarrow \overline{2} \neq \overline{k+2}$	(4.14)
(5)	▶ $\overline{2} \neq \overline{k+2}$	$(\rightarrow E)(3)(4)$
⋮	⋮ ⋮	
(2a+1)	▶ $\overline{a} \neq \overline{k+a}$	$(\rightarrow E)(2a-1)(2a)$

Damit folgt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \neg(\overline{a} = \overline{b})$.
Falls $a > b$, geht der Beweis entsprechend mit vertauschten Rollen von a und b. □

Axiome in $\mathcal{M}$ für das Funktionssymbol $+$

Definition 4.17 (Teil 2 von $\mathcal{M}$: Axiome für $+$)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ sind die folgenden Formeln in $\mathcal{M}$:

3. $\overline{a} + 0 = \overline{a}$
4. $\overline{a} + s(\overline{b}) = s(\overline{a} + \overline{b})$

Lemma 4.18 ($\mathfrak{N}$ erfüllt die Axiome für $+$)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \overline{a} + 0 = \overline{a}$ und $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \overline{a} + s(\overline{b}) = s(\overline{a} + \overline{b})$.

Lemma 4.19 (Summe von Zahlzeichen ist herleitbar)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \overline{b} + \overline{a} = \overline{b+a}$.

Beweis mittels Induktion über a.

IA: $a = 0$.

(1) ▶ $\overline{b} + 0 = \overline{\underbrace{b+0}_{=b}}$ ($\mathcal{M}$-Axiom)

(Welche Zeichen gehören zur Mini-Arithmetik, und welche sind umgangssprachlich?!?)

IV: für alle $a \leqslant k$ und alle $b \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \overline{b} + \overline{a} = \overline{b+a}$.

IS: $a = k+1$. Zu zeigen: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \overline{b} + \overline{k+1} = \overline{b+k+1}$.

Dann ist $\overline{k+1}$ der Term $s(\overline{k})$.

(1) ▶ $\overline{b} + \overline{k+1} = s(\overline{b} + \overline{k})$ ($\mathcal{M}$-Axiom)
(2) ▶ $\overline{b} + \overline{k} = \overline{b+k}$ (IV)
(3) ▶ $\overline{b} + \overline{k+1} = \underbrace{s(\overline{b+k})}_{\overline{b+k+1}}$ $(= E')(2)(1)$

□

Axiome in $\mathcal{M}$ für das Funktionssymbol $\cdot$

Definition 4.20 (Teil 3 von $\mathcal{M}$: Axiome für $\cdot$)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ sind die folgenden Formeln in $\mathcal{M}$:

5. $\overline{a} \cdot 0 = 0$

6. $\overline{a} \cdot s(\overline{b}) = (\overline{a} \cdot \overline{b}) + \overline{a}$

Damit ist die Definition von $\mathcal{M}$ abgeschlossen.

Lemma 4.21 ($\mathfrak{N}$ erfüllt die Axiome für $\cdot$)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ *gilt* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \overline{a} \cdot 0 = 0$ *und* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \overline{a} \cdot s(\overline{b}) = (\overline{a} \cdot \overline{b}) + \overline{a}$.

Lemma 4.22 (Produkt von Zahlzeichen ist herleitbar)

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$.

Arithmetik-Modelle, die $\mathcal{M}$ erfüllen

Lemmas (4.13), (4.18) und (4.21) zusammen besagen

Folgerung 4.23 (Das Standardmodell $\mathfrak{N}$ erfüllt die Axiomenmenge $\mathcal{M}$)

$\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{M}$

Es gibt aber auch andere Arithmetik-Modelle mit dieser Eigenschaft.

$\mathfrak{B}_0 = \langle \mathbb{Z}, f_1, f_2, f_3, 0 \rangle$

$$\text{mit } f_1(z) = z + 1 \text{ (auf } \mathbb{Z}\text{)},\ f_2(y,z) = y + z,\ f_3(y,z) = y \cdot z \text{ (auf } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\text{)}$$

- für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{B}_0 \models_{\mathcal{P}} 0 \neq s(\overline{a})$, da für alle $a \in \mathbb{N} : -1 \neq a$
- $\mathfrak{B}_0 \models_{\mathcal{P}} \mathcal{M}$
- „für alle $u \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathfrak{B}_0 \models_{\mathcal{P}} 0 \neq s(\tilde{u})$“ ist falsch

$\mathfrak{B}_1 = \langle \mathbb{N} \cup \{a_0\}, g_1, g_2, g_3, 0\rangle$ für ein $a_0 \notin \mathbb{N}$ mit

$$g_1(n) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \\ a_0, & \text{falls } n = a_0 \end{cases}$$

$$g_2(n,m) = \begin{cases} m+n, & \text{falls } m,n \in \mathbb{N} \\ a_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_3(n,m) = \begin{cases} m \cdot n, & \text{falls } m,n \in \mathbb{N} \\ a_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathfrak{B}_1$ erfüllt $\mathcal{M}$,
da für alle Zahlzeichen das „richtige" gemacht wird
und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_0 \neq \overline{n}^{\mathfrak{B}_1}$.

$\mathfrak{B}_1$ erfüllt nicht „für alle $u \in \mathbb{N} \cup \{a_0\}$ gilt $\mathfrak{B}_1 \models_{\mathcal{P}} \tilde{u} \cdot 0 = 0$".

Die Mini-Arithmetik

Die Mini-Arithmetik ist das Natürliche Schließen für die variablenfreie Prädikatenlogik $\underset{v\mathcal{P}}{\vdash}$ mit den zusätzlichen Arithmetik-Axiomen $\mathcal{M}$.

Wir sind nun an Korrektheit und Vollständigkeit der Mini-Arithmetik interessiert.

- Korrektheit: aus $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \underset{\mathcal{P}}{\Vdash\!\!\!\models} \alpha$
- Vollständigkeit: aus $\mathcal{M} \underset{\mathcal{P}}{\Vdash\!\!\!\models} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \alpha$

Das wird in der nächsten Vorlesung gezeigt (Satz 5.7).

Die Mini-Arithmetik

Die Mini-Arithmetik ist das Natürliche Schließen für die variablenfreie Prädikatenlogik $\underset{v\mathcal{P}}{\vdash}$ mit den zusätzlichen Arithmetik-Axiomen $\mathcal{M}$.

Wir sind nun an Korrektheit und Vollständigkeit der Mini-Arithmetik interessiert.

- Korrektheit: aus $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \underset{\mathcal{P}}{\Vdash\!\!=} \alpha$
  („aus $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \alpha$ folgt $\mathfrak{N} \underset{\mathcal{P}}{\models} \alpha$“ wollen wir eigentlich nur wissen ...)
- Vollständigkeit: aus $\mathcal{M} \underset{\mathcal{P}}{\Vdash\!\!=} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \alpha$
  („aus $\mathfrak{N} \underset{\mathcal{P}}{\models} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \alpha$“ wollen wir eigentlich nur wissen ...)

Das wird in der nächsten Vorlesung gezeigt (Satz 5.7).

Vorlesung 5: Der Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik

Wir werden zeigen, dass man mit den Axiomen der Mini-Arithmetik genau die Formeln beweisen kann, die vom Standardmodell der natürlichen Zahlen erfüllt werden.

Das ist der *Vollständigkeitssatz* der Mini-Arithmetik (5.7).

Die Korrektheit („alle beweisbaren Formeln sind wahr“) zeigen wir sogar – wie in der Aussagenlogik – für beliebige Mengen von Axiomen/Hypothesen (5.1).
Die Argumentation wird durch diese Verallgemeinerung nicht schwieriger.

Bei der Vollständigkeit („alle wahren Formeln sind beweisbar“) beschränken wir uns auf die Axiome $\mathcal{M}$ der Mini-Arithmetik.

In beiden Fällen bauen wir auf unsere Kenntnisse aus der Aussagenlogik.

1. Vollständigkeitssätze

5.1 Die Korrektheit der Mini-Arithmetik

Die Korrektheit der Mini-Arithmetik hat nichts mit Arithmetik zu tun ...

Lemma 5.1 (Korrektheit von $\vdash_{v\mathcal{P}}$ für die variablenfreie Prädikatenlogik)

Sei α eine variablenfreie arithmetische Formel und Γ eine Menge variablenfreier arithmetischer Formeln.

Dann gilt: *wenn $\Gamma \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$, dann $\Gamma \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha$.*

Beweisskizze:

α kann als aussagenlogische Formel mit der abzählbaren Atommenge

$$\{\sigma = \tau \mid \sigma, \tau \text{ sind variablenfreie arithmetische Terme}\}$$

aufgefasst werden.

Γ ist eine entsprechende Menge aussagenlogischer Formeln.

$\vdash_{v\mathcal{P}}$ ist also eine Erweiterung von $\vdash_{\mathcal{A}}$ um Axiome ▶ $\tau = \tau$ und Regel $(= E')$.

Deshalb reicht zum Beweis dieses Lemmas eine Erweiterung des Beweises der Korrektheit von $\vdash_{\mathcal{A}}$ (2.4) um die zusätzlichen Axiome und die zusätzliche Regel.

Der Beweis von (2.4) geht mittels Induktion über die Länge der Herleitung für $\Gamma \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$.

Erweiterung des Induktionsanfangs:
in einer Herleitung der Länge 1 kann ein Sequent $\blacktriangleright \tau = \tau$ hergeleitet werden.
Aufgrund der Semantik der variablenfreien Arithmetik gilt $\models_{\mathcal{P}} \tau = \tau$.
Damit folgt $\Gamma \Vdash_{\mathcal{P}} \tau = \tau$.

Erweiterung des Induktionsschlusses:
Wir betrachten eine Herleitung der Länge $n + 1$.
Fall 6: im letzten Herleitungsschritt wird ein Axiom $\blacktriangleright \tau = \tau$ benutzt.
Dann folgt $\Gamma \Vdash_{\mathcal{P}} \tau = \tau$ wie im Induktionsanfang.

Fall 7: im letzten Herleitungsschritt wird die Regel $(= E')$ benutzt.
Also entsteht $\Gamma' \blacktriangleright \varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}$ für ein $\Gamma' \subseteq \Gamma$ aus $\Delta \blacktriangleright \sigma = \tau$ und $\Theta \blacktriangleright \varphi$ für $\Gamma' = \Delta \cup \Theta$.
Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell mit $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma$.
Nach IV gilt $\Delta \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$ und $\Theta \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi$, also $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$ und $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi$.
Sei A das Atom in φ, das in $\varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}$ als Atom $A_{[\tau \leftarrow \sigma]}$ vorkommt.
Mit $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$ folgt $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} A$ gdw. $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} A_{[\tau \leftarrow \sigma]}$.
Da alle anderen Atome von φ und $\varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}$ gleich sind und $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi$, folgt $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}$.
Insgesamt folgt daraus $\Gamma \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi_{[\tau \leftarrow \sigma]}$. $\square$

5.2 Die Vollständigkeit der Mini-Arithmetik

Wir wollen zeigen (5.6):

wenn $\mathcal{M} \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{P}} \alpha$, dann $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$ für jede variablenfreie arithmetische Formel α.

Dazu gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{M} \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{P}} \alpha & \stackrel{(4.23)}{\Rightarrow} & \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha & \\
& \stackrel{(5.3)}{\Rightarrow} & L^* \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{A}} \alpha \text{ und } \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} L^* & \text{für die Menge } L^* \text{ aller von } \mathfrak{N} \text{ erfüllten Literale} \\
& \stackrel{(3.10)(5.5)}{\Rightarrow} & L^* \vdash_{\mathcal{A}} \alpha \text{ und } \mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \lambda & \text{für jedes Literal } \lambda \in L^* \\
& \Rightarrow & \mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha &
\end{array}$$

Schritt 2: von der Mini-Arithmetik zur Aussagenlogik

Sei At die Menge aller variablenfreier arithmetischer Atome.
Eine variablenfreie arithmetische Formel kann auch als aussagenlogische Formel mit Atomen At aufgefasst werden.
Dann lässt sich $\mathfrak{N}$ in eine aussagenlogische Formelmenge übertragen.

Definition 5.2 (L^* ist die Menge der von $\mathfrak{N}$ erfüllten Literale der varfreien Arithmetik)

Die Menge

$$L^* = \{A \mid A \in At, \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} A\} \cup \{\neg A \mid A \in At, \mathfrak{N} \not\models_{\mathcal{P}} A\}$$

ist die Menge aller variablenfreier arithmetischer Literale (d.h. Atome und negierte Atome), die von $\mathfrak{N}$ erfüllt werden.

L^* kann sowohl als Menge variablenfreier arithmetischer Literale als auch als Menge aussagenlogischer Literale aufgefasst werden.

Lemma 5.3 (Zusammenhang zwischen Mini-Arithmetik und Aussagenlogik)

Sei α eine varfreie arithmetische Formel. Dann gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ genau dann, wenn $L^* \Vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

Beweis:

Es gibt nur genau eine (aussagenlogische) Belegung, die L^* erfüllt: $\mathcal{B}_0 = L^* \cap At$.

Deshalb reicht es, zu zeigen: $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ gdw. $\mathcal{B}_0 \models_{\mathcal{A}} \alpha$.

Wir führen den Beweis mittels Induktion über den aussagenlogischen Formelaufbau.

IA: $\alpha = \bot$: es gilt $\mathfrak{N} \not\models_{\mathcal{P}} \bot$ und $\mathcal{B}_0 \not\models_{\mathcal{A}} \bot$.

$\alpha \in At$: $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ gdw. $\alpha \in \mathcal{B}_0$ gdw. $\mathcal{B}_0 \models_{\mathcal{A}} \alpha$.

IV: Für β und γ gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta$ gdw. $\mathcal{B}_0 \models_{\mathcal{A}} \beta$ und $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \gamma$ gdw. $\mathcal{B}_0 \models_{\mathcal{A}} \gamma$.

