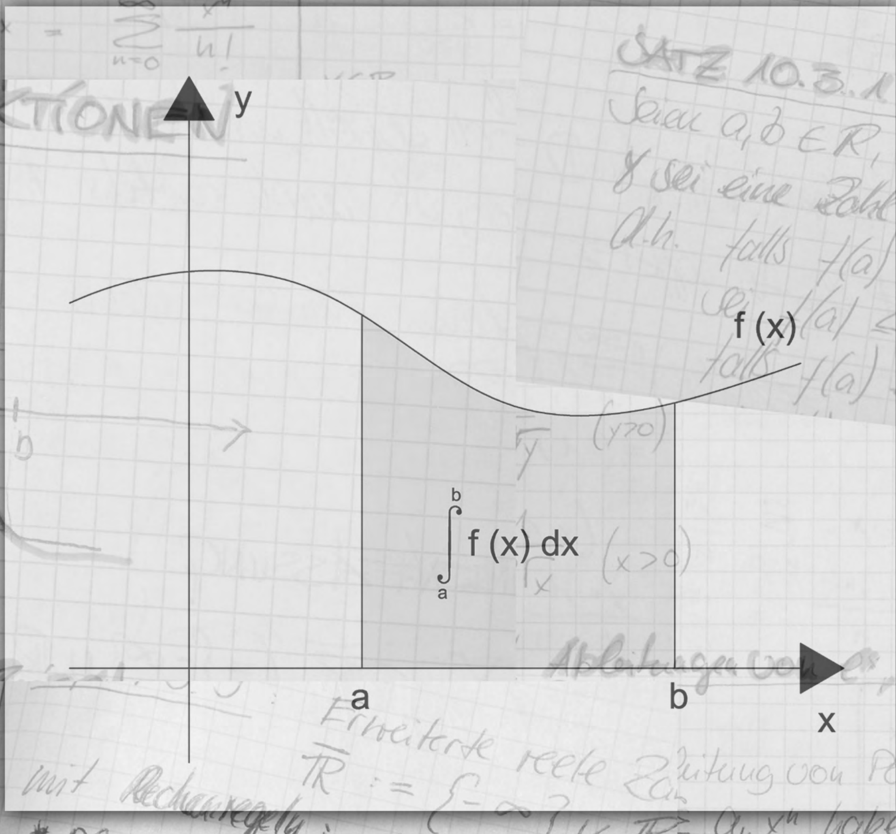
DANIEL GRIESER

ANALYSIS I



CARL VON OSSIETZKY
universität OLDENBURG

Skript zur Analysis I
Wintersemester 2009/10
Prof. Dr. Daniel Grieser

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik
26111 Oldenburg
E-Mail: daniel.grieser@uni-oldenburg.de

Die Homepage zur Vorlesung (Wintersemester 2005/06):
http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/05WS.analysis_1/

Bearbeitung: Uwe Batterham, Stefan Grahl, Andreas Hettler, Roman Rathje, Jörg Sauter und Hero Wanders
Titelgestaltung: Christina Roolfs

Zuletzt bearbeitet: **16. November 2012**

Vorwort zur Skriptversion vom 27. November 2009

In dieser Version wurden einige kleinere Fehler beseitigt und das Layout für den Druck zum Verteilen in der Analysis I im Wintersemester 2009/10 etwas angepasst. Vielen Dank an Andreas Hettler hierfür.

Vorwort zur Skriptversion vom 28. April 2006

Diese Version kann nun als vollständiges Skript der Analysis-I-Vorlesung angesehen werden. Viele Dinge, die in der ersten Version fehlten, wurden ergänzt: Die Einleitung, das Kapitel über Integrale, einige Beweise (manche werden weiterhin der Leserin zur Übung überlassen), das Stichwortverzeichnis. Besonders möchte ich auf folgende Ergänzungen hinweisen:

- ▷ Kapitel 3: Bessere Erklärungen der logischen Grundbegriffe; Erläuterungen zur praktischen Bedeutung von Injektivität und Surjektivität, von Komposition und inversen Abbildungen; Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.
- ▷ Am Ende von Kapitel 5: Ergänzende Erläuterungen zum Axiomensystem.
- ▷ Kapitel 12.1: Polarkoordinaten.

Einige Druckfehler sind auch verschwunden, aber es gibt sicher noch welche zu finden. Für Hinweise bin ich dankbar. Ich danke allen, die mich auf Fehler aufmerksam gemacht haben. Außerdem danke ich Andreas Hettler, der das Layout noch einmal wesentlich verbessert hat, und Jörg Sauter für das Stichwortverzeichnis.

Oldenburg, den 28.4.2006
Daniel Grieser

Vorwort zur ersten (unvollständigen) Skriptversion

Hier ist das lang ersehnte Skript zur Analysis I.

Ich hoffe, es wird Ihnen nicht nur bei der Klausurvorbereitung nützen, sondern auch in den folgenden Semestern als Referenz dienen.

Das Skript entstand aus Vorlesungsmitschriften einer engagierten Gruppe von Studenten, die kurz vor Weihnachten beschlossen, diese Mitschriften auszuarbeiten. Da ein Skript aber über eine Vorlesungsmitschrift hinausgehen sollte, habe ich viele Erklärungen sowie einige Beweise, für die in der Vorlesung keine Zeit war, ergänzt.

