

FDE

Wir betrachten die Logik FDE (*First Degree Entailment*). Das Ziel ist es, Beweissysteme für FDE zu definieren und deren Vollständigkeit zu beweisen, so dass die Vorlesung „Logiksysteme“ damit ergänzt werden kann. Das ist wahrscheinlich sehr viel Arbeit, und deshalb kann man sich auch auf einen Teil davon beschränken. Ich habe unten einfach mal 5 „Aufgaben“ aufgeschrieben. Aufgabe 4 ist die größte Herausforderung. Man könnte sich also z.B. auf Aufgaben 1 und 4 oder auf die Aufgaben 1-3 beschränken, oder irgendetwas.

Soweit zu den Zielen. Nun aber nochmal zurück zum Anfang. FDE ist eine mehrwertige Aussagenlogik. Ihre Definition finden Sie im Auszug aus dem Buch von Priest. Einfach gesagt: die Formeln von FDE sind die gleichen, wie die der Aussagenlogik. Ihre Semantik ist jedoch anders. Die Semantik der Aussagenlogik kann man sich als eine Funktion vorstellen, die Formeln auf 0 oder 1 abbildet. Die Semantik von FDE kann man als eine *Relation* zwischen Formeln und $\{0, 1\}$ definieren. Durch so eine Relation steht jede Formel in Relation zu 0, zu 1, zu 0 und 1, oder zu nichts von beidem – das sind 4 Möglichkeiten. Umgangssprachlich können Formeln in FDE falsch (und nicht wahr), wahr (und nicht falsch), sowohl wahr als auch falsch bzw. weder wahr noch falsch sein.

Aufgabe 1. In meinen Vorlesungen habe ich mich auf Formeln aus Atomen, \perp und \rightarrow beschränkt. Das geht in der Aussagenlogik, da es zu jeder Formel (mit beliebigen Verknüpfungszeichen) eine äquivalente Formel aus Atomen, \perp und \rightarrow gibt („ \perp und \rightarrow sind adäquat“). Diese Beschränkung ist praktisch für den Umgang mit Beweissystemen, da die Beweissysteme „klein“ bleiben und folglich auch der Nachweis von Korrektheit und Vollständigkeit weniger umfangreich wird.

Priest benutzt in seinem Buch für FDE Formeln aus Atomen, \neg , \wedge und \vee .

Wir wollen als erstes zeigen, dass \perp und \rightarrow auch für FDE adäquat sind.

Aufgabe 2. Priest definiert ein Tableau-System für FDE mit sehr vielen Regeln. In meiner Logik-Systeme Vorlesung hatte ich ein Tableau-System für die Aussagenlogik mit zwei Regeln.

Wir wollen ein Tableau-System für FDE für Formeln aus Atomen, \perp und \rightarrow definieren, das zu der Definition für ein aussagenlogisches Tableau-System in der Logik-Systeme Vorlesung passt.

Aufgabe 3. Wir wollen zeigen, dass das in Aufgabe 2 definierte Tableau-System vollständig für FDE ist.

Im Buch von Priest gibt es einen Vollständigkeitsbeweis für sein System. An dem kann man sich für den neuen Beweis orientieren.

Aufgabe 4. Wir wollen noch ein weiteres Beweis-System für FDE anschauen: ein Frege-System oder ein System mit natürlichem Schließen. Diese beiden System-Arten unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass in Frege-Systemen viele Axiome und wenig Schlussregeln sind, und beim natürlichen Schließen hat man viele Schlussregeln und wenig Axiome. Bei FDE gibt es keine gültigen Formeln – beim Beweisen ist man also an *semantischen Folgerungen* interessiert. Entsprechend kann es auch keine Axiome geben. Dadurch gibt es eigentlich auch keinen Unterschied mehr zwischen diesen beiden Beweissystemen.

In der Arbeit von Omori und Wansing findet man einen Überblick über verschiedene Definitionen der Semantik von FDE und verschiedene Beweissysteme für FDE. Der Nachteil ist, dass – wie im Buch von Priest – Formeln aus Atomen, \neg , \wedge und \vee . Wir müssen das also für Formeln aus Atomen, \perp und \rightarrow übertragen. Das ist nicht so einfach wie bei Tableau-Systemen.

Aufgabe 5. Wir wollen die Korrektheit des in Aufgabe 4 entwickelten Beweis-Systems beweisen.

Auf der Webseite <https://users.fmi.uni-jena.de/~mundhenk/Webseite/FDE/FDE.html> finden Sie einen Auszug mit den für uns wichtigen Seiten aus dem Buch von Priest, und die Arbeit von Omori und Wansing. Für den Anfang reicht das auf jeden Fall.

Literatur (findet man auch auf der Webseite):

Graham Priest: An introduction to non-classical logic, Cambridge University Press 2012

Omori, Wansing: 40 years of FDE – an introductory overview, *Studia Logica*(2017) 105: 1021–1049

Font: Belnap’s Four-Valued Logic and DeMorgan Lattices, *Logic Journal of the IGPL*, Vol. 5 No. 3, pp. 413–440 1997