IS: $\alpha = \beta \to \gamma$. Dann gilt

$$
\begin{array}{llll}
\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta \to \gamma & \text{gdw.} & \mathfrak{N} \not\models_{\mathcal{P}} \beta \text{ oder } \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \gamma & (\text{Semantik von } \models_{\mathcal{P}}) \\
& \text{gdw.} & \mathcal{B}_0 \not\models_{\mathcal{A}} \beta \text{ oder } \mathcal{B}_0 \models_{\mathcal{A}} \gamma & (\text{IV}) \\
& \text{gdw.} & \mathcal{B}_0 \models_{\mathcal{A}} \beta \to \gamma & (\text{Semantik von } \models_{\mathcal{A}})
\end{array}
$$

□

Schritt 3: von $\mathfrak{N}$ erfüllte Literale sind aus $\mathcal{M}$ herleitbar

Lemma 5.4 (Atome aus $\mathcal{M}$ herleiten ist wie Terme ausrechnen)

Für alle variablenfreien Terme τ gilt: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \tau = \overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$.

Beweis: mittels Induktion über den Aufbau von τ.
IA: τ ist 0. Zu zeigen: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} 0 = 0$.
Die Herleitung von $0 = 0$ besteht aus dem Axiom ▶ $0 = 0$.

IV: Für Terme σ und θ gilt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \sigma = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}}$ und $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \theta = \overline{\theta^{\mathfrak{N}}}$.

IS: z.z.: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \tau = \overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$ für jeden Term τ, der in einem Schritt aus σ und θ gebildet werden kann.
Fall 1: τ ist $s(\sigma)$. Zu zeigen: $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} s(\sigma) = \overline{s(\sigma)^{\mathfrak{N}}}$.

(1) ▶ $s(\sigma) = s(\sigma)$
(2) ▶ $s(\sigma) = s(\overline{\sigma^{\mathfrak{N}}})$ $\quad (= E')(1)(\mathrm{IV})$
▶ $s(\sigma) = \overline{s(\sigma)^{\mathfrak{N}}}$ $\quad$ (andere Schreibweise für (2))

Fall 2: τ ist $(\sigma + \theta)$. Zu zeigen: $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \sigma + \theta = \overline{(\sigma + \theta)^{\mathfrak{N}}}$.

(1) ▶ $\sigma + \theta = \sigma + \theta$

(2) ▶ $\sigma + \theta = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}} + \theta$ (= E')(1)(IV)

(3) ▶ $\sigma + \theta = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}} + \overline{\theta^{\mathfrak{N}}}$ (= E')(2)(IV)

(4) ▶ $\overline{\sigma^{\mathfrak{N}}} + \overline{\theta^{\mathfrak{N}}} = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}} + \theta^{\mathfrak{N}}}$ (Lemma 4.19)

▶ $\overline{\sigma^{\mathfrak{N}}} + \overline{\theta^{\mathfrak{N}}} = \overline{(\sigma + \theta)^{\mathfrak{N}}}$ (andere Schreibweise für (4))

(5) ▶ $\sigma + \theta = \overline{(\sigma + \theta)^{\mathfrak{N}}}$ (= E')(3)(4)

Fall 3: τ ist $(\sigma \cdot \theta)$. Zu zeigen: $\mathcal{M} \underset{v\mathcal{P}}{\vdash} \sigma \cdot \theta = \overline{(\sigma \cdot \theta)^{\mathfrak{N}}}$.

Das geht ähnlich wie in Fall 2 mit Lemma 4.22. $\square$

Lemma 5.5 (von $\mathfrak{N}$ erfüllte varfreie arithmetische Literale sind aus $\mathcal{M}$ herleitbar)

Sei $\tau = \sigma$ ein variablenfreies arithmetisches Atom.

1. *Falls* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau = \sigma$, *dann* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \tau = \sigma$.
2. *Falls* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau \neq \sigma$, *dann* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \tau \neq \sigma$.

Beweis:

zu 1.: Gelte $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau = \sigma$.

(1) ▶ $\tau = \overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$ (5.4)

(2) ▶ $\sigma = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}}$ (5.4)

(3) ▶ $\overline{\sigma^{\mathfrak{N}}} = \sigma$ (4.11)(2) (Reflexivität von $=$)

(4) ▶ $\tau = \sigma$ $(= E')$(1)(3) (aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau = \sigma$ folgt $\tau^{\mathfrak{N}} = \sigma^{\mathfrak{N}}$ – d.h. $\overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$ ist der gleiche Term wie $\overline{\sigma^{\mathfrak{N}}}$)

Lemma 5.5 (von $\mathfrak{N}$ erfüllte varfreie arithmetische Literale sind aus $\mathcal{M}$ herleitbar)

Sei $\tau = \sigma$ ein variablenfreies arithmetisches Atom.

1. *Falls* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau = \sigma$, *dann* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \tau = \sigma$.
2. *Falls* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau \neq \sigma$, *dann* $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \tau \neq \sigma$.

Beweis:

zu 2.: Gelte $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau \neq \sigma$.

(1)		$\blacktriangleright\ \tau = \overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$	(5.4)
(2)		$\blacktriangleright\ \sigma = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}}$	(5.4)
(3)	$\tau = \sigma$	$\blacktriangleright\ \tau = \sigma$	
(4)	$\tau = \sigma$	$\blacktriangleright\ \overline{\tau^{\mathfrak{N}}} = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}}$	$(= E')$(1 und 2)(3)
(5)		$\blacktriangleright\ \neg(\overline{\tau^{\mathfrak{N}}} = \overline{\sigma^{\mathfrak{N}}})$	(4.16) (aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \tau \neq \sigma$ folgt $\tau^{\mathfrak{N}} \neq \sigma^{\mathfrak{N}}$)
(6)	$\tau = \sigma$	$\blacktriangleright\ \perp$	$(\to E)$(4)(5)
(7)		$\blacktriangleright\ \tau \neq \sigma$	$(\to I)$(6)

$\square$

Lemma 5.6 (von $\mathfrak{N}$ erfüllte Formeln sind aus $\mathcal{M}$ herleitbar)

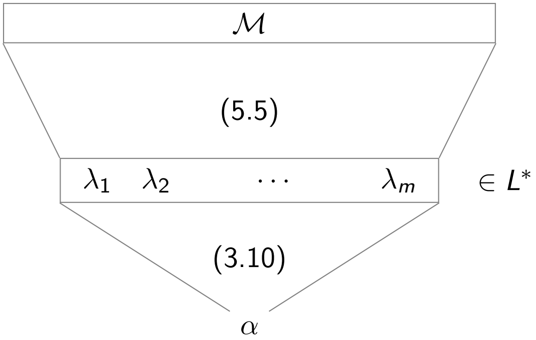
Für alle variablenfreien Formeln α gilt: wenn $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$, dann $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$.

Beweis: Sei α eine variablenfreie arithmetische Formel mit $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$.
Nach (5.3) folgt $L^* \Vert\!\models_{\mathcal{A}} \alpha$.
Mit (3.10) folgt daraus $L^* \vdash_{\mathcal{A}} \alpha$.

Für jedes Literal $\lambda \in L^*$ gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \lambda$ (aufgrund der Definition von L^*),
und mit (5.5) folgt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \lambda$.

Nimm nun die Herleitung von α aus L^*
und ersetze darin jede Benutzung einer Hypothese $\lambda \blacktriangleright \lambda$ für $\lambda \in L^*$
durch o.g. Herleitung von λ aus $\mathcal{M}$.

Graphische Darstellung der Herleitung von α mit $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ aus $\mathcal{M}$:



Diese Herleitung zeigt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$. $\square$

5.3 Der Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik

Satz 5.7 (Vollständigkeitssatz für die Mini-Arithmetik)

Für alle variablenfreien arithmetischen Formeln α gilt:

$$\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha \quad \textit{gdw.} \quad \mathcal{M} \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha.$$

Beweis:

Aus $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha$ mit (5.1).

Aus $\mathcal{M} \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha$ folgt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ (da $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{M}$ (4.23)), und

aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$ mit (5.6). □

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha \arrow[rr, Rightarrow, "(5.1)"] & & \mathcal{M} \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha \arrow[dl, Rightarrow, "(4.23)"] \\
& \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha \arrow[ul, Rightarrow, "(5.6)"] &
\end{tikzcd}$$

Folgerung 5.8 (aus obigem Beweis)

Für alle variablenfreien arithmetischen Formeln α gilt: $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ *gdw.* $\mathcal{M} \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha$.

Folgerung 5.9 (genau die $\mathcal{M}$-erfüllenden Arithmetik-Modelle sind wie $\mathfrak{N}$)

Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell.
$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{M}$ *gdw. für jede variablenfreie arithmetische Formel α gilt: $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ gdw. $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$.*

Beweis:
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell mit $\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{P}} \mathcal{M}$.
Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{M}$ mit $\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{P}} \varphi$ und $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \varphi$ (4.23).

„$\Rightarrow$“: Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell mit $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{M}$.
Dann gilt:

1) $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha \overset{(5.8)}{\Longrightarrow} \mathcal{M} \Vdash\!\models_{\mathcal{P}} \alpha \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha$.

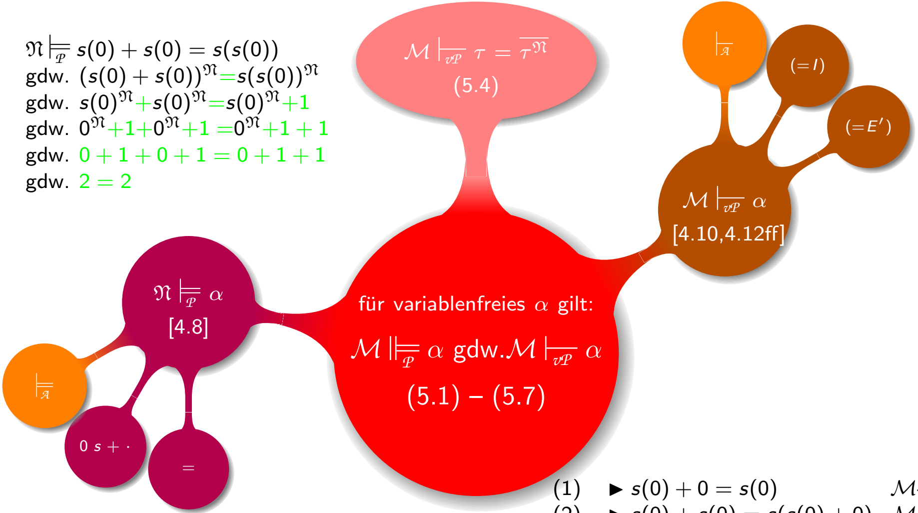
2) $\mathfrak{N} \not\models_{\mathcal{P}} \alpha \overset{(\text{Sem. } \neg)}{\Longrightarrow} \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \neg\alpha \overset{(5.8)}{\Longrightarrow} \mathcal{M} \Vdash\!\models_{\mathcal{P}} \neg\alpha \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \neg\alpha \overset{(\text{Sem. } \neg)}{\Longrightarrow} \mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{P}} \alpha$.

$\square$

Die Axiomenmenge $\mathcal{M}$ kann also Modelle „erkennen“, die wie $\mathfrak{N}$ sind . . .

Mini-Arithmetik: Beweisen statt rechnen

$\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} s(0) + s(0) = s(s(0))$
gdw. $(s(0) + s(0))^{\mathfrak{N}} = s(s(0))^{\mathfrak{N}}$
gdw. $s(0)^{\mathfrak{N}} + s(0)^{\mathfrak{N}} = s(0)^{\mathfrak{N}} + 1$
gdw. $0^{\mathfrak{N}} + 1 + 0^{\mathfrak{N}} + 1 = 0^{\mathfrak{N}} + 1 + 1$
gdw. $0 + 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1$
gdw. $2 = 2$



(1) ▶ $s(0) + 0 = s(0)$ $\mathcal{M}$-Axiom 3
(2) ▶ $s(0) + s(0) = s(s(0) + 0)$ $\mathcal{M}$-Axiom 4
(3) ▶ $s(0) + s(0) = s(s(0))$ $(=E')(1)(2)$

Vorlesung 6: Die ganze Arithmetik – mit Variablen und Quantoren

Von der Mini-Arithmetik gehen wir nun zur „richtigen“ Arithmetik.
Dazu erlauben wir in Formeln auch Variablen und Quantoren.
Das Natürliche Schließen wird entsprechend erweitert.
Die *unendliche* Axiomenmenge $\mathcal{M}$ der Mini-Arithmetik können wir dann als eine *endliche* Axiomenmenge $\mathcal{Q}$ aufschreiben – damit erhalten wir die *Robinson-Arithmetik*.

Wir werden die Idee für die „Unvollständigkeit“ der Robinson-Arithmetik sehen:
wir werden eine (einfache) Formel finden,
die vom Standardmodell $\mathfrak{N}$ der natürlichen Zahlen erfüllt wird,
die aber von einem Nicht-Standardmodell $\mathfrak{B}$, das alle Axiome in $\mathcal{Q}$ erfüllt, nicht erfüllt wird.

In der nächsten Vorlesung werden wir sehen,
dass man diese Formel nicht mit Natürlichem Schließen aus $\mathcal{Q}$ herleiten kann.

1. Vollständigkeitssätze

6.1 Formeln der Arithmetik

Zuerst erweitern wir die Definition variablenfreier arithmetischer Terme auf Terme mit Variablen.

Definition 6.1 (arithmetische Terme)

Arithmetische Terme sind induktiv definiert wie folgt:

1. 0 ist ein arithmetischer Term
   und jede Variable x_i ist ein arithmetischer Term (für $i \in \mathbb{N}$).
2. Seien τ und σ arithmetische Terme.
   Dann sind auch $s(\tau)$, $(\tau + \sigma)$ und $(\tau \cdot \sigma)$ arithmetische Terme.

Definition 6.2 (Arithmetische Atome)

Ein Atom der Arithmetik ist eine Formel $(\tau = \sigma)$ für arithmetische Terme τ und σ.

Definition 6.3 (Arithmetische Formeln)

1. $\perp$ und alle Atome der Arithmetik sind Formeln der Arithmetik.
2. Wenn α und β Formeln der Arithmetik sind, dann sind auch $(\alpha \to \beta)$ und $(\forall x_i\ \alpha)$ Formeln der Arithmetik.

Wir benutzen die üblichen Kurzschreibweisen $\neg$, $\wedge$ etc.

$(\exists x_i\ \alpha)$ ist Kurzschreibweise für $\neg(\forall x_i\ \neg\alpha)$.