Die Strukturierung des Skripts weicht in einigen Punkten von der Vorlesung ab: Manches, was dort ein Lemma war, ist hier ein Satz, manche Bemerkung ist zum Lemma aufgestiegen und das eine oder andere Beispiel zu einem Satz geworden. Daher stimmt auch die Nummerierung der Sätze und Definitionen nicht mit der in der Vorlesung überein. Ich hoffe, Sie können damit leben. Schließlich hat die Nummerierung keinen intrinsischen Wert, sondern war lediglich für das Aufschreiben der Lösungen der Übungsaufgaben gedacht.

Es liegt in der Natur eines Skripts, vorläufig zu sein. So fehlen noch einige Beweise und die letzten fünf Vorlesungen (ab dem 27. Januar). Das Integral erscheint damit bisher nur auf dem Titelblatt. In den nächsten Wochen werden Sie das, was noch fehlt, auf der Webseite der Vorlesung finden.

Falls Sie Anregungen zum Skript haben oder einen Fehler entdecken sollten, lassen Sie es mich bitte per E-Mail wissen. Eine Überarbeitung des gesamten Skripts ist geplant.

Ich danke Uwe Batterham, Stefan Grahl, Andreas Hettler, Roman Rathje, Jörg Sauter und Hero Wanders für die produktive Zusammenarbeit, Christina Roolfs für die Gestaltung des Titelblatts und besonders Andreas Hettler für den Anstoß zu diesem Projekt. Ohne sie alle wäre dieses Skript nicht entstanden.

Oldenburg, den 5. Februar 2006

Daniel Grieser

Inhaltsverzeichnis Analysis I

Impressum . . . ii
Vorwort . . . iii

1 **Einleitung** **1**

2 **Zahlen** **5**
2.1 Die reellen Zahlen . . . 5
2.2 Die natürlichen und die ganzen Zahlen . . . 9
2.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion . . . 10
2.4 Die rationalen Zahlen . . . 13

3 **Logik, Mengen, Abbildungen** **15**
3.1 Logik . . . 15
3.2 Etwas Mengenlehre . . . 17
3.3 Abbildungen . . . 18
3.4 Abzählbare Mengen . . . 20

4 **Etwas Kombinatorik** **23**

5 **Die Vollständigkeit der reellen Zahlen** **27**

6 **Folgen und Konvergenz** **35**
6.1 Definition der Konvergenz . . . 35
6.2 Konvergenz und algebraische Operationen . . . 38
6.3 Der Grenzwert ›unendlich‹ . . . 40
6.4 Asymptotische Gleichheit . . . 43
6.5 Konvergenz und Vollständigkeit . . . 44

7 **Unendliche Reihen** **49**
7.1 Definition und Beispiele . . . 49
7.2 Konvergenzkriterien für Reihen . . . 51
7.3 Absolute Konvergenz und Umordnung von Reihen . . . 55
7.4 Doppelreihen, Cauchy-Produkt . . . 56
7.5 Potenzreihen . . . 59

8 **Die Exponentialfunktion** **63**
8.1 Grundlegende Eigenschaften . . . 63
8.2 Anhang zur Exponentialfunktion . . . 66

9 **Komplexe Zahlen** **71**
9.1 Definitionen und wichtige Regeln . . . 71
9.2 Folgen und Reihen komplexer Zahlen . . . 74

9.3 Komplexe Potenzreihen . . . 75

10 Stetigkeit **77**
10.1 Definition und elementare Eigenschaften . . . 77
10.2 Grenzwerte von Funktionen . . . 81
10.3 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . 84
10.4 Funktionenfolgen; gleichmäßige Konvergenz . . . 88

11 Differentialrechnung **91**
11.1 Definition und grundlegende Eigenschaften . . . 91
11.2 Ableitung und Funktionseigenschaften . . . 98
11.3 Taylorapproximation und Taylorreihen . . . 102
11.4 Konvexität, Bedeutung der zweiten Ableitung . . . 108

12 Die trigonometrischen Funktionen **111**
12.1 Sinus und Cosinus . . . 111
12.2 Weitere trigonometrische Funktionen . . . 117

13 Integration **119**
13.1 Das Integral für Treppenfunktionen . . . 119
13.2 Das Integral für Regelfunktionen . . . 121
13.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 124
13.4 Berechnung von Integralen: Partielle Integration, Substitution und Potenzreihen . . . 128
13.5 Uneigentliche Integrale . . . 135

Index **141**

1 Einleitung

Die großen Themen der Analysis I sind

Zahlen **Konvergenz** **Funktionen**

Zunächst werden wir uns die **Zahlen** genauer ansehen: Reelle, natürliche, ganze, rationale, später auch komplexe Zahlen. Als erstes die reellen Zahlen, die wichtigsten für die Analysis. Wir fragen:

Was kann ich mit den reellen Zahlen anfangen? Welche Eigenschaften haben sie?

Die Axiome bilden als Grundstock »einfachster« Eigenschaften der reellen Zahlen den Ausgangspunkt unserer Erkundungen. Alles weitere werden wir aus den Axiomen herleiten, mittels mathematischer Beweise.

Warum Axiome? Beweisen heißt immer, eine Aussage aus anderen Aussagen herzuleiten. Irgendwo muss man anfangen. Am Anfang von Kapitel 2 und am Ende von Kapitel 5 finden Sie weitere Erläuterungen zur »axiomatischen Methode«.