Wir benutzen auch Variablensymbole x, y etc., lassen überflüssige Klammern weg ...

Beispiele für arithmetische Formeln:

- $(\forall x_1(\exists x_2\ (s(x_1) = x_2)))$
- $\exists x_2\ x_1 = x_2 + x_2$
- $x \neq 0 \wedge x \neq \overline{1} \wedge \forall y \Big(\ (\underbrace{\exists z\ y + z = x}_{y \leqslant x}) \to \big(\ (\underbrace{\exists z\ (y \cdot z = x)}_{y \text{ teilt } x}) \to (y = \overline{1} \vee y = x)\ \big)\Big)$

  $= \ \varphi_p(x)$
- $\forall u\ \exists w\ \varphi_p(s(u+w))$
- $\forall u\ \exists w\ \big(\ \varphi_p(s(u+w))\ \wedge\ \varphi_p(s(u+w)+\overline{2})\ \big)$

6.2 Semantik der Arithmetik

Definition 6.4 (freies Vorkommen eines Variablensymbols)

Jedes Variablensymbol kann an verschiedenen Stellen einer Formel vorkommen.

Ein Vorkommen einer Variable x_k in der Formel φ heißt frei,
falls es nur in Teilformeln von φ liegt, die nicht die Form $(\forall x_k\, \alpha)$ (oder $(\exists x_k\, \alpha)$) haben.

Ein Vorkommen, das nicht frei ist, heißt gebunden.

Eine Formel ohne ein freies Vorkommen einer Variable heißt geschlossen.

Seien $y_1, \ldots, y_m$ alle frei vorkommenden Variablen in φ.
Der Abschluss von φ ist $\forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_m\, \varphi$. Er wird mit $cl(\varphi)$ bezeichnet.

Beispiel: $(\forall x_1\ (s(x_2) = \overline{c_3}) \to ((\exists x_2\ (x_2 \neq x_1)) \wedge x_2 = x_1 \cdot x_3))$.

Das erste Vorkommen von x_2 ist frei.

Das zweite Vorkommen von x_2 ist gebunden.

Das dritte Vorkommen von x_2 ist frei.

Substitutionen in arithmetischen Formeln

sind Ersetzungen von freien Vorkommen von Variablen durch Terme.

Definition 6.5 ($\varphi[\tau/x_i]$)

Sei φ eine arithmetische Formel, x_i eine Variable und τ ein arithmetischer Term.
Dann ist $\varphi[\tau/x_i]$ die Formel, die man aus φ erhält,
indem man in φ jedes freie Vorkommen von x_i durch τ ersetzt.
Für Formelmengen Γ ist $\Gamma[\tau/x_i] = \{\varphi[\tau/x_i] \mid \varphi \in \Gamma\}$.

Beispiele:
Sei $\varphi = (\forall x_1\ (s(x_2) = x_3) \to ((\exists x_2\ (x_2 \neq x_1)) \wedge x_2 = x_1 \cdot x_3))$.

$\varphi[\overline{2}/x_1] = \varphi$

$\varphi[\overline{1}/x_2] = (\forall x_1\ (s(\overline{1}) = x_3) \to ((\exists x_2\ (x_2 \neq x_1)) \wedge \overline{1} = x_1 \cdot x_3))$

$\varphi[\overline{1}/x_2][x_4 + \overline{0}/x_3] = (\forall x_1\ (s(\overline{1}) = x_4 + \overline{0}) \to ((\exists x_2\ (x_2 \neq x_1)) \wedge \overline{1} = x_1 \cdot (x_4 + \overline{0})))$

Wir können jetzt $\mathfrak{N} \models \varphi$ für geschlossene arithmetische Formeln φ informell definieren, damit wir eine Vorstellung bekommen, was die später definierte Erfüllungsrelation $\models_{\mathcal{P}}$ für beliebige Arithmetik-Modelle können muss.

α und β seien geschlossene arithmetische Formeln.

$\mathfrak{N} \not\models \bot$

$\mathfrak{N} \models (\tau = \sigma)$ gdw. $\tau^{\mathfrak{N}} = \sigma^{\mathfrak{N}}$, für variablenfreie Terme τ, σ

$\mathfrak{N} \models (\alpha \to \beta)$ gdw. $\mathfrak{N} \not\models \alpha$ oder $\mathfrak{N} \models \beta$

$\mathfrak{N} \models (\forall x_i\ \alpha)$ gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{N} \models \alpha[\overline{n}/x_i]$

Offensichtlich gilt:

$\mathfrak{N} \models \exists x_i\ \alpha$ gdw. für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{N} \models \alpha[\overline{n}/x_i]$

Beispiel: $\mathfrak{N} \models \forall x\,(0 + x = x)$

$\mathfrak{N} \models \forall x\,(0 + x = x)$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{N} \models 0 + \overline{n} = \overline{n}$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $(0 + \overline{n})^{\mathfrak{N}} = \overline{n}^{\mathfrak{N}}$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $0^{\mathfrak{N}} + \overline{n}^{\mathfrak{N}} = \overline{n}^{\mathfrak{N}}$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $0 + n = n$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $n = n$.

Die letzte Aussage ist eine wahre Aussage.

Also erfüllt $\mathfrak{N}$ die Formel $\forall x\,(0 + x = x)$

Beispiel: $\mathfrak{N} \models \forall x \; \exists y \; (0 \neq x \to x = s(y))$

$\mathfrak{N} \models \forall x \; \exists y \; (0 \neq x \to x = s(y))$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{N} \models \exists y \; (0 \neq \overline{n} \to \overline{n} = s(y))$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{N} \models 0 \neq \overline{n} \to \overline{n} = s(\overline{m})$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{N} \not\models 0 \neq \overline{n}$ oder $\mathfrak{N} \models \overline{n} = s(\overline{m})$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{N} \models 0 = \overline{n}$ oder $\mathfrak{N} \models \overline{n} = s(\overline{m})$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$: $0 = n$ oder $n = m + 1$

gdw. für jedes $n \in \mathbb{N}$: $0 = n$ oder $n = \max(0, n - 1) + 1$

Die letzte Aussage ist eine wahre Aussage.

Also erfüllt $\mathfrak{N}$ die Formel $\forall x \; \exists y \; (0 \neq x \to x = s(y))$.

Definition 6.6 (Erfüllungsrelation der Arithmetik)

Die Erfüllungsrelation $\models_{\mathcal{P}}$ zwischen Arithmetik-Modellen und Formeln ohne freie Variablen ist wie folgt definiert.
Sei $\mathfrak{A} = \langle U, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, c \rangle$ ein Arithmetik-Modell.

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{A} & \not\models_{\mathcal{P}} & \perp & & \\
\mathfrak{A} & \models_{\mathcal{P}} & (\tau = \sigma) & \text{gdw.} & \tau^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{A}} \\
\mathfrak{A} & \models_{\mathcal{P}} & (\alpha \to \beta) & \text{gdw.} & \mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{P}} \alpha \text{ oder } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \beta \\
\mathfrak{A} & \models_{\mathcal{P}} & (\forall x_i\ \alpha) & \text{gdw.} & \text{für jedes } v \in U \text{ gilt: } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha[\tilde{v}/x_i]
\end{array}$$

Für Formel ψ mit freien Variablen $y_1, \ldots, y_m$ ist definiert:

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \psi \quad \text{gdw.} \quad \text{für alle } v_1, \ldots, v_m \in U \text{ gilt } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \psi[\tilde{v}_1/y_1] \cdots [\tilde{v}_m/y_m].$$

Offensichtlich gilt:

$$\mathfrak{A} \ \models_{\mathcal{P}} \ \exists x_i\ \alpha \quad \text{gdw.} \quad \text{für ein } v \in U \text{ gilt: } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha[\tilde{v}/x_i]$$

Beispiel: $\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} \forall x\ \exists y\ (0 \neq x \to x = s(y))$

für $\mathfrak{A}_0 = \langle\ \underbrace{\{-1, 0, 1, 2\}}_{U},\ \underbrace{a \mapsto \min(a+1, 2)}_{\mathcal{F}_1},\ \underbrace{(a, b) \mapsto \min(|a+b|, 2)}_{\mathcal{F}_2},$

$\underbrace{(a, b) \mapsto \min(\max(a \cdot b, -1), 2)}_{\mathcal{F}_3},\ \underbrace{-1}_{0}\ \rangle.$

$\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} \forall x\ \exists y\ (0 \neq x \to x = s(y))$

gdw. für jedes $v \in U$: $\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} \exists y\ (0 \neq \tilde{v} \to \tilde{v} = s(y))$

gdw. für jedes $v \in U$ gibt es ein $w \in U$: $\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} 0 \neq \tilde{v} \to \tilde{v} = s(\tilde{w})$

gdw. für jedes $v \in U$ gibt es ein $w \in U$: $\mathfrak{A}_0 \not\models_{\mathcal{P}} 0 \neq \tilde{v}$ oder $\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} \tilde{v} = s(\tilde{w})$

gdw. für jedes $v \in U$ gibt es ein $w \in U$: $\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} 0 = \tilde{v}$ oder $\mathfrak{A}_0 \models_{\mathcal{P}} \tilde{v} = s(\tilde{w})$

gdw. für jedes $v \in U$ gibt es ein $w \in U$: $-1 = v$ oder $v = \min(w+1, 2)$

gdw. für jedes $v \in \{-1, 0, 1, 2\}$: $-1 = v$ oder $v = \min(\max(-1, v-1) + 1, 2)$

Die letzte Aussage ist eine wahre Aussage.

Also erfüllt $\mathfrak{A}_0$ die Formel $\forall x\ \exists y\ (0 \neq x \to x = s(y))$.

Beispiel: das Nicht-Standardmodell $\mathfrak{B}$

$\mathfrak{B}$ ist definiert durch $\mathfrak{B} = \langle U, f_s, f_+, f_\cdot, 0 \rangle$ mit $U = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$ und

$f_s(r)$	$r \in \mathbb{N}$	$r \in \{a, b\}$
	$r + 1$	r

$f_+(l, r)$	$r \in \mathbb{N}$	$r = a$	$r = b$
$l \in \mathbb{N}$	$l + r$	b	a
$l \in \{a, b\}$	l	b	a

$f_\cdot(l, r)$	$r \in \mathbb{N}^+$	$r = 0$	$r = a$	$r = b$
$l \in \mathbb{N}$	$l \cdot r$	0	a	b
$l = a$	b	0	b	b
$l = b$	a	0	a	a

Das Arithmetik-Modell $\mathfrak{B}$ hat besondere Eigenschaften.

Das Universum besteht aus $\mathbb{N}$ und zwei zusätzlichen Elementen a und b.

Auf $\mathbb{N}$ verhält sich $\mathfrak{B}$ genauso wie $\mathfrak{N}$.

Die zusätzlichen Elemente werden benutzt, um anders als $\mathfrak{N}$ zu sein.

Beispiel: $\mathfrak{B} \not\models_{\mathcal{P}} \forall x \; (\; 0 + x = x \;)$

Offensichtlich gilt

$\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} \forall x \; (\; 0 + x = x \;)$ gdw. für jedes $v \in U$: $(0 + \tilde{v})^{\mathfrak{B}} = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}$.

Da $(0 + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = \mathrm{b}$ und $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$,

ist die Aussage „$(0 + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = \tilde{\mathrm{a}}^{\mathfrak{B}}$“ falsch.

Da $\mathrm{a} \in U$, ist auch die Aussage „für jedes $v \in U$: $(0 + \tilde{v})^{\mathfrak{B}} = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}$“ falsch.

Also folgt $\mathfrak{B} \not\models_{\mathcal{P}} \forall x \; (\; 0 + x = x \;)$.

Beispiel: $\mathfrak{B} \underset{\mathcal{P}}{\models} \forall x \; (\; x + 0 = x \;)$

Offensichtlich gilt

$$\mathfrak{B} \underset{\mathcal{P}}{\models} \forall x \; (\; x + 0 = x \;) \; \text{ gdw. } \; \text{für jedes } v \in U\text{: } (\tilde{v} + 0)^{\mathfrak{B}} = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}.$$

„für jedes $v \in U$: $(\tilde{v} + 0)^{\mathfrak{B}} = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}$“ zeigen wir mittels einer Fallunterscheidung:

Fall 1: $v \in \mathbb{N}$: dann ist $(\tilde{v} + 0)^{\mathfrak{B}} = v + 0 = v = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}$.

Fall 2: $v \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$: dann ist $(\tilde{v} + 0)^{\mathfrak{B}} = v = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}$.

Also ist „für jedes $v \in U$: $(\tilde{v} + 0)^{\mathfrak{B}} = \tilde{v}^{\mathfrak{B}}$“ eine wahre Aussage,
d.h. $\mathfrak{B} \underset{\mathcal{P}}{\models} \forall x \; (\; x + 0 = x \;)$.

6.3 Natürliches Schließen für die Arithmetik

Wir erweitern das natürliche Schließen für die variablenfreie Arithmetik um Axiome und Regeln für die zusätzlichen Bestandteile von arithmetischen Formeln:

- Regeln für $=$ und $\forall$

  (Diese werden jetzt allgemein wie für die Prädikatenlogik formuliert.)

- Die unendliche Axiomen-Menge $\mathcal{M}$ für die Mini-Arithmetik kann dann durch Benutzung von Formeln mit Quantoren als endliche Formelmenge $\mathcal{Q}$ formuliert werden.

Am Ende werden wir das natürliche Schließen $\vdash_{\mathcal{P}}$ mit Axiomen $\mathcal{Q}$ haben – das ist die Robinson-Arithmetik.

Das natürliche Schließen soll korrekt sein.
Beim Herleiten können auch Hypothesen mit freien Variablen benutzt werden.
Deshalb brauchen wir eine Verallgemeinerung von $\models_{\mathcal{P}}$ für Formelmengen und Formeln mit freien Variablen.

Definition 6.7 (semantische Folgerung $\Vdash_{\mathcal{P}}$)

Sei α eine arithmetische Formel und Γ eine Menge arithmetischer Formeln

mit einer endlichen Menge $\{y_1, \ldots, y_m\}$ frei vorkommender Variablen (in Γ und α).

α heißt semantische Folgerung von Γ ($\Gamma \Vdash_{\mathcal{P}} \alpha$), falls

für alle Arithmetik-Modelle $\mathfrak{A}$ und alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt:

wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_1/y_1] \ldots [\tilde{w}_m/y_m]$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha[\tilde{w}_1/y_1] \ldots [\tilde{w}_m/y_m]$.

Dabei ist $U_{\mathfrak{A}}$ das Universum von $\mathfrak{A}$.

Für Substitutionen freie Terme

Definition 6.8 (Term τ ist frei für x_i)

Ein Term τ heißt frei für x_i in Formel φ,
falls jedes Variablen-Vorkommen in τ in $\varphi[\tau/x_i]$ frei ist.

Bsp.:

Der Term x ist nicht frei für y in $(\exists x\ \neg(y = x))$:
$$(\exists x\ \neg(y = x))[x/y] \ = \ (\exists x\ \neg(x = x)).$$

$x + y$ ist nicht frei für y in $(\forall x\ x = y))$:
$$(\forall x\ x = y)[x + y/y] \ = \ (\forall x\ x = x + y).$$

$x + y$ ist frei für y in $(\forall z\ z = y)$:
$$(\forall z\ z = y)[x + y/y] \ = \ (\forall z\ z = x + y).$$

Variablenfreie Terme sind stets frei für alle x_i.

Axiome und Schlussregeln für $=$

- $\tau = \tau$ für jeden Term τ wird zu den Axiomen hinzugenommen.

(Das entspricht einer $=$-*Introduktion*.)

Die Gleichheits-Elimination $(= E)$ wird zu den Regeln hinzugenommen.
Sie erlaubt das Ersetzen eines Terms in einer Formel durch einen „gleichen“ Term, wenn die Variablenvorkommen im Term vor und nach dem Ersetzen alle frei sind.

Für Terme τ und σ, die frei für x_i in φ sind, haben wir folgende Schlussregel $(= E)$:

$$\frac{\tau = \sigma \qquad \varphi[\tau/x_i]}{\varphi[\sigma/x_i]}\ (= E) \qquad\qquad \frac{\Gamma \blacktriangleright \tau = \sigma \qquad \Delta \blacktriangleright \varphi[\tau/x_i]}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright \varphi[\sigma/x_i]}\ (= E)$$

Beispiel

Lemma 6.9 (Symmetrie und Transitivität von $=$)

Seien τ und σ arithmetische Terme. Dann gilt:

1. $\tau = \sigma \vdash_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$
2. $\tau = \sigma, \sigma = \theta \vdash_{\mathcal{P}} \tau = \theta$

Beweis zu 1.:

(1) $\tau = \sigma \blacktriangleright \tau = \sigma$
(2) $\blacktriangleright \tau = \tau$ Axiom, betrachtet als $x_i = \tau\ [\tau/x_i]$ (x_i kommt in τ nicht vor)
(3) $\tau = \sigma \blacktriangleright \sigma = \tau$ $(= E)(1)(2)$

Beweis zu 2.:

(1) $\tau = \sigma \blacktriangleright \tau = \sigma$ (ist $\tau = x_i\ [\sigma/x_i]$)
(2) $\sigma = \theta \blacktriangleright \sigma = \theta$
(3) $\tau = \sigma, \sigma = \theta \blacktriangleright \tau = \theta$ $(= E)(1)(2)$ □

Schlussregeln für den Allquantor

Die Allquantor-Elimination erlaubt die Entfernung des Quantors und die Ersetzung der quantifizierten Variable x_i in α durch einen für x_i in α freien Term.

$$\frac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E) \quad \text{wobei } \tau \text{ frei ist für } x_i \text{ in } \alpha$$

Die Allquantor-Introduktion erlaubt die Allquantifizierung einer Variable, die in den Hypothesen nicht frei vorkommt.

$$\frac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$

wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese, aus der α hergeleitet wurde, frei vorkommt

Die Regeln in der Sequentenschreibweise

$$\frac{\Gamma \blacktriangleright \forall x_i\ \alpha}{\Gamma \blacktriangleright \alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E)$$ wobei τ frei ist für x_i in α

$$\frac{\Gamma \blacktriangleright \alpha}{\Gamma \blacktriangleright \forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$ wobei x_i in Γ nicht frei vorkommt

Definition 6.10 (Natürliches Schließen für die Arithmetik $\vdash_{\mathcal{P}}$)

Sei φ eine arithmetische Formel und Γ sei eine Menge solcher Formeln.
$\Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \varphi$ ist Kurzschreibweise für
$\Gamma \vdash \varphi$ aus folgenden Axiomen und Schlussregeln:

1. Die *Axiome* sind
   - Sequenten $\alpha \blacktriangleright \alpha$ für alle arithmetischen Formeln α, und
   - Sequenten $\blacktriangleright \tau = \tau$ für alle arithmetischen Terme τ.
2. Die *Schlussregeln* sind $(\rightarrow I)$, $(\rightarrow E)$, (RAA), (Hyp), $(= E)$, $(\forall I)$ und $(\forall E)$.

Die Axiome und Schlussregeln von $\vdash_{\mathcal{P}}$ betreffen die „logischen“ Bestandteile von arithmetischen Formeln (eigentlich: von prädikatenlogischen Formeln).

Später wird noch eine zusätzliche Menge $\mathcal{Q}$ von Axiomen angegeben, die die „arithmetischen“ Bestandteile der Formeln betreffen.

$\vdash_{\mathcal{P}} (\forall x\ \alpha) \rightarrow (\forall y\ \alpha[y/x])$, falls y frei für x in α, und y nicht frei in $(\forall x\, \alpha)$ (Gebundene Umbenennung)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\forall x\ \alpha)]_1}{\alpha[y/x]}\ (\forall E)}{(\forall y\ \alpha[y/x])}\ (\forall I)}{(\forall x\ \alpha) \rightarrow (\forall y\ \alpha[y/x])}\ (\rightarrow I)_1$$

$$\dfrac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E)$$

wobei τ frei für x_i in α ist

$$\dfrac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$

wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt, aus der α hergeleitet wird

$\vdash_{\mathcal{P}} (\forall x\ \alpha) \to (\exists x\ \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\ \alpha]_2}{\alpha}\,(\forall E) \qquad \dfrac{[\forall x\ \neg\alpha]_1}{\neg\alpha}\,(\forall E)}{\bot}\,(\to E)}{\neg(\forall x\ \neg\alpha)}\,(\to I)_1}{(\forall x\ \alpha) \to \underbrace{(\neg(\forall x\ \neg\alpha))}_{=\exists x\ \alpha}}\,(\to I)_2$$

$$\dfrac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\,(\forall E)$$

wobei τ frei für x_i in α ist

$$\dfrac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\,(\forall I)$$

wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt, aus der α hergeleitet wird

$\vdash_{\mathcal{P}} (\forall x\ (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to (\forall x\ \beta))$, falls x nicht frei in α vorkommt

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\ \forall x\ (\alpha \to \beta)\ ]_2}{\alpha \to \beta}\ (\forall E) \qquad [\alpha]_1}{\beta}\ (\to E)}{\forall x\ \beta}\ (\forall I)}{\alpha \to (\forall x\ \beta)}\ (\to I)_1}{(\forall x\ (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to (\forall x\ \beta))}\ (\to I)_2
$$

$$\frac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E)$$ wobei τ frei für x_i in α ist

$$\frac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$ wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt, aus der α hergeleitet wird

$\vdash_{\mathcal{P}} \exists x\ (\alpha \to \forall x\, \alpha)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\ \forall x\ \neg(\alpha \to (\forall x\,\alpha))\ ]_1}{\neg(\alpha \to (\forall x\,\alpha))}\ (\forall E)}{\dfrac{\alpha}{\forall x\,\alpha}\ (\forall I) \qquad\qquad \neg\forall x\,\alpha}\ (2.5)}{\bot}\ (\to E)}{\neg\forall x\ \neg(\alpha \to (\forall x\,\alpha))}\ (\to I)_1$$

$$\dfrac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E)$$

wobei τ frei für x_i in α ist

$$\dfrac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$

wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt, aus der α hergeleitet wird

Was passiert, wenn man die Einschränkung bei $(\forall I)$ weglässt...

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\ x = 0\ ]_1}{\forall x\ (x = 0)}\ (\forall I \text{ ohne Einschränkung})}{x = 0 \to \forall x\ (x = 0)}\ (\to I)_1}{\forall x\ (x = 0 \to \forall x\ (x = 0))}\ (\forall I)$$

Die hergeleitete Formel wird von $\mathfrak{N}$ nicht erfüllt.

Durch die fehlende Einschränkung verliert der Beweiskalkül seine Korrektheit.

$$\frac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E)$$

wobei τ frei für x_i in α ist

$$\frac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$

wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt, aus der α hergeleitet wird

Was passiert, wenn man die Einschränkung bei $(\forall E)$ weglässt...

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x\ \exists y\ \neg(x = y)]_1}{\exists y\ \neg(y = y)}\ (\forall E \text{ ohne Einschränkung})}{(\forall x\ \exists y\ \neg(x = y)) \rightarrow \exists y\ \neg(y = y)}\ (\rightarrow I)_1$$

Die hergeleitete Formel wird von $\mathfrak{N}$ nicht erfüllt.

Durch die fehlende Einschränkung verliert der Beweiskalkül seine Korrektheit.

$$\frac{\forall x_i\ \alpha}{\alpha[\tau/x_i]}\ (\forall E)$$ wobei τ frei für x_i in α ist

$$\frac{\alpha}{\forall x_i\ \alpha}\ (\forall I)$$ wobei x_i in keiner nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt, aus der α hergeleitet wird

6.4 Die Robinson-Arithmetik

Die Robinson-Arithmetik ($\mathcal{Q}$-Nat) ist das Natürliche Schließen für die Arithmetik mit den folgenden zusätzlichen arithmetischen Axiomen $\mathcal{Q}$.

Definition 6.11 (Axiommenge $\mathcal{Q}$ für die Robinson-Arithmetik)

Die Menge $\mathcal{Q}$ besteht aus folgenden Formeln.

Q1 $\forall x \; (\; 0 \neq s(x) \;)$

Q2 $\forall x \, \forall y \; (\; s(x) = s(y) \to x = y \;)$

Q3 $\forall x \; (\; 0 \neq x \to (\; \exists y \; x = s(y) \;) \;)$

Q4 $\forall x \; (\; x + 0 = x \;)$

Q5 $\forall x \, \forall y \; (\; x + s(y) = s(x + y) \;)$

Q6 $\forall x \; (\; x \cdot 0 = 0 \;)$

Q7 $\forall x \, \forall y \; (\; x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \;)$

Beispiel für eine Herleitung aus $\mathcal{Q}$: $\quad \mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall x \; \underbrace{\exists v \; (\; v + 0 = x \;)}_{0 \leqslant x}$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \; x + 0 = x}{x + 0 = x}\,(\forall E) \qquad \dfrac{[\forall v \;\; v + 0 \neq x]_1}{x + 0 \neq x}\,(\forall E)}{\bot}\,(\to E)}{\neg(\forall v \;\; v + 0 \neq x)}\,(\to I)_1}{\forall x \;\; \underbrace{\neg(\forall v \;\; v + 0 \neq x)}_{\exists v \;\; v+0=x}}\,(\forall I)
$$

Lemma 6.12 (Robinson-Arithmetik kann alles, was Mini-Arithmetik kann)

Sei α eine variablenfreie Formel. Wenn $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$.

Beweis.

Jedes Axiom in $\mathcal{M}$ kann aus einem Axiom in $\mathcal{Q}$ durch Anwendung(en) von $(\forall E)$ gewonnen werden. Also kann jede Herleitung mit Axiomen aus $\mathcal{M}$ zu einer Herleitung mit Axiomen aus $\mathcal{Q}$ umgewandelt werden. $\square$

Lemma 6.13 (das Standardmodell $\mathfrak{N}$ erfüllt die Robinson-Axiome)

$\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}$

In einem Beispiel haben wir bereits das Modell $\mathfrak{B}$ gesehen, das $\forall x\,(0 + x = x)$ nicht erfüllt. $\mathfrak{B}$ erfüllt trotzdem die Robinson-Axiome.

Lemma 6.14 (das Nicht-Standardmodell $\mathfrak{B}$ erfüllt die Robinson-Axiome)

$\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}$

Zur Erinnerung: $\mathfrak{B}$ ist definiert durch $\mathfrak{B} = \langle U, f_s, f_+, f_\cdot, 0 \rangle$ mit $U = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$ mit

$f_s(r)$	$r \in \mathbb{N}$	$r \in \{a, b\}$
	$r + 1$	r

$f_+(l, r)$	$r \in \mathbb{N}$	$r = a$	$r = b$
$l \in \mathbb{N}$	$l + r$	b	a
$l \in \{a, b\}$	l	b	a

$f_\cdot(l, r)$	$r \in \mathbb{N}^+$	$r = 0$	$r = a$	$r = b$
$l \in \mathbb{N}$	$l \cdot r$	0	a	b
$l = a$	b	0	b	b
$l = b$	a	0	a	a

Beweis:

Die Robinson-Axiome $(Q1)$, $(Q2)$ und $(Q3)$ werden offensichtlich von $\mathfrak{B}$ erfüllt.

Die Erfüllung von $(Q4)$ durch $\mathfrak{B}$ wurde bereits in einem Beispiel gezeigt.

Es ist offensichtlich, dass $(Q6)$ von $\mathfrak{B}$ erfüllt wird.

Es fehlen also noch $(Q5)$ (Übungsaufgabe) und $(Q7)$.

Das ist eine Fleißarbeit ...

zu $(Q7)$: $\quad \mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} \forall x \, \forall y \; x \cdot s(y) = x \cdot y + x$:

Es gilt:

$\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} \forall x \, \forall y \; x \cdot s(y) = x \cdot y + x \quad$ gdw. $\quad$ für alle $x, y \in U$: $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = (\tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}}$.

Wir machen nun eine Fallunterscheidung für alle möglichen x und y entsprechend den Unterscheidungen in der Tabelle für $f_{\cdot}$.

Die ersten 4 Fälle behandeln die erste Zeile in der Tabelle für $f_{\cdot}$.

Fall 1 und 2: $x, y \in \mathbb{N}$. $\quad$ Dann ist $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = (\tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}}$.