Was die Analysis zur Analysis macht und von anderen Gebieten der Mathematik, etwa der Algebra, unterscheidet, ist die Betrachtung von **Konvergenz.** So verfolgen wir mathematisch den Gedanken weiter, dass sich ein Objekt »beliebig dicht« einer Grenze annähert. Davon kann man nur sprechen, wenn das »Objekt« eine Dynamik in sich trägt, also etwa aus vielen Teilobjekten zusammengesetzt ist. Dass die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ und so weiter sich immer mehr dem Grenzwert null annähern, drückt man dann so aus:

Die Folge $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ konvergiert gegen null.

Die Klammern erinnern daran, dass wir diese Abfolge einzelner Zahlen gedanklich als *ein* Objekt sehen.

Konvergiert die Folge $\left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \dots\right)$ auch gegen null?

Um diese Frage eindeutig beantworten zu können, brauchen wir eine genaue Beschreibung der Konvergenz: eine mathematische Definition. Der mathematische Konvergenzbegriff ist so gebaut, dass die Antwort »Nein« lautet. Obwohl ein Teil der Folge ja doch gegen null (und ein anderer Teil gegen eins) konvergiert – dies werden wir mit Hilfe der Begriffe Teilfolge und Häufungspunkt genauer verstehen.

Mit Hilfe des Konvergenzbegriffs lassen sich dann auch kontroverse Gleichheiten wie $0{,}\overline{9} = 1$, die berühmte Zenon-Paradoxie über Achilles und die Schildkröte und »unendliche Summen« erklären (die unendlichen Summen werden uns dabei als »Reihen« begegnen).

Aus Zahlen lassen sich komplexere Gebilde zusammensetzen, die **Funktionen,** die Verhältnisse und Beziehungen schaffen: Eine Funktion ordnet jeder Zahl in einer gegebenen Zahlenmenge eine Zahl in einer anderen Zahlenmenge zu. Funktionen kann man sich mittels ihrer Graphen veranschaulichen.

Eines unserer Ziele wird es sein, qualitative Eigenschaften von Funktionen präzise zu klären. Wie formuliert man mathematisch, dass der Graph einer Funktion keine Sprünge hat, oder dass er keine Ecken hat; was ist und wie berechne ich die Fläche unter diesem Graphen? Dies führt auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrale. Hinter all diesen Begriffen steckt die Idee der Konvergenz in verschiedenen Verkleidungen.

Zum anderen werden wir die wichtigsten Funktionen genau kennenlernen: Potenz, Exponentialfunktion, Logarithmus und die trigonometrischen Funktionen.

Da die Analysis-I-Vorlesung am Anfang der universitären Mathematik-Ausbildung steht, haben wir, neben der Einführung in diese mathematischen Konzepte, noch mehr vor. Sie werden

- eine präzise Ausdrucksweise, genaues und logisch begründetes Umgehen mit Aussagen einüben. Zum Beispiel werden Sie später keine Schwierigkeit damit haben, die Negation der folgenden Aussage über eine Folge $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ reeller Zahlen zu formulieren:

  Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|x_n| \leq \varepsilon$.

  (Hierbei steht ε – epsilon – für eine reelle Zahl, und n und n_0 stehen für natürliche Zahlen.)

- sich die Bedeutung mathematischer Aussagen anhand von Beispielen und durch Übersetzung in die Umgangssprache klarmachen. Was bedeutet die Aussage oben anschaulich? Wie unterscheidet sie sich von folgender:

  Für alle $\varepsilon > 0$ und alle n_0 gibt es ein $n \geq n_0$ mit $|x_n| \leq \varepsilon$.

  Was sind charakteristische Beispiele für die beiden Aussagen?

- umgangssprachliche Sätze in mathematische Aussagen übersetzen,

- einige Beweistechniken und -ideen kennenlernen: die vollständige Induktion, den indirekten Beweis, auch weniger präzise Ideen wie das Extremalprinzip (siehe dazu auch die Bemerkung nach Satz 5.1.3),

- intuitive, bildliche Ideen in mathematische Beweise (oder Definitionen) übersetzen lernen,

- Rechentechniken kennenlernen, beispielsweise für Grenzwerte, Ableitung und Integral,

- ...und dabei einiges Spannende entdecken, und hoffentlich auch Freude an der Mathematik haben!

Manches hiervon werden Sie nicht in einem Semester schaffen, es braucht Zeit. Aber nicht nur Zeit, es braucht vor allem Ihren Einsatz: Übungsaufgaben lösen; Beweise der Sätze und Lemmata nicht gleich lesen, sondern zuerst selbst versuchen sie zu finden; sich und anderen kritische Fragen stellen: Warum so und nicht anders? Was kann man damit anfangen?

Zur Rolle von Beweisen

Eines der auffälligsten Merkmale der Mathematik ist, dass alles bewiesen wird. Warum eigentlich? Darauf gibt es viele Antworten. Hier sind einige davon.

Bestätigen einer Vermutung: Man stellt eine Regelmäßigkeit fest und möchte sicher sein, dass sie wirklich immer stimmt: Schreibt man die Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ auf, so sieht man vielleicht, dass die Abstände zwischen ihnen genau die ungeraden Zahlen $3, 5, 7, 9, \dots$ sind. Geht das immer so weiter?

Oder man rechnet die Formel $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für einige natürliche Zahlen n nach. Stimmt sie für alle n?

Oder man merkt durch Probieren, dass man immer mehr Primzahlen finden kann, egal wie weit man geht. Dann vermutet man vielleicht, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Um diese Fragen zu beantworten, braucht man Beweise.

Spulen wir etwas vor: Ein berühmtes Beispiel, wo sämtliches
Zahlenmaterial auf eine Gesetzmäßigkeit hindeutete, die sich später aber als
falsch herausstellte.
Sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner-gleich x, und sei $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$.

Sämtliche Tabellen zeigten,
dass anscheinend $\mathrm{Li}(x)$ den Wert von $\pi(x)$ für große x sehr gut annähert,
und genauer, dass

(1) der relative Fehler $\frac{\pi(x) - \mathrm{Li}(x)}{\pi(x)}$ für wachsendes x sehr klein wird und

(2) $\pi(x)$ immer kleiner als $\mathrm{Li}(x)$ ist (für $x \geq 8$).

Der berühmte Primzahlsatz sagt, dass (1) tatsächlich stimmt, also der Grenzwert
des relativen Fehlers für $x \to \infty$ gleich null ist. Es wurde lange vermutet,
dass (2) stimmt, bis John E. Littlewood zeigte, dass dies für gewisse sehr, sehr große x falsch
sein muss (Sur la distribution des nombres premiers, Paris 1914).

Ausloten der Grenze zwischen wahr und falsch: Man will einen Sachverhalt verstehen, ohne vorher eine Vermutung zu haben. Man fragt sich vielleicht, ob $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist oder nicht (bereits populär im alten Griechenland). Das ist zunächst unklar. Mit dem Taschenrechner oder Computer sieht man, dass die Dezimalentwicklung anscheinend nicht periodisch ist, also vermutet man, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Um sicher zu sein, muss man das beweisen.

Test für Konzepte: Eine andere Rolle spielt oft der Beweis von »anschaulich klaren« Aussagen wie dem Zwischenwertsatz:

Ist f eine auf einem Intervall definierte stetige Funktion und ist f an einem Punkt positiv und an einem anderen negativ, so gibt es zwischen diesen Punkten eine Nullstelle von f.

Was gibt es da zu beweisen, wenn man mit Stetigkeit meint, dass man den Graphen ohne Absetzen zeichnen kann? Dies ist zwar die Intuition für Stetigkeit, aber wir müssen diese Intuition in eine mathematische Definition übersetzen (um beispielsweise auch dann von Stetigkeit reden zu können, wenn wir den Graphen nicht mehr zeichnen können). Dass mit dieser Definition der Zwischenwertsatz gilt, ist ein Test dafür, dass sie wirklich unsere Erwartungen erfüllt.

Neues verstehen: Im Rahmen von Vorlesungen haben die Beweise auch die Funktion, Konzepte einzuüben. Wer etwas über stetige Funktionen beweist, wird sich die Definition der Stetigkeit genau ansehen – und dadurch ein Gefühl dafür bekommen, was in ihr steckt und was nicht. Das funktioniert aber nur, wenn Sie selbst versuchen einen Beweis zu finden, bevor Sie ihn lesen!

Krücken für den Geist: Manchmal ist man doch etwas nachlässig im Denken. Setzt man sich hin, um einen Beweis richtig hinzuschreiben, merkt man oft, dass man eine Kleinigkeit übersehen hat oder einem Trugschluss aufgesessen ist.

Trotz alledem: **Die Intuition,** das Entwickeln von Ideen anhand von Beispielen und Bildern und unexakten Vorstellungen, ist mindestens genauso wichtig wie das Beweisen!

2 Zahlen

2.1 Die reellen Zahlen

Wer Mathematik betreibt, fragt nicht: ›Was sind die reellen Zahlen?‹, sondern ›Welche Eigenschaften haben die reellen Zahlen?‹. Eine Schachspielerin interessiert während des Spiels ja auch nicht, woraus die Schachfiguren gebaut sind, sondern nur, wie sie ziehen. Aus den Zugmöglichkeiten der Figuren ergeben sich dann die unüberschaubar vielen Kombinationen und Spielverläufe des Schachspiels, Theorien über Eröffnungen, Mittel- und Endspiele und vieles mehr.

Ähnlich zum Schachspiel werden wir einige wenige Eigenschaften der reellen Zahlen als gegeben annehmen (die Axiome) und daraus die ganze wunderbare Welt der Mathematik ableiten.

Trotz dieser Einschränkungen hier ein paar Bemerkungen dazu, wie man die reellen Zahlen »bauen« kann. Mittels verschiedener Methoden (z. B. Cauchy-Folgen, Dedekind-Schnitte) lassen sich »die reellen Zahlen konstruieren«. Hierbei muss von irgendeinem »Urkeim« angefangen werden. In den üblichen Darstellungen bilden diesen entweder die natürlichen Zahlen (die nach Kronecker »gottgegeben« sind) oder die Mengenlehre (hierzu später ein wenig mehr). Was hat man von so einer Konstruktion? Sie gibt einem die Sicherheit, dass die Axiome wirklich erfüllt werden können, also nicht in sich widersprüchlich sind – jedenfalls soweit dies für den »Urkeim« zutrifft. Die letzte Frage nach der Existenz des Urkeims (d. h. in der modernen Auffassung nach der Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre) wird sich nie klären lassen – aus prinzipiellen Gründen, wie Gödel gezeigt hat.

In dieser Vorlesung belasse ich es also beim axiomatischen Zugang zu den reellen Zahlen.
Die Axiome gliedern sich dabei in drei Gruppen:

Die Körperaxiome

Die Anordnungsaxiome

Das Vollständigkeitsaxiom

Wir befassen uns zunächst mit den beiden ersten Gruppen, sehen, was wir damit anfangen können, spielen gewissermaßen mit ihnen herum. Das Vollständigkeitsaxiom wird erst später behandelt.