Fall 3: $x \in \mathbb{N}, y = \mathrm{a}$.
Dann ist die linke Seite $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{\mathrm{a}}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(x, \mathrm{a}) = \mathrm{a}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{x} \cdot \tilde{\mathrm{a}} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}} = f_{+}(f_{\cdot}(x, \mathrm{a}), x) = f_{+}(\mathrm{a}, x) = \mathrm{a}$.

Fall 4: $x \in \mathbb{N}, y = \mathrm{b}$:
Dann ist die linke Seite $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{\mathrm{b}}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(x, \mathrm{b}) = \mathrm{b}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{x} \cdot \tilde{\mathrm{b}} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}} = f_{+}(f_{\cdot}(x, \mathrm{b}), x) = f_{+}(\mathrm{b}, x) = \mathrm{b}$.

(Wir wollen zeigen, dass für alle $x, y \in U$: $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = (\tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}}$.)

Die nächsten 4 Fälle behandeln die zweite Zeile in der Tabelle für $f_{\cdot}$.

Fall 5: $x = \mathrm{a}, y \in \mathbb{N}^+$.

Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{a}, y+1) = \mathrm{b}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot \tilde{y} + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{a}, y), \mathrm{a}) = f_+(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{b}$.

Fall 6: $x = \mathrm{a}, y = 0$:

Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot s(0))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{a}, 1) = \mathrm{b}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot 0 + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{a}, 0), \mathrm{a}) = f_+(0, \mathrm{a}) = \mathrm{b}$.

Fall 7: $x = \mathrm{a}, y = \mathrm{a}$:

Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot s(\tilde{\mathrm{a}}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{a}, f_s(\mathrm{a})) = f_{\cdot}(\mathrm{a}, \mathrm{a}) = \mathrm{b}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot \tilde{\mathrm{a}} + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{a}, \mathrm{a}), \mathrm{a}) = f_+(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{b}$.

Fall 8: $x = \mathrm{a}, y = \mathrm{b}$:

Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot s(\tilde{\mathrm{b}}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{b}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot \tilde{\mathrm{b}} + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{a}, \mathrm{b}), \mathrm{a}) = f_+(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{b}$.

(Wir wollen zeigen, dass für alle $x, y \in U$: $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = (\tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}}$.)

Die nächsten 4 Fälle behandeln die dritte Zeile in der Tabelle für $f_{\cdot}$.

Fall 9: $x = \mathrm{b}, y \in \mathbb{N}^+$.
Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{a}, y) = \mathrm{b}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{a}} \cdot \tilde{y} + \tilde{\mathrm{a}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{a}, y), \mathrm{a}) = f_+(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{b}$.

Fall 10: Fall $x = \mathrm{b}, y = 0$:
Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot s(0)^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{b}, 1) = \mathrm{a}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot 0 + \tilde{\mathrm{b}}))^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{b}, 0), \mathrm{b}) = f_+(0, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$.

Fall 11: $x = \mathrm{b}, y = \mathrm{a}$:
Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot s(\tilde{\mathrm{a}}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{a}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot \tilde{\mathrm{a}} + \tilde{\mathrm{b}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{b}, \mathrm{a}), \mathrm{b}) = f_+(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$.

Fall 12: $x = \mathrm{b}, y = \mathrm{b}$.
Die linke Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot s(\tilde{\mathrm{b}}))^{\mathfrak{B}} = f_{\cdot}(\mathrm{b}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$
und die rechte Seite ist $(\tilde{\mathrm{b}} \cdot \tilde{\mathrm{b}} + \tilde{\mathrm{b}})^{\mathfrak{B}} = f_+(f_{\cdot}(\mathrm{b}, \mathrm{b}), \mathrm{b}) = f_+(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$.

Damit sind alle möglichen Fälle betrachtet.
Also gilt für alle $x, y \in U$: $(\tilde{x} \cdot s(\tilde{y}))^{\mathfrak{B}} = (\tilde{x} \cdot \tilde{y} + \tilde{x})^{\mathfrak{B}}$. $\square$

Exkurs: Schlussregeln für den Existenzquantor

(brauchen wir zwar formal nicht, ist aber ggf. praktisch zu benutzen)

Die Existenzquantor-Elimination erlaubt das Entfernen des Quantors ohne Ersetzung der quantifizierten Variable.

$$\frac{\exists x_i\ \alpha \qquad \begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\ (\exists E)$$

wobei x_i weder in β noch in einer nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt (außer in α)

Die Existenzquantor-Introduktion erlaubt die Ersetzung eines Terms durch eine existenzquantifizierte Variable.

$$\frac{\alpha[\tau/x_i]}{\exists x_i\ \alpha}\ (\exists I)$$

wobei τ frei ist für x_i in α

$\vdash_{\mathcal{P}} (\forall x\ \alpha) \rightarrow (\exists x\ \alpha)$ (nochmal)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\ \alpha]_1}{\alpha}\ (\forall E)}{\exists x\ \alpha}\ (\exists I)}{(\forall x\, \alpha) \rightarrow (\exists x\, \alpha)}\ (\rightarrow I)_1$$

$$\dfrac{\exists x_i\ \alpha \qquad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\beta}\ (\exists E)$$

wobei x_i weder in β noch in einer nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt (außer in α)

$$\dfrac{\alpha[\tau/x_i]}{\exists x_i\ \alpha}\ (\exists I)$$

wobei τ frei ist für x_i in α

$\vdash_{\mathcal{P}} (\exists x\, \alpha) \to (\exists y\, \alpha[y/x])$, falls y frei für x in α ist und y nicht frei in α vorkommt

$$
\dfrac{[\exists x\, \alpha]_2 \qquad \dfrac{[\alpha]_1}{\exists y\, \alpha[y/x]}\,(\exists I)}{\dfrac{\exists y\, \alpha[y/x]}{(\exists x\, \alpha) \to (\exists y\, \alpha[y/x])}\,(\to I)_2}\,(\exists E)_1
$$

$$
\dfrac{\exists x_i\ \alpha \qquad \begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,(\exists E)
$$

wobei x_i weder in β noch in einer nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt (außer in α)

$$
\dfrac{\alpha[\tau/x_i]}{\exists x_i\ \alpha}\,(\exists I)
$$

wobei τ frei ist für x_i in α

$\vdash_{\mathcal{P}} (\exists x\, \forall y\, \alpha) \to (\forall y\, \exists x\, \alpha)$

$$\dfrac{[\,\exists x\,\forall y\,\alpha\,]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\,\forall y\,\alpha\,]_1}{\alpha}\,(\forall E)}{\exists x\,\alpha}\,(\exists I)}{\dfrac{\dfrac{\exists x\,\alpha}{\forall y\,\exists x\,\alpha}\,(\forall I)}{(\exists x\,\forall y\,\alpha) \to (\forall y\,\exists x\,\alpha)}\,(\forall I)_2}\,(\exists E)_1$$

$$\dfrac{\exists x_i\ \alpha \qquad \begin{array}{c}[\alpha]\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\beta}\,(\exists E)$$

wobei x_i weder in β noch in einer nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt (außer in α)

$$\dfrac{\alpha[\tau/x_i]}{\exists x_i\ \alpha}\,(\exists I)$$

wobei τ frei ist für x_i in α

$\vdash_{\mathcal{P}} \forall y\,(\alpha \to \beta) \to ((\exists y\,\alpha) \to \beta)$ **für β ohne freies y**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\,\exists y\,\alpha\,]_2$}
\AxiomC{$[\,\forall y\,(\alpha \to \beta)]_3$}
\RightLabel{$(\forall E)$}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta$}
\AxiomC{$[\alpha]_1$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{β}
\RightLabel{$(\exists E)_1$}
\BinaryInfC{β}
\RightLabel{$(\to I)_2$}
\UnaryInfC{$(\exists y\,\alpha) \to \beta$}
\RightLabel{$(\to I)_3$}
\UnaryInfC{$(\forall y\,(\alpha \to \beta)) \to ((\exists y\,\alpha) \to \beta)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x_i\ \alpha$}
\AxiomC{$[\alpha]$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{β}
\RightLabel{$(\exists E)$}
\BinaryInfC{β}
\end{prooftree}
$$

wobei x_i weder in β noch in einer nicht-aufgelösten Hypothese frei vorkommt (außer in α)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha[\tau/x_i]$}
\RightLabel{$(\exists I)$}
\UnaryInfC{$\exists x_i\ \alpha$}
\end{prooftree}
$$

wobei τ frei ist für x_i in α

Die Regeln in der Sequentenschreibweise

$$\frac{\Gamma \blacktriangleright \exists x_i\ \alpha \qquad \Delta, \alpha \blacktriangleright \beta}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright \beta}\ (\exists E) \quad \text{wobei } x_i \text{ in } \Delta, \beta \text{ nicht frei vorkommt}$$

$$\frac{\Gamma \blacktriangleright \alpha[\tau/x_i]}{\Gamma \blacktriangleright \exists x_i\ \alpha}\ (\exists I) \quad \text{wobei } \tau \text{ frei ist für } x_i \text{ in } \alpha$$

Was haben wir in Vorlesung 6 gelernt?

- Wir kennen die Definition arithmetischer Formeln mit Variablen und Quantoren. In diesen Formeln ist wichtig, welche Vorkommen von Variablen frei und welche gebunden sind, und welche Terme man für freie Vorkommen von Variablen einsetzen kann, ohne dass „neue Bindungen“ entstehen.
- Wir kennen die Erfüllungsrelation für arithmetische Formeln.
- Wir kennen die Regeln $(=I)$, $(=E)$, $(\forall I)$ und $(\forall E)$ für das natürliche Schließen.
- Wir kennen die 7 Robinson-Axiome $\mathcal{Q}$ und wissen,
  dass sie vom Standardmodell $\mathfrak{N}$ erfüllt werden.
- Wir kennen das Nicht-Standardmodell $\mathfrak{B}$, das $\mathcal{Q}$ erfüllt,
  aber trotzdem weniger Formeln erfüllt als $\mathfrak{N}$.
- Wir kennen die Robinson-Arithmetik.

Vorlesung 7: Vollständigkeitssatz für ein Fragment der Arithmetik

Wir werden sehen, dass die Robinson-Arithmetik nicht vollständig für die Arithmetik ist.
Das folgt aus der Korrektheit der Robinson-Arithmetik
und den bekannten Eigenschaften des Nicht-Standardmodells $\mathfrak{B}$.
Außerdem werden wir einen „Teil der Arithmetik" sehen, für den die Robinson-Arithmetik vollständig ist:
die Arithmetik aus Formeln ohne *unbeschränkte* Allquantoren.

Die Robinson-Arithmetik ist soetwas wie eine „minimale nicht-triviale" Arithmetik.
Die *Peano-Arithmetik* erlaubt zusätzlich Induktions-Beweise.
Wir werden sehen, wie man Induktion formal in ein Beweissystem aufnimmt,
und dass man damit viele „einfache" arithmetische Formeln beweisen,
bei denen das in der Robinson-Arithmetik nicht geht.

1. Vollständigkeitssätze

7.1 Korrektheit des Natürlichen Schließens für die Prädikatenlogik

Das Natürliche Schließen ist nicht nur korrekt für die Robinson- Arithmetik, sondern darüberhinaus auch für die Prädikatenlogik.

Lemma 7.1 (Korrektheit von $\vdash_{\mathcal{P}}$ für die Prädikatenlogik)

Für alle arithmetischen Formeln α und alle Formelmengen Γ gilt:
wenn $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$, dann $\Gamma \Vvdash_{\mathcal{P}} \alpha$.

Der Beweis steht im Anhang. Aus dem Lemma folgt direkt

Folgerung 7.2 (Korrektheit von $\vdash_{\mathcal{P}}$ für die Robinson-Arithmetik)

Für alle arithmetischen Formeln α gilt: wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$, dann $\mathcal{Q} \Vvdash_{\mathcal{P}} \alpha$.

7.2 Unvollständigkeit der Robinson-Arithmetik

Im Beweis des Korrektheitslemmas (7.1) fällt auf,
dass nirgends die Eigenschaften der Addition oder Multiplikation benötigt werden.

Der Beweis geht für alle Modelle, also auch für andere Arithmetik-Modelle als $\mathfrak{N}$,
die die Robinson-Axiome erfüllen.

Wir haben bereits das Nicht-Standardmodell $\mathfrak{B}$ gesehen, das folgende Eigenschaften hat:

$$\mathfrak{B} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{Q} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \not\models_{\mathcal{P}} \forall x \, (0 + x = x).$$

Mit dem Korrektheitslemma (7.1) und (6.13) folgt direkt

Satz 7.3 (Robinson-Arithmetik ist nicht vollständig)

$\mathcal{Q} \not\vdash_{\mathcal{P}} \forall x \; (\; 0 + x = x \;)$ *und* $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \forall x \; (\; 0 + x = x \;)$.

[Eine (Axiomen)menge $\mathcal{S}$ heißt vollständig (für die Arithmetik), wenn für alle Formeln α gilt: $\mathcal{S} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$ gdw. $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$.]

Dazu noch eine Bemerkung:

Lemma 7.4

Für alle variablenfreien arithmetischen Terme τ gilt: $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} 0 + \tau = \tau$.
Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} 0 + \overline{n} = \overline{n}$.

Beweis:
Da $(0 + \tau)^{\mathfrak{N}} = \tau^{\mathfrak{N}}$, folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} 0 + \tau = \overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$ mit (5.4) und (6.12).
Mit $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \tau = \overline{\tau^{\mathfrak{N}}}$ (ebenfalls (5.4) und (6.12)) sowie der Symmetrie und Transitivität von $=$ folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} 0 + \tau = \tau$. ✓

Es gilt also <u>nicht</u>:

wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} 0 + \overline{n} = \overline{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall x\, 0 + x = x$, bzw. allgemeiner
wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall x\, \varphi(x)$.

$\varphi(x)$ ist eine Formel φ und die Betonung, dass sie eine freie Variable x hat.
$\varphi(\tau)$ ist abkürzende Schreibweise für $\varphi[\tau/x]$.