Sie werden sich vielleicht fragen: Warum gerade diese Axiome? Es gibt keine überzeugende Antwort, Alternativen sind möglich. Am Ende von Kapitel 5 werden wir sehen, dass diese Axiome die reellen Zahlen eindeutig festlegen. Das spricht für sie. Die Axiome sprechen aber auch für sich selbst: Aus dem Gebrauch heraus werden Sie ihnen Ihre eigene Bedeutung und Begründung geben.

Die Körperaxiome

Die Menge der reellen Zahlen, die wir axiomatisch beschreiben wollen, bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

2.1.1 Körperaxiome

Auf $\mathbb{R}$ sind die Operationen $+$ und $\cdot$ erklärt, die je zwei reellen Zahlen a, b eine reelle Zahl $a+b$ beziehungsweise $a \cdot b$ zuordnen. Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

Kommutativität:

Es ist $a+b=b+a$ und $a \cdot b = b \cdot a$.

Assoziativität:

Es ist $a+(b+c)=(a+b)+c$ und $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Existenz des neutralen Elements:

Es gibt genau ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit $a+0=a$ für alle a.

Es gibt genau ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot 1 = a$ für alle a.

Existenz des inversen Elements:

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a+b=0$.

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot b = 1$.

Es ist $0 \neq 1$.

Distributivgesetz:

Es ist $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Bemerkung: $a \cdot b + a \cdot c$ ist als $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ zu verstehen, wir verwenden also die Konvention »Punktrechnung geht vor Strichrechnung«.

2.1.2 Definition

Eine Menge zusammen mit den Operationen $+$ und $\cdot$, die diese Axiome erfüllen, heißt **Körper** field.

Bemerkung: Es gibt auch andere Körper, so zum Beispiel den Körper

$$K_2 = \{0, 1\} \text{ mit den Operationen } \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2.1.3 Lemma

Das inverse Element für $+$ und $\cdot$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Angenommen, es gilt $a+b=0$ und auch $a+b'=0$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $b' \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass $b=b'$. Idee zu diesem Beweis: Man vereinfacht auf zwei Arten $b+a+b'$:

$$\begin{aligned} b &= b+0 && \text{neutrales Element bzgl. der Addition} \\ &= b+(a+b') && \text{Definition von } b' \\ &= (b+a)+b' && \text{Assoziativität der Addition} \\ &= (a+b)+b' && \text{Kommutativität der Addition} \\ &= 0+b' && \text{Definition von } b \\ &= b'+0 && \text{Kommutativität der Addition} \\ &= b' && \text{neutrales Element bzgl. der Addition} \end{aligned}$$

□

Bemerkung: ›Zu zeigen‹ und ›Idee‹ sind für den formalen Beweisaufbau überflüssig und dienen hier nur der besseren Lesbarkeit. Der Beweis für die Multiplikation verläuft analog dazu.

2.1.4 Definition

Zu $a \in \mathbb{R}$ sei $\boldsymbol{-a}$ das bezüglich $+$ inverse Element. Zur Abkürzung schreibt man:

$$\boldsymbol{a - b} \underbrace{:=}_{\text{ist definiert als}} a + (-b)$$

Zu $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sei $\boldsymbol{a^{-1}}$ das bezüglich $\cdot$ inverse Element. Man schreibt auch:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} := a \cdot b^{-1}$$

2.1.5 Lemma

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $-(-a) = a$

(b) $(a^{-1})^{-1} = a$, falls $a \neq 0$

(c) $(-a) + (-b) = -(a + b)$

(d) $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$, falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$

(e) $a \cdot 0 = 0$

(f) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(g) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(h) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

Beweis: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Per Definition ist $a + (-a) = 0$. Wegen der Kommutativität der Addition folgt $(-a) + a = 0$. Nach Definition des Inversen der Addition ist also $-(-a) = a$.

(b) Per Definition ist $a \cdot a^{-1} = 1$. Wegen der Kommutativität der Multiplikation folgt $a^{-1} \cdot a = 1$. Nach Definition des Inversen der Multiplikation ist also $(a^{-1})^{-1} = a$.

(c) Es gilt
$$\begin{aligned}\big((-a) + (-b)\big) + (a + b) &= (a + b) + \big((-a) + (-b)\big)\\ &= a + b + (-a) + (-b)\\ &= a + (-a) + b + (-b)\\ &= \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big)\\ &= 0 + 0 = 0\,.\end{aligned}$$
Wir haben hier das Assoziativitätsgesetz recht großzügig verwendet, streng genommen fehlen ein paar Zwischenschritte. Mit der Definition des Inversen der Addition folgt schließlich $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

(d) Sei $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Also existieren a^{-1} und b^{-1} und es ist
$$\begin{aligned}(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1})\\ &= a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}\\ &= a \cdot a^{-1} \cdot b \cdot b^{-1}\\ &= (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1})\\ &= 1 \cdot 1 = 1\,.\end{aligned}$$
Nach der Definition des Inversen der Multiplikation folgt also $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$.

(e) Es gilt: $a \cdot 0 = a \cdot (0+0)$ Neutrales$^+$

damit folgt: $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ Distributivgesetz

damit folgt: $a \cdot 0 + \big(-(a \cdot 0)\big) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + \big(-(a \cdot 0)\big)$ Addition von $-(a \cdot 0)$

damit folgt: $0 = a \cdot 0 + \big(a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))\big)$ Assoz.$^+$, Inverses$^+$

damit folgt: $0 = a \cdot 0$ Inverses$^+$

(f) Es gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) + a \cdot b &= a \cdot b + a \cdot (-b) \\ &= a \cdot \big(b + (-b)\big) \\ &= a \cdot 0 \\ &\overset{(e)}{=} 0 \end{aligned}$$

Nach der Definition des Inversen der Addition folgt also: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

(g) Es gilt:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &\overset{(f)}{=} -\big((-a) \cdot b\big) \\ &= -\big(b \cdot (-a)\big) \\ &\overset{(f)}{=} -\big(-(b \cdot a)\big) \\ &\overset{(a)}{=} b \cdot a \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

(h) Zunächst zeigen wir: Wenn $a = 0$ oder $b = 0$ gilt, dann ist $a \cdot b = 0$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden: Erstens $b = 0$: Dies ist gerade (e). Zweitens $a = 0$: Dann gilt wegen der Kommutativität der Multiplikation $a \cdot b = b \cdot a = b \cdot 0 \overset{(e)}{=} 0$.

Nun zeigen wir: Wenn $a \cdot b = 0$ gilt, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$. Wir führen dazu einen indirekten Beweis und zeigen stattdessen (die Ausrufezeichen bedeuten: dies ist noch zu zeigen):

	nicht $(a = 0$ oder $b = 0)$	$\overset{!}{\Rightarrow}$	nicht $(a \cdot b = 0)$
gleichwertig:	nicht $a = 0$ und nicht $b = 0$	$\overset{!}{\Rightarrow}$	$a \cdot b \neq 0$
gleichwertig:	$a \neq 0$ und $b \neq 0$	$\overset{!}{\Rightarrow}$	$a \cdot b \neq 0$

Da $b \neq 0$ ist, existiert b^{-1}. Falls jetzt $a \cdot b = 0$ wäre, so würde $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$ folgen. Damit folgt wegen Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation $a \cdot (b \cdot b^{-1}) = b^{-1} \cdot 0$, also $a \cdot 1 = 0$. Und dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme $a \neq 0$. Damit folgt die Behauptung. □

Die Anordnungsaxiome

2.1.6 Anordnungsaxiome

Auf $\mathbb{R}$ ist eine Relation »kleiner-als« erklärt, d. h. für jedes Paar (a, b) reeller Zahlen ist entweder $a < b$ oder nicht $a < b$, auch geschrieben $a \not< b$. Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$	**Trichotomie**
$a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$	**Transitivität**
$a < b$ und c beliebig $\Rightarrow a + c < b + c$	**Verträglichkeit mit $+$**
$a < b$ und $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	**Verträglichkeit mit $\cdot$**

Wir verwenden die Schreibweisen

$$a > b \quad \text{heißt} \quad b < a,$$

$$a \leq b \quad \text{heißt} \quad a < b \text{ oder } a = b,$$

$$a \geq b \quad \text{heißt} \quad a > b \text{ oder } a = b.$$

2.1.7 Lemma

Mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $a < 0, b < 0 \;\Rightarrow\; a + b < 0.$

$a > 0, b > 0 \;\Rightarrow\; a + b > 0.$

$a < 0 \;\Rightarrow\; -a > 0.$

(2) Mit $a \neq 0$ gilt: $a \cdot a > 0.$

(3) $1 > 0.$

Man schreibt statt $a \cdot a$ auch a^2.

Beweis:

(1) Seien $a < 0$ und $b < 0$. Aus $a < 0$ und der Verträglichkeit mit der Addition folgt $a + b < 0 + b = b$. Also ist $a + b < b$. Außerdem ist $b < 0$, damit folgt aus der Transitivität $a + b < 0$. Die zweite Behauptung zeigt man ähnlich. Die dritte folgt durch Addition von $-a$ auf beiden Seiten.

(2) Zwei Fälle:

$a > 0$: Es ist $0 < a$. Daraus folgt wegen der Verträglichkeit mit der Multiplikation dann $0 \cdot a = 0 < a \cdot a = a^2$.

$a < 0$: Aus (1) folgt $-a > 0$. Nach dem ersten Fall ist dann $(-a)(-a) > 0$, also $a \cdot a = a^2 > 0$.

(3) Es gilt $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$. Wende nun den zweiten Fall auf $a = 1$ an. □

Das Vollständigkeitsaxiom

Siehe 5.1.4.

2.2 Die natürlichen und die ganzen Zahlen

Intuitiv: $\mathbb{N} = \{1, \underbrace{1+1}_{=:2}, \underbrace{1+1+1}_{=:3}, \dots\}$. Und diese sind alle voneinander verschieden:

$$0 < 1 \xRightarrow{\text{Vertr.}^+} 0 + 1 < 1 + 1, \text{ d.h. } 1 < 2 \xRightarrow{\text{Vertr.}^+} 2 < 3 \xRightarrow{\text{Vertr.}^+} 3 < 4 \;\dots\; \xRightarrow{\text{Trans.}} 1 < 3 \;\dots$$

Bemerkung: Im zwei-elementigen Körper K_2 gilt dies nicht, denn es ist $0 = 1 + 1$ und $1 = 1 + 1 + 1$. Daraus folgt, dass K_2 nicht angeordnet werden kann. Ein angeordneter Körper ist ein Körper mit einer »kleiner-als«–Relation, die die Anordnungsaxiome erfüllt.