7.3 Robinson-Arithmetik ist vollständig für Σ_1-Formeln

Wir haben in Satz 7.3 („$\mathcal{Q}$-Nat ist nicht vollständig“) gesehen, dass Allquantoren „Probleme machen“, da mit ihnen auch Elemente des Universums angesprochen werden, die zusätzlich zu den *natürlichen Zahlen* im Universum sind.

Wir werden zeigen, dass das mit *beschränkten Allquantoren* umgangen wird (zum Preis geringerer Ausdrucksstärke). Wir benutzen folgende abkürzende Schreibweisen:

$\tau \leqslant \sigma$ als Abkürzung für $\exists v\ (v + \tau = \sigma)$.

(Dabei ist v ein Variablensymbol, das weder in τ noch in σ vorkommt.)

$\forall x \leqslant \tau\ \varphi$ als Abkürzung für $\forall x(x \leqslant \tau \to \varphi(x))$ (beschränkter Allquantor)

$\exists x \leqslant \tau\ \varphi$ als Abkürzung für $\exists x(x \leqslant \tau \wedge \varphi(x))$ (beschränkter Existenzquantor)

Lemma 7.5 (Verbindung zwischen Mini-Arithmetik und Robinson-Arithmetik)

Sei $\varphi(x)$ eine Formel mit x als einziger freier Variable. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:
Wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(0), \ldots, \mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{n})$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall x \leqslant \overline{n}\ \varphi(x)$.

Der Beweis steht im Anhang. $\varphi(\tau)$ ist abkürzende Schreibweise für $\varphi[\tau/x]$.

Die Idee für den – eingeschränkten – Vollständigkeitssatz

Unser Ziel ist es ja, Beweise für von $\mathfrak{N}$ erfüllte arithmetische Formeln zu finden.
Das schaffen wir jetzt immerhin für Formeln ohne unbeschränkte Allquantoren.
Die Idee ist es, (auf der semantischen Seite) in den Formeln die Variablen durch die richtigen Zahlen zu ersetzen, bis variablenfreie Formeln entstehen.
Die von $\mathfrak{N}$ erfüllten variablenfreien Formeln können wir beweisen (5.7).
Diese Beweise kann man dann mit (7.5) und $(\exists I)$ zu einem Beweis der Ausgangsformel zusammensetzen.
Wir werden später sehen, dass man auch nicht mehr schaffen kann.

Veranschaulichung der Idee

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \exists x\ \forall y \leqslant \tau(x)\ \varphi(x,y) \arrow[d] & & \\
 & \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \forall y \leqslant \tau(\overline{u})\ \varphi(\overline{u},y) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{u},0) \arrow[d] & \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{u},\overline{1}) \arrow[d] & \cdots & \mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{u},\tau(\overline{u})) \arrow[d] \\
\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \varphi(\overline{u},0) \arrow[dr] & \mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \varphi(\overline{u},\overline{1}) \arrow[d] & \cdots & \mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \varphi(\overline{u},\tau(\overline{u})) \arrow[dll] \\
 & \mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall y \leqslant \tau(\overline{u})\ \varphi(\overline{u},y) \arrow[d] & & \\
 & \mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \exists x\ \forall y \leqslant \tau(x)\ \varphi(x,y) & &
\end{tikzcd}
$$

Semantik von $\exists$

Semantik von $\forall y \leqslant \tau(\overline{u})$

Vollständigkeitssatz der Mini-Arithmetik (5.7)

Verbindungen zwischen Mini- und Robinson-Arithmetik (6.12) und (7.5)

$(\exists I)$

Formeln ohne unbeschränkte Quantoren

Wir definieren nun Mengen von Formeln, die syntaktisch „einfach“ sind, da sie nur beschränkte Quantoren und eine Sorte unbeschränkter Quantoren haben.

Definition 7.6 (Δ_0-Formeln)

1. Jede quantorenfreie Formel ist eine Δ_0-Formel.
2. Sei φ eine Δ_0-Formel, und κ sei ein Term ohne x und ohne in φ gebunden vorkommende Variablen.
   Dann sind $\forall x \leqslant \kappa\ \varphi$ und $\exists x \leqslant \kappa\ \varphi$ ebenfalls Δ_0-Formeln.

Jede geschlossene Formel ohne unbeschränkte Quantoren ist äquivalent zu einer Δ_0-Formel.

Beispiel

Wir hatten bereits die Formel „x ist eine Primzahl"

$$x \neq 0 \wedge x \neq \overline{1} \wedge \forall y \Big(\underbrace{(\exists z\ y + z = x)}_{y \leqslant x} \to \big(\underbrace{(\exists z\ (y \cdot z = x))}_{y \text{ teilt } x} \to (y = \overline{1} \vee y = x) \big) \Big) .$$

Man sieht leicht, dass der $\forall$-Quantor bereits beschränkt ist:

$$x \neq 0 \wedge x \neq \overline{1} \wedge \forall y \leqslant x \ \big((\exists z\ (y \cdot z = x)) \to (y = \overline{1} \vee y = x) \big) .$$

Und den $\exists$-Quantor kann man auch beschränken (das ist keine äquivalente Umformung):

$$x \neq 0 \wedge x \neq \overline{1} \wedge \forall y \leqslant x \ \big((\exists z \leqslant x\ (y \cdot z = x)) \to (y = \overline{1} \vee y = x) \big) .$$

Nun kann man die Quantoren an den Anfang der Formel „ziehen":

$$\varphi_p(x) \quad := \quad \forall y \leqslant x\ \forall z \leqslant x \Big(x \neq 0 \wedge x \neq \overline{1} \wedge \big(y \cdot z = x \to (y = \overline{1} \vee y = x) \big) \Big).$$

$\varphi_p(x)$ ist eine Δ_0-Formel für „x ist Primzahl".

Formeln ohne unbeschränkte Existenzquantoren

Definition 7.7 (Π_1-Formeln)

1. Jede Δ_0-Formel ist eine Π_1-Formel.
2. Sei φ eine Π_1-Formel, und κ sei ein Term ohne x und ohne in φ gebunden vorkommende Variablen.
   Dann sind $\forall x\, \varphi$, $\exists x \leqslant \kappa\, \varphi$ und $\forall x \leqslant \kappa\, \varphi$ ebenfalls Π_1-Formeln.

Wir haben bereits gesehen,
dass die Π_1-Formel $\forall x\ (\ 0 + x = x\ )$ von $\mathfrak{N}$ erfüllt wird,
aber in der Robinson-Arithmetik nicht bewiesen werden kann (7.3).

Beispiel

Der Satz von Bertrand-Tschebyschow sagt:

für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt: es gibt eine Primzahl zwischen n und $2n$.

Das wollen wir als arithmetische Formel ausdrücken:

$$\forall n \ \ \exists u \leqslant \overline{2} \cdot n \left(n = 0 \vee n = \overline{1} \vee \Big(\ \underbrace{\underbrace{(\exists w \leqslant n \ n + s(w) = u)}_{\text{„}n<u\leqslant 2n(+1)\text{“}} \wedge u \neq \overline{2} \cdot n}_{\text{„}n<u<2n\text{“}} \ \wedge \varphi_p(u) \ \Big) \right)$$

Wir ziehen noch den Quantor nach vorne und sehen, dass eine Π_1-Formel herauskommt:

$$\forall n \ \ \exists u \leqslant \overline{2} \cdot n \ \ \exists w \leqslant n \ \ \left(n = 0 \ \vee \ n = \overline{1} \ \vee \ \Big(\ n + s(w) = u \ \wedge \ u \neq \overline{2} \cdot n \ \wedge \ \varphi_p(u) \ \Big) \right)$$

...wenn man die Quantoren von $\varphi_p(u)$ nach vorne zieht ...

Noch ein Beispiel

Die Goldbachsche Vermutung

jede gerade Zahl > 2 ist Summe zweier Primzahlen

wurde 1742 aufgestellt und ist ungelöst – sie ist weder bewiesen noch widerlegt.
Sie lässt sich als folgende Π_1-Formel θ beschreiben:

$$\forall x \Big(\big(\overline{3} \leqslant x \wedge \exists c \leqslant x\ \overline{2} \cdot c = x \big) \ \rightarrow\ \exists a \leqslant x\ \exists b \leqslant x\ \big(\varphi_p(a) \wedge \varphi_p(b) \wedge a + b = x\big) \Big)$$

Man weiß also nicht ob $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \theta$.

Die Negation von θ ist äquivalent zu

$$\exists x \Big(\big(\overline{3} \leqslant x \wedge \exists c \leqslant x\ \overline{2} \cdot c = x \big) \ \wedge\ \forall a \leqslant x\ \forall b \leqslant x\ \big(\big(\varphi_p(a) \wedge \varphi_p(b) \big) \rightarrow a + b \neq x\big) \Big)$$

Das ist eine Formel ohne unbeschränkten Allquantor.

(2014 zeigte Harald Helfgott, dass jede ungerade Zahl > 7 die Summe dreier Primzahlen ist.)

Formeln ohne unbeschränkte Allquantoren

Definition 7.8 (Σ_1-Formeln)

1. Jede Δ_0-Formel ist eine Σ_1-Formel.
2. Sei φ eine Σ_1-Formel, und κ sei ein Term ohne x und ohne in φ gebunden vorkommende Variablen.
   Dann sind $\exists x\ \varphi$, $\exists x \leqslant \kappa\ \varphi$ und $\forall x \leqslant \kappa\ \varphi$ ebenfalls σ_1-Formeln.

Lemma 7.9 (von $\mathfrak{N}$ erfüllte geschlossene Σ_1-Formeln sind aus $\mathcal{Q}$ herleitbar)

Sei α eine geschlossene Σ_1-Formel. Wenn $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$.

Beweis:

Wir führen den Beweis mittels Induktion über die Anzahl der Quantoren von α.

IA: α ist eine geschlossene quantorenfreie Formel – also eine Formel der Mini-Arithmetik. Aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ folgt $\mathcal{M} \vdash_{v\mathcal{P}} \alpha$ (5.6), und daraus folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$ mit (6.12).

IV: Für jede geschlossene Σ_1-Formel β mit k Quantoren gilt: aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta$ folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \beta$.

IS: z.z.: Für jede geschlossene Σ_1-Formel α mit $k+1$ Quantoren gilt:

aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$.

Sei α eine geschlossene Σ_1-Formel mit $k+1$ Quantoren.

Fall 1: α ist $\exists x\ \beta(x)$ (das kann auch ein beschränkter $\exists$-Quantor sein).
Da $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$, gilt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta(\overline{n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
$\beta(\overline{n})$ ist eine geschlossene Σ_1-Formel mit k Quantoren.
Mit der IV folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \beta(\overline{n})$.
Also gibt es folgende Herleitung von Sequenten.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \blacktriangleright\ \beta(\overline{n}) & (\mathrm{IV}) \\
(2)\ \forall x \neg\beta(x) & \blacktriangleright\ \forall x \neg\beta(x) & \\
(3)\ \forall x \neg\beta(x) & \blacktriangleright\ \neg\beta(\overline{n}) & (\forall E)(2) \\
(4)\ \forall x \neg\beta(x) & \blacktriangleright\ \bot & (\rightarrow E)(1)(3) \\
(5) & \blacktriangleright\ \underbrace{\neg\forall x \neg\beta(x)}_{\exists x\, \beta(x)} & (\rightarrow I)(4)
\end{array}
$$

Damit haben wir $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \exists x\ \beta(x)$.

Fall 2: α ist $\forall x \leqslant \tau \;\; \beta(x)$.

Aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$ folgt $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta(0)$, $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta(\overline{1})$, ..., $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \beta(\overline{\tau^{\mathfrak{N}}})$.

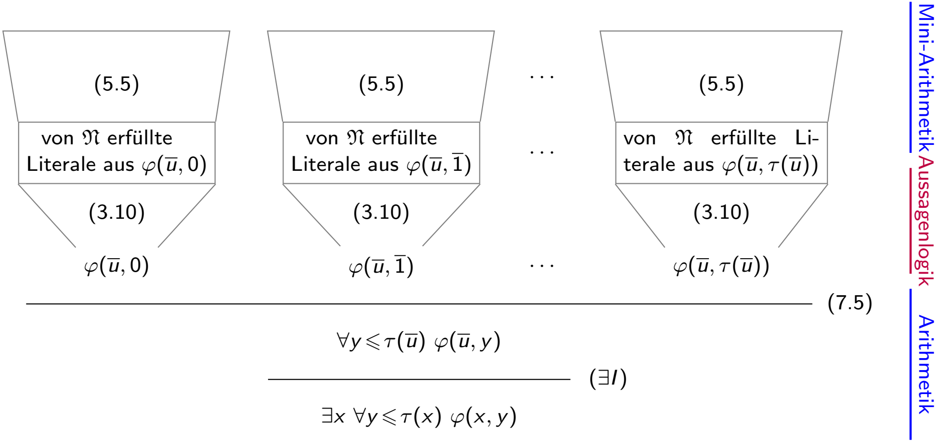
Die Formeln $\beta(0), \ldots, \beta(\overline{\tau^{\mathfrak{N}}})$ sind geschlossene Σ_1-Formeln mit k Quantoren.

Nach IV gilt dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \beta(0)$, ..., $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \beta(\overline{\tau^{\mathfrak{N}}})$.

Mit (7.5) folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall x \leqslant \tau \;\; \beta(x)$. □

Der Beweis von Lemma (7.9) ist konstruktiv.
Er gibt an, wie man eine von $\mathfrak{N}$ erfüllte Σ_1-Formel mit Natürlichem Schließen herleiten kann.
Zur Skizzierung der Gesamtidee betrachten wir ein Beispiel für eine Formel $\exists x\ \forall y \leqslant \tau(x)\ \varphi(x, y)$.
Da $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \exists x\ \forall y \leqslant \tau(x)\ \varphi(x, y)$, gibt es ein $u \in \mathbb{N}$, so dass für alle $v \leqslant \tau(\overline{u})^{\mathfrak{N}}$ gilt: $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{u}, \overline{v})$.

Die Herleitung der Formel wird dann wie folgt konstruiert.