Wir wollen $\mathbb{N}$ ohne ... definieren. Dies geht mit einem »Trick«, der einem auch gleich das Induktionsprinzip gratis mitliefert:

2.2.1 Definition

Eine Teilmenge (s. Def. 3.2.1) $M \subset \mathbb{R}$ heißt **induktiv,** falls gilt:

(1) 1 ist in M.

(2) Wenn $x \in M$ ist, dann ist auch $x + 1 \in M$.

Beispiele:
$$M = \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{oder} \quad \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\right\}$$

Die letzten beiden Mengen sind bisher nicht definiert (sowas wollen wir ja gerade definieren!) und nur zur Anschauung angeführt.

2.2.2 Definition (die natürlichen Zahlen natural numbers)

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subset \mathbb{R} \\ M \text{ induktiv}}} M := \{x \in \mathbb{R} : \text{Für jede induktive Menge } M \subset \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\}$$

Dies setzt die Idee um, dass alles, was man von Eins aus durch wiederholtes Addieren von Eins erreichen kann, zu $\mathbb{N}$ gehört (zum Beispiel ist $3 \in \mathbb{N}$, da mit 1 auch 2 in jeder induktiven Menge ist und dann auch 3), aber nichts anderes (z. B. ist $2{,}5 \notin \mathbb{N}$, denn offenbar ist $\{1, 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$ induktiv und enthält $2{,}5$ nicht). Zur Bedeutung von $\cup$ siehe Definition 3.2.1. Gleichzeitig kommt die Definition ohne $\dots$ aus. Ziemlich genial, was?

2.2.3 Lemma

(1) $\mathbb{N}$ ist induktiv.

(2) Falls $M \subset \mathbb{N}$ und M induktiv, so ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis:

(1) Drei Eigenschaften sind zu zeigen:

(a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Wegen der Definition von $\mathbb{N}$ als Schnitt über Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

(b) $1 \in \mathbb{N}$.

Da $\mathbb{N}$ die Schnittmenge aller induktiven Mengen ist und für jede induktive Menge M gilt: $1 \in M$, folgt mit der Definition der Schnittmenge: $1 \in \mathbb{N}$.

(c) $x \in N \overset{!}{\Rightarrow} x + 1 \in \mathbb{N}$.

Sei $x \in \mathbb{N}$. Per Definition ist $x \in M$ für jedes induktive M. Also ist $x + 1 \in M$ für jedes induktive M. Nach der Definition folgt $x + 1 \in \mathbb{N}$.

(2) Nach Annahme ist M induktiv. Damit folgt nach der Definition von $\mathbb{N}$, dass $\mathbb{N} \subset M$. Mit $M \subset \mathbb{N}$ folgt dann $M = \mathbb{N}$. □

2.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion

2.3.1 Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Falls gilt:

(1) $A(n)$ ist wahr für $n = 1$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus der Gültigkeit von $A(n)$ folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen n.

Beweis: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Mit (1) folgt, dass $1 \in M$, und (2) zeigt, dass aus $n \in M$ auch $n+1 \in M$ folgt.
Nach Definition 2.2.1 ist M somit induktiv. Außerdem ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Mit Teil (2) des Lemmas 2.2.3 folgt dann, dass M gleich $\mathbb{N}$ ist. □

Bemerkung: Der **Induktionsanfang** besteht aus $A(1)$ und dessen Beweis. Die **Induktionsannahme** ist ›$A(n)$ gilt‹. Der **Induktionsschritt** ist der Beweis von ›Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$‹.

Induktionsbeweise strukturiert man am besten einheitlich, etwa so:

Induktionsanfang ($n = 1$): <Beweis der Behauptung für $n = 1$>.
Induktionsschluß ($n \rightsquigarrow n+1$): <Beweis, dass aus der Wahrheit der Behauptung für n die Wahrheit der Behauptung für $n+1$ folgt>.

Mit vollständiger Induktion können wir zum Beispiel nachprüfen, dass die etwas abstrakt definierten natürlichen Zahlen wirklich einige unserer Erwartungen erfüllen.

2.3.2 Lemma

Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ sind, dann gilt:

(1) $n + m \in \mathbb{N}$

(2) $n \cdot m \in \mathbb{N}$

Beweis: Zur Illustration des Beweisprinzips der vollständigen Induktion formulieren wir den Beweis von (1) in direktem Bezug auf Satz 2.3.1 und den Beweis von (2) in dem oben angegebenen Schema. Beides ist natürlich gleichwertig.

(1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage ›$n + m \in \mathbb{N}$‹.

Die Aussage $A(1) =$ ›$1 + m \in \mathbb{N}$‹ ist wahr, da $\mathbb{N}$ induktiv ist.

Ist weiterhin $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr, also $n + m \in \mathbb{N}$, dann folgt $(n+m)+1 \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv ist. Also ist nach dem Kommutativgesetz auch $(n+1)+m \in \mathbb{N}$, d. h. $A(n+1)$ ist ebenfalls wahr.

Nach Satz 2.3.1 ist $A(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(2) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n.

Induktionsanfang ($n = 1$): $1 \cdot m \in \mathbb{N}$ ist wegen $1 \cdot m = m$ nach Voraussetzung wahr.

Induktionsschluss ($n \rightsquigarrow n+1$): Angenommen, $n \cdot m \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (1), dass $(n \cdot m) + m \in \mathbb{N}$. Nach dem Distributivgesetz folgt, dass $(n+1) \cdot m \in \mathbb{N}$, was zu zeigen war. □

Auch bei Definitionen kann man mittels vollständiger Induktion unpräzise Pünktchen vermeiden: Wenn wir z. B. für $x \in \mathbb{R}$ informell

$$x^2 := x \cdot x\,, \quad x^3 := x^2 \cdot x\,, \ \ldots$$

schreiben, so meinen wir genauer:

2.3.3 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ wird $\boldsymbol{x^n}$ induktiv definiert durch:

(1) $x^1 := x$

(2) $x^{n+1} := x^n \cdot x$

Dass dies x^n für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, folgt aus Satz 2.3.1: Ist $A(n)$ die Aussage ›x^n ist definiert‹, so gilt $A(1)$ wegen (1) und ›Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$‹ aus (2).

Ein weiteres Beispiel einer induktiven Definition:

2.3.4 Definition

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, d. h. f ordnet jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f(n) \in \mathbb{R}$ zu (s. a. Def. 3.3.1).

$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} f(i)} = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ ist definiert durch:

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\mathbf{1}} f(i) := f(1)$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\mathbf{n+1}} f(i) := f(n+1) + \sum_{i=1}^{n} f(i)$

Beispiel: Wir behaupten, es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang ($n = 1$): $1 \overset{!}{=} \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ist wahr.

Induktionsschluss ($n \rightsquigarrow n+1$): Angenommen, es gilt $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$\text{Dann ist } 1 + 2 + \ldots + (n+1) \overset{2.3.4}{=} (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) \overset{\text{Ann.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= \ldots = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} \quad \text{ebenfalls wahr.}$$

Die Behauptung gilt somit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Eine andere Beweisidee für die Formel (angeblich nach Carl Friedrich Gauß):

$$\begin{array}{rcccl} & 1 + & 2 & + \ldots + & n \\ + & n & + (n-1) & + \ldots + & 1 \\ \hline = & (n+1) + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) = n \cdot (n+1) \end{array}$$

Bemerkung: Dieser Beweis zeigt, woher die Formel $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ kommt, der Induktionsbeweis zeigt dies nicht. Dies ist ein Nachteil fast aller Induktionsbeweise: Man muss die mit Induktion zu beweisende Aussage erst formulieren, die Formel erst kennen. Manchmal findet man eine Formel durch Raten.

Findet man einen Beweis ohne Induktion, ist dies meist »schöner« oder befriedigender, man hat den Eindruck, mehr verstanden zu haben.

Wir werden im Folgenden häufig ziemlich »offensichtliche« Aussagen ohne Beweis verwenden, die aus den Axiomen leicht mittels vollständiger Induktion zu beweisen sind, beispielsweise:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad \text{oder} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

Ebenso werden wir manchmal Dinge mit usw.-Pünktchen definieren, wenn klar ist, wie man dies in eine korrekte Induktionsdefinition umsetzt.

Induktionsbeweise können auch mit anderen Werten als 1 starten. Soll eine Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ bewiesen werden, so zeigt man, dass sie für $n = 5$ gilt und dass aus der Gültigkeit für n (mit $n \geq 5$) die Gültigkeit der Aussage für $n + 1$ folgt.

2.3.5 Definition (die ganzen Zahlen integers)

$$\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{N} \ \text{ oder } \ x = 0 \ \text{ oder } \ -x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Man zeigt leicht, dass zum Beispiel mit $n, m \in \mathbb{Z}$ auch $n + m$ und $n \cdot m \in \mathbb{Z}$ gilt. Weiterhin gelten in $\mathbb{Z}$ alle Körperaxiome mit Ausnahme der Existenz multiplikativer Inverser.

Als weitere Notation führen wir ein: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4 Die rationalen Zahlen

2.4.1 Definition (die rationalen Zahlen rational numbers)

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{n}{m} : \ m, n \in \mathbb{Z} \ \text{ und } \ m \neq 0\right\} \subset \mathbb{R}$$

2.4.2 Satz

$\mathbb{Q}$ bildet mit den Operationen $+$ und $\cdot$ einen Körper.

Man kann den Beweis hiervon etwas übersichtlicher gestalten, wenn man zunächst beobachtet:

2.4.3 Lemma

Sei K mit $+$ und $\cdot$ ein Körper, und sei $L \subset K$. Falls gilt:

(1) L ist abgeschlossen bezüglich $+$ und $\cdot$, d. h.:
Wenn $a, b \in L$, dann sind $a + b \in L$ und $a \cdot b \in L$.

(2) Es sind $0 \in L$ und $1 \in L$.

(3) L ist abgeschlossen bezüglich dem Inversen:
Wenn $a \in L$, dann ist $-a \in L$, und wenn $a \in L$ und $a \neq 0$, dann ist $a^{-1} \in L$.

Dann ist L mit $+$ und $\cdot$ ein Körper.

Beweis: Kommutativität $+, \cdot$ $\surd$, Assoziativität $+, \cdot$ $\surd$, Neutrales Element $\surd$, Inverses Element $\surd$, Distributivgesetz $\surd$. Details als Übung. □

Beweis (Satz 2.4.2 mit Hilfe des Lemmas):

(1) $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation, denn mit $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$$

Dies sind die Regeln der Bruchrechnung. Man leitet sie leicht aus den Körperaxiomen her.

(2) Es sind $0 \in \mathbb{Q}$ und $1 \in \mathbb{Q}$.

(3) Es ist $-\frac{n}{m} = \frac{(-n)}{m}$ und $\left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n}$, falls $