Aus Lemmas (7.2) und (7.9) erhalten wir

Satz 7.10 (Vollständigkeitssatz der Robinson-Arithmetik für Σ_1-Formeln)

Sei α eine geschlossene Σ_1-Formel.
Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \alpha$
2. $\mathcal{Q} \Vdash\!\models_{\mathcal{P}} \alpha$
3. $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \alpha$

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2) ist Lemma (7.2),
(2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \mathcal{Q}$ (6.13), und
(3) $\Rightarrow$ (1) ist Lemma (7.9). ✓

7.4 Induktionsbeweise und Peano-Arithmetik

Um über Vollständigkeit für Σ_1-Formeln hinauszukommen, muss man die Axiomen-Menge vergrößern.

Definition 7.11 (Induktions-Schema)

Sei $\varphi(x)$ eine arithmetische Formel mit einer freien Variablen x.
Dann ist

$$(\varphi(0) \wedge \forall x \, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x)))) \rightarrow (\forall x \, \varphi(x))$$

das *Induktions-Schema* aus $\varphi(x)$.

Falls φ freie Variablen $x, y_1, \ldots, y_n$ hat (und keine anderen),
dann ist

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \Big((\varphi(0) \wedge \forall x \, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x)))) \rightarrow (\forall x \, \varphi(x)) \Big)$$

der *universelle Abschluss eines Induktions-Schemas aus* φ.

Definition 7.12 ($\mathrm{I}\Delta_0$ und $\mathrm{I}\Delta_0$-Nat)

$\mathrm{I}\Delta_0$ ist die Formelmenge $\mathcal{Q}$ vereinigt mit allen
geschlossenen Induktions-Schemata und
universellen Abschlüssen von Induktions-Schemata,
die aus Δ_0-Formeln entstehen.

Natürliches Schließen mit zusätzlicher Axiomenmenge $\mathrm{I}\Delta_0$ wird mit $\mathrm{I}\Delta_0$-*Nat* bezeichnet.

Beispiele:
für die Δ_0-Formel $x + 0 = x$ ist

$$(0 + 0 = 0 \wedge \forall x(x + 0 = x \rightarrow s(x) + 0 = s(x))) \rightarrow (\forall x\ x + 0 = x)$$

in $\mathrm{I}\Delta_0$ (das ist ein Induktions-Schema für eine Δ_0-Formel), und

für die Δ_0-Formel $x + y = y + x$ ist

$$\forall y\ [\ (0 + y = y + 0 \wedge \forall x(x + y = y + x \rightarrow s(x) + y = y + s(x))) \rightarrow \forall x\ x + y = y + x\ ]$$

in $\mathrm{I}\Delta_0$ (das ist der universelle Abschluss eines Induktions-Schemas für eine Δ_0-Formel).

Lemma 7.13 ($\mathrm{I}\Delta_0$-Nat kann mehr als $\mathcal{Q}$-Nat)

$\mathrm{I}\Delta_0 \vdash_{\mathcal{P}} \forall x \; (\; 0 + x = x \;).$

Beweis: $0 + x = x$ ist eine Δ_0-Formel mit der einzigen freien Variablen x.
Das Induktions-Schema daraus ist in $\mathrm{I}\Delta_0$ und ist die folgende Formel α:

$$\Big(0 + 0 = 0 \;\wedge\; \forall x \; \big(0 + x = x \;\rightarrow\; 0 + s(x) = s(x)\big)\Big) \rightarrow \Big(\; \forall x \; (0 + x = x) \; \Big)$$

(1)		$\blacktriangleright \; 0 + 0 = 0$	Lemmas (5.4) und (6.12)
(2)	$0 + x = x$	$\blacktriangleright \; 0 + x = x$	
(3)		$\blacktriangleright \; 0 + s(x) = s(0 + x)$	$(Q5)(\forall E)(\forall E)$
(4)	$0 + x = x$	$\blacktriangleright \; 0 + s(x) = s(x)$	$(= E)(2)(3)$
(5)		$\blacktriangleright \; (0 + x = x) \rightarrow (0 + s(x) = s(x))$	$(\rightarrow I)(4)$
(6)		$\blacktriangleright \; \forall x \; (\; (0 + x = x) \rightarrow (0 + s(x) = s(x)) \;)$	$(\forall I)(5)$
(7)		$\blacktriangleright \; 0 + 0 = 0 \wedge \forall x \; (\; (0 + x = x) \rightarrow (0 + s(x) = s(x)) \;)$	$(\wedge I)(1)(6)$
(8)		$\blacktriangleright \; \alpha$	(Induktionsschema von $0 + x = x$)
(9)		$\blacktriangleright \; \forall x \; (\; 0 + x = x \;)$	$(\rightarrow E)(7)(8)$ ✓

Π_2-Formeln sind geschlossene Formeln, die aus Σ_1-Formeln entstehen, indem beliebige beschränkte Quantoren oder Allquantoren (...) an den Anfang der Formel geschrieben werden.

Es gibt eine Σ_1-Formel $\varepsilon(x, y)$, die die Exponentialfunktion darstellt:
d.h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{N} \models_{\mathcal{P}} \varepsilon(\overline{m}, \overline{n})$ gdw. $2^m = n$.

Die Formel $\forall x\ \exists y\ \varepsilon(x, y)$ ist eine Π_2-Formel, die von $\mathfrak{N}$ erfüllt wird

(„die von ε dargestellte Funktion ist total“).

Man kann zeigen, dass $\mathrm{I}\Delta_0 \not\vdash_{\mathcal{P}} \forall x\ \exists y\ \varepsilon(x, y)$.

Lemma 7.14

$\mathrm{I}\Delta_0$-*Nat ist nicht vollständig für* Π_2-*Formeln.*

Aber:

Lemma 7.15

$\mathrm{I}\Sigma_1 \vdash_{\mathcal{P}} \forall x\ \exists y\ \varepsilon(x, y)$.

Peano-Arithmetik

Definition 7.16 (Peano-Arithmetik)

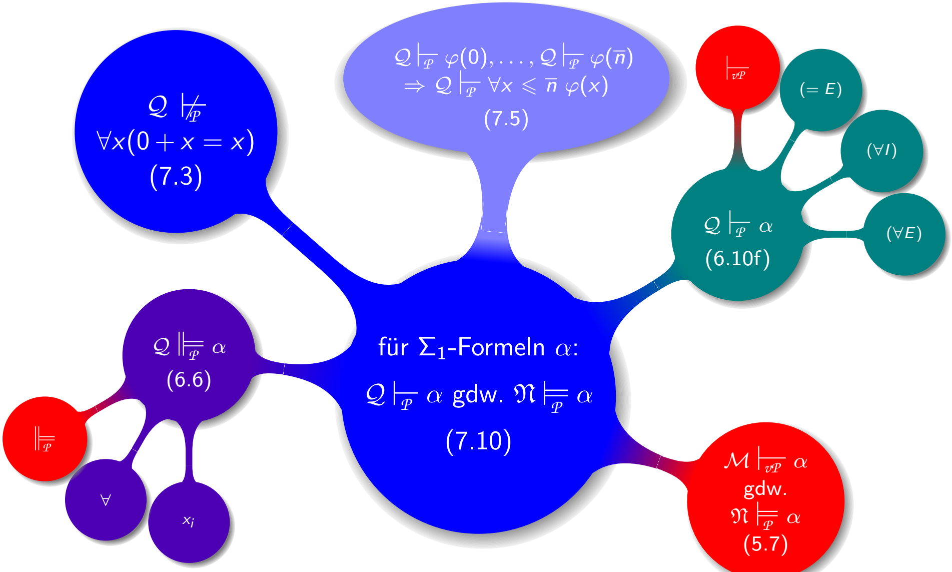
PA ist die Formelmenge $\mathcal{Q}$ vereinigt mit allen Induktions-Schemata,
die aus arithmetischen Formeln entstehen.

Natürliches Schließen mit zusätzlicher Axiomenmenge *PA* wird mit *PA-Nat* bezeichnet.

Das nächste Ziel ist der Beweis des Unvollständigkeitssatzes von Gödel:
PA-Nat ist nicht vollständig für arithmetische Formeln.

Das werden wir mit Begriffen der Berechenbarkeitstheorie machen ...

Robinson-Arithmetik: Grenzen der Beweisbarkeit



Anhang: Beweis von Lemma 7.1

Der Korrektheits-Beweis wird wieder induktiv über die Länge der Herleitung der Formel geführt. Bei der Herleitung können auch Hypothesen benutzt werden.
Deshalb brauchen wir erstmal eine Verallgemeinerung von $\models_{\mathcal{P}}$.

Definition 7.17 (semantische Folgerung $\Vdash\!\!\models_{\mathcal{P}}$)

Sei α eine arithmetische Formel und Γ eine Menge arithmetischer Formeln.
$y_1, \ldots, y_m$ seien alle frei vorkommenden Variablen in Γ und α.

α heißt semantische Folgerung von Γ ($\Gamma \Vdash\!\!\models_{\mathcal{P}} \alpha$), falls
für alle Arithmetik-Modelle $\mathfrak{A}$ und alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_1/y_1] \ldots [\tilde{w}_m/y_m]$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \alpha[\tilde{w}_1/y_1] \ldots [\tilde{w}_m/y_m]$.
Dabei ist $U_{\mathfrak{A}}$ das Universum von $\mathfrak{A}$.

Lemma 7.1
Für alle arithmetischen Formeln α und alle Formelmengen Γ gilt:
wenn $\Gamma \mathrel{|\!\!\underset{\mathcal{P}}{-}} \alpha$, dann $\Gamma \mathrel{\|\!\!\underset{\mathcal{P}}{=}} \alpha$.

Beweis: mittels Induktion über die Länge der Herleitung.

IA: die Herleitung ist der Sequent $\alpha \blacktriangleright \alpha$ oder $\blacktriangleright \tau = \tau$.
$\mathfrak{A}$ erfüllt $\alpha \mathrel{\|\!\!\underset{\mathcal{P}}{=}} \alpha$, bzw. $\mathfrak{A} \mathrel{|\!\!\underset{\mathcal{P}}{=}} \tau = \tau$ gilt offensichtlich.

IV: wenn $\Gamma \blacktriangleright \alpha$ eine Herleitung der Länge $\leqslant n$ hat, dann folgt $\Gamma \mathrel{\|\!\!\underset{\mathcal{P}}{=}} \alpha$.

IS: Wir betrachten Sequenten mit Herleitungen der Länge $n + 1$.
Fälle 1–5 sind wie im Beweis des Korrektheitslemmas für die Aussagenlogik (2.4).
Zusätzlich müssen die Regeln für den Allquantor und für $=$ betrachtet werden (Fälle 6–9).

Fall 6: Anwendung von $(\forall I)$.

Im letzten Herleitungsschritt entsteht $\Gamma \blacktriangleright \forall x_i\, \varphi$ durch Anwendung von $(\forall I)$ auf $\Gamma \blacktriangleright \varphi$,
wobei x_i in keiner Formel in Γ frei vorkommt.

Zu zeigen ist: $\Gamma \mathrel{|\!\!\models_{\mathcal{P}}} \forall x_i\, \varphi$.
Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell mit Universum $U_{\mathfrak{A}}$, und
seien $y_1, \ldots, y_m$ die freien Variablen in Γ, φ außer x_i.

Da $\Gamma \mathrel{|\!\!\models_{\mathcal{P}}} \varphi$ gemäß IV, gilt (1) für alle $w_1, \ldots, w_m, v \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m[\tilde{v}/x_i]$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m[\tilde{v}/x_i]$.

Da x_i nicht frei in Γ vorkommt, ist $\Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m[\tilde{v}/x_i] = \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Damit folgt aus (1), dass für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann gilt für alle $v \in U_{\mathfrak{A}}$: $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m[\tilde{v}/x_i]$.

Mit der Semantik von $\forall$ folgt dann für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann gilt $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \forall x_i\, \varphi[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

D.h. $\Gamma \mathrel{|\!\!\models_{\mathcal{P}}} \forall x_i\, \varphi$.

Fall 7: Anwendung von $(\forall E)$.
Im letzten Herleitungsschritt entsteht $\Gamma \blacktriangleright \varphi[\tau/x_i]$ durch Anwendung von $(\forall E)$ auf $\Gamma \blacktriangleright \forall x_i\, \varphi$,
wobei τ frei für x_i in φ ist.

Zu zeigen ist $\Gamma \mathrel{\|}\!\!\models_{\mathcal{P}} \varphi[\tau/x_i]$.

Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell mit Universum $U_{\mathfrak{A}}$, und
seien $y_1, \ldots, y_m$ die freien Variablen in $\Gamma, \forall x_i\, \varphi, \tau$.

Da $\Gamma \mathrel{\|}\!\!\models_{\mathcal{P}} \forall x_i\, \varphi$ gemäß IV, gilt
(1) für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$: wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \forall x_i\, \varphi[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Gemäß Semantik von $\forall$ folgt daraus, dass für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann gilt für alle $v \in U_{\mathfrak{A}}$: $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\tilde{v}/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Da $\underbrace{\{(\tau[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}} \mid w_i \in U\}}_{U_\tau} \subseteq U_{\mathfrak{A}}$, folgt für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:

wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann gilt für alle $v \in U_\tau$: $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\tilde{v}/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Statt $(\tau[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}}$ für x_i einzusetzen, reicht es auch τ einzusetzen.
Das ergibt: für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$: wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann gilt $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\tau/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.
D.h. $\Gamma \mathrel{\|}\!\!\models_{\mathcal{P}} \varphi[\tau/x_i]$.

Fall 8: Anwendung von $(= I)$.

Der letzte Herleitungsschritt ist $\blacktriangleright \tau = \tau$, und τ habe Variablen $y_1, \ldots, y_m$.

Für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt offensichtlich $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} (\tau = \tau)[\tilde{w}_q / y_q]_{q=1}^{m}$.

Fall 9: Anwendung von $(= E)$.

Im letzten Herleitungsschritt entsteht $\Gamma \blacktriangleright \varphi[\tau/x_i]$ durch Anwendung von $(= E)$ auf $\Delta \blacktriangleright \varphi[\sigma/x_i]$ und $\Delta' \blacktriangleright \sigma = \tau$ mit $\Gamma = \Delta \cup \Delta'$, wobei σ und τ frei für x_i in φ sind.

Zu zeigen ist: $\Gamma \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{P}} \varphi[\tau/x_i]$.

Sei $\mathfrak{A}$ ein Arithmetik-Modell mit Universum $U_{\mathfrak{A}}$, und
seien $y_1, \ldots, y_m$ die freien Variablen in $\Gamma, \varphi[\tau/x_i], \sigma$.

Da $\Gamma \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$ gemäß IV, gilt für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} (\sigma = \tau)[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Gemäß der Semantik von $=$ heißt das: (1) für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\underbrace{(\sigma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}} = (\tau[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}}}_{(\sigma[\widetilde{\tilde{w}_q/y_q}]_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}} \ = \ (\tau[\widetilde{\tilde{w}_q/y_q}]_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}}}$.

Da $\Gamma \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{P}} \varphi[\sigma/x_i]$ und gemäß IV, gilt (2) für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\sigma/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Da σ frei für x_i in φ ist,
ist $\varphi[\sigma/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$ gleich $\varphi[\sigma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Da man statt eines variablenfreien Terms auch das Element des Universums, zu dem er ausgewertet wird, schreiben kann, folgt aus (2):
für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[(\sigma[\widetilde{\tilde{w}_q/y_q]}_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}}/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Mit (1) heißt das:
für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[(\tau[\widetilde{\tilde{w}_q/y_q]}_{q=1}^m)^{\mathfrak{A}}/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

Jetzt können wir das Element des Universums wieder durch den Term ersetzten und die Substitutionen herausziehen und erhalten:
für alle $w_1, \ldots, w_m \in U_{\mathfrak{A}}$ gilt:
wenn $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \Gamma[\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$, dann $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{P}} \varphi[\tau/x_i][\tilde{w}_q/y_q]_{q=1}^m$.

D.h. $\Gamma \mathrel{|}\!\models_{\mathcal{P}} \varphi[\tau/x_i]$. ✓

Anhang: Beweis von Lemma 7.5

Die folgenden (technischen) Lemmas dienen dem Nachweis, dass mit beschränkten Quantoren nur *natürliche Zahlen* im Universum eines Modells erreicht werden können.

- Wenn $\varphi(0)$ oder $\varphi(\overline{1})$ oder ... oder $\varphi(\overline{n})$ herleitbar ist, dann ist auch $\exists x \leqslant \overline{n}\ \varphi(x)$ herleitbar. (Lemma 7.19)
- Wenn $\varphi(0), \varphi(\overline{1}), \ldots, \varphi(\overline{n})$ herleitbar sind, dann ist auch $\forall x \leqslant \overline{n}\ \varphi(x)$ herleitbar. (Lemma 7.5)

Lemma 7.18 ($\leqslant$ lässt sich in der Robinson-Arithmetik repräsentieren)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1. *Falls $m \leqslant n$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \exists v\ (v + \overline{m} = \overline{n})$ (d.h. $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \overline{m} \leqslant \overline{n}$).*
2. *Falls $m > n$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \neg\exists v\ (v + \overline{m} = \overline{n})$ (d.h. $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \overline{m} \not\leqslant \overline{n}$).*

Beweis.

Sei $m \leqslant n$.
Dann gilt $a + m = n$ für ein $a \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \overline{a} + \overline{m} = \overline{n}$ folgt mit Lemmas 4.19 und 6.12.
Mit $(\exists I)$ erhalten wir daraus $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \exists v\ (\ v + \overline{m} = \overline{n}\ )$.

Sei $m > n$.
Behauptung: für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m > n$ gilt $\mathcal{Q}, v + \overline{m} = \overline{n} \vdash_{\mathcal{P}} \perp$.

Beweis der Behauptung mittels Induktion über n.

IA: $n = 0$. Zu zeigen: für alle $m > 0$ gilt $\mathcal{Q}, v + \overline{m} = 0 \vdash_{\mathcal{P}} \perp$.

(1) $v + \overline{m} = 0 \blacktriangleright v + \overline{m} = 0$

(2) $\blacktriangleright v + \overline{m} = s(v + \overline{m-1})$ $(Q5)(\forall E)$

(3) $v + \overline{m} = 0 \blacktriangleright 0 = s(v + \overline{m-1})$ $(= E)(1)(2)$

(4) $\blacktriangleright 0 \neq s(v + \overline{m-1})$ $(Q1)(\forall E)$

(5) $v + \overline{m} = 0 \blacktriangleright \perp$ $(\rightarrow E)(3)(4)$

IV: für alle $m > k$ gilt $\quad \mathcal{Q}, v + \overline{m} = \overline{k} \vdash_{\mathcal{P}} \bot$.

IS: zu zeigen: für alle $m > k+1$ gilt $\mathcal{Q}, v + \overline{m} = \overline{k+1} \vdash_{\mathcal{P}} \bot$.

(1)	$v + \overline{m} = \overline{k+1}$	$\blacktriangleright\ v + \overline{m} = \overline{k+1}$	
(2)		$\blacktriangleright\ v + \overline{m} = s(v + \overline{m-1})$	$(Q5)(\forall E)$
(3)	$v + \overline{m} = \overline{k+1}$	$\blacktriangleright\ s(v + \overline{m-1}) = \overline{k+1}$	$(= E)(1)(2)$
(4)		$\blacktriangleright\ s(v + \overline{m-1}) = \overline{k+1} \to v + \overline{m-1} = \overline{k}$	$(Q2)(\forall E)$
(5)	$v + \overline{m} = \overline{k+1}$	$\blacktriangleright\ v + \overline{m-1} = \overline{k}$	$(\to E)(3)(4)$
(6)	$v + \overline{m} = \overline{k+1}$	$\blacktriangleright\ \bot$	(5)(IV)

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun wieder zurück zum Beweis von: $\quad$ aus $m > n$ folgt $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \neg\exists v\ (\ v + \overline{m} = \overline{n}\ )$.

(1)	$\exists v\ (\ v + \overline{m} = \overline{n}\ )$	$\blacktriangleright\ \exists v\ (\ v + \overline{m} = \overline{n}\ )$		
(2)	$v + \overline{m} = \overline{n}$	$\blacktriangleright\ \bot$	(Behauptung)	
(3)	$\exists v\ (\ v + \overline{m} = \overline{n}\ )$	$\blacktriangleright\ \bot$	$(\exists E)(1)(2)$	
(4)		$\blacktriangleright\ \neg\exists v\ (\ v + \overline{m} = \overline{n}\ )$	$(\to I)(3)$	✓

Das folgende Lemma brauchen wir nicht,
aber es ist einfach zu beweisen und rundet die Sache ab ...

Lemma 7.19

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Formeln $\varphi(x)$ gilt:
Wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(0)$ oder $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{1})$ oder ... oder $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{n})$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \exists x \leqslant \overline{n}\ \varphi(x)$.

Beweis:

(1)	▶ $\varphi(\overline{a})$	Voraussetzung, für ein $a \leqslant n$
(2)	▶ $\overline{a} \leqslant \overline{n}$	Lemma 7.18 (da $a \leqslant n$)
(3)	▶ $\overline{a} \leqslant \overline{n} \ \wedge \ \varphi(\overline{a})$	$(\wedge I)(1)(2)$
(4)	▶ $\exists x\ (\ x \leqslant \overline{n} \wedge \varphi(x)\ )$	$(\exists I)(3)$

✓

Den Rest des Abschnittes brauchen wir,
um die entsprechende Aussage für den Allquantor (Lemma 7.5) zu beweisen ...

Die Implikationsrichtung von rechts nach links des folgenden Lemmas ist der Kern des Beweises von Lemma 7.5.

Die andere Implikationsrichtung ist nicht schwer zu beweisen, und wir benutzen sie zur Veranschaulichung der Benutzung einer Verallgemeinerung von $(\vee E)$.

Lemma 7.20

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} (x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n}) \leftrightarrow x \leqslant \overline{n}$$

Beweis von $\mathcal{Q} \underset{\mathcal{P}}{\vdash} (x = 0 \lor x = \overline{1} \lor \ldots \lor x = \overline{n}) \to x \leqslant \overline{n}$

Wir benutzen eine verallgemeinerte Variante von $(\lor E)$.
$\mathcal{Q} \underset{\mathcal{P}}{\vdash} 0 \leqslant \overline{n}$, …, $\mathcal{Q} \underset{\mathcal{P}}{\vdash} \overline{n} \leqslant \overline{n}$ stammen aus Lemma (7.18).

$$\cfrac{\cfrac{[x = 0 \lor x = \overline{1} \lor \ldots \lor x = \overline{n}]_2 \qquad \cfrac{\cfrac{[x = 0]_1}{0 = x}\,(Symm. =) \qquad 0 \leqslant \overline{n}}{x \leqslant \overline{n}}\,(= E) \quad \cdots \quad \cfrac{\cfrac{[x = \overline{n}]_1}{\overline{n} = x}\,(Symm. =) \qquad \overline{n} \leqslant \overline{n}}{x \leqslant \overline{n}}\,(= E)}{x \leqslant \overline{n}}\,(\lor E)_1}{(x = 0 \lor x = \overline{1} \lor \ldots \lor x = \overline{n}) \to x \leqslant \overline{n}}\,(\to I)_2$$

Beweis von $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} x \leqslant \overline{n} \to (x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n})$

Wir beginnen mit einer (einfachen) Beobachtung.

Beobachtung 1

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{Q},\ s(y) \leqslant \overline{n+1} \vdash_{\mathcal{P}} y \leqslant \overline{n}$.

Beweis der Beobachtung:

(1)	$\exists v\ (v + s(y) = \overline{n+1})$	$\blacktriangleright \exists v\ (v + s(y) = \overline{n+1})$	
(2)	$v + s(y) = \overline{n+1}$	$\blacktriangleright v + s(y) = \overline{n+1}$	
(3)		$\blacktriangleright v + s(y) = s(v + y)$	$(Q5)(\forall E)(\forall E)$
(4)	$v + s(y) = \overline{n+1}$	$\blacktriangleright s(v + y) = \overline{n+1}$	$(= E)(2)(3)$
(5)		$\blacktriangleright s(v + y) = \overline{n+1} \to v + y = \overline{n}$	$(Q2)(\forall E)(\forall E)$
(6)	$v + s(y) = \overline{n+1}$	$\blacktriangleright v + y = \overline{n}$	$(\to E)(4)(5)$
(7)	$v + s(y) = \overline{n+1}$	$\blacktriangleright \exists v\ (v + y = \overline{n})$	$(\exists I)(6)$
(8)	$\exists v\ (v + s(y) = \overline{n+1})$	$\blacktriangleright \exists v\ (v + y = \overline{n})$	$(\exists E)(1)(7)$

Der Beweis wird mit Induktion über n geführt.

IA: $n = 0$. Zu zeigen ist $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} x \leqslant 0 \to x = 0$.

$$
\dfrac{[x \leqslant 0]_4 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, (x \neq 0 \to \exists u\ x = s(u))}{x \neq 0 \to \exists u\ x = s(u)}\,(\forall E) \qquad [x \neq 0]_3}{\exists u\ x = s(u)}\,(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[v + x = 0]_2 \qquad [x = s(u)]_1}{v + s(u) = 0}\,(= E) \qquad \dfrac{\forall x \forall y\, (x + s(y) = s(x + y))}{v + s(u) = s(v + u)}\,(\forall E)}{0 = s(v + u)}\,(= E) \qquad \dfrac{\forall x\ 0 \neq s(x)}{0 \neq s(v + u)}\,(\forall E)}{\bot}\,(\to E)}{\bot}\,(\exists E)_1}{\dfrac{\dfrac{\bot}{x = 0}\,(RAA)_3}{x \leqslant 0 \to x = 0}\,(\to I)_4}\,(\exists E)_2
$$

IS: z.z.: wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} x \leqslant \overline{n} \to x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n}$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} x \leqslant \overline{n+1} \to x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$.

(1)	$x = s(y)$	$\blacktriangleright\ x = s(y)$	
(2)	$x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ \exists v\ (v + x = \overline{n+1})$	
(3)	$x = s(y), x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ \exists v\ (v + s(y) = \overline{n+1})$	$(=E)(1)(2)$
(4)	$x = s(y), x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ \exists v\ (v + y = \overline{n})$	mit Beobachtung 1 aus (3)
(5)	$x = s(y), x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ y = 0 \vee \ldots \vee y = \overline{n}$	$(\to E)$(Voraussetzung)(4)
(6)		$\blacktriangleright\ s(y) = s(y)$	
(7)	$x = s(y), x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ s(y) = \overline{1} \vee \ldots \vee s(y) = \overline{n+1}$	$(=E)(5)(6)$
(8)	$x = s(y), x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$	$(=E)(1)(7)$
(9)	$x = s(y), x \leqslant \overline{n+1}$	$\blacktriangleright\ x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$	$(\vee I)(8)$
(10)	$x = s(y)$	$\blacktriangleright\ x \leqslant \overline{n+1} \to x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$	$(\to I)(9)$
(11)	$x = 0$	$\blacktriangleright\ x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$	$(\vee I)$ aus $x = 0$
(12)	$x = 0$	$\blacktriangleright\ x \leqslant \overline{n+1} \to x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$	$(\to I)(11)$
(13)		$\blacktriangleright\ x = 0 \vee \exists y\ x = s(y)$	Ax. $\forall x\ (x \neq 0 \to \exists y\ x = s(y))$
(14)		$\blacktriangleright\ x \leqslant \overline{n+1} \to x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n+1}$	$(\vee E)(13)(12)(10)$ ✓

Lemma 7.5

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

wenn $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(0), \ldots, \mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\overline{n})$, dann $\mathcal{Q} \vdash_{\mathcal{P}} \forall x \leqslant \overline{n}\ \varphi(x)$.

Beweis: (Wir benutzen wieder eine verallgemeinerte Variante von $(\vee E)$ und die Symmetrie von $=$.)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x \leqslant \overline{n}]_2}{x = 0 \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n}}\,(7.20) \qquad \dfrac{\varphi(0) \qquad [x = 0]_1}{\varphi(x)}\,(=E) \qquad \cdots \qquad \dfrac{\varphi(\overline{n}) \qquad [x = \overline{n}]_1}{\varphi(x)}\,(=E)}{\varphi(x)}\,(\vee E)_1}{x \leqslant \overline{n} \to \varphi(x)}\,(\to I)_2}{\forall x\ (\ x \leqslant \overline{n} \to \varphi(x)\ )}\,(\forall I)$$

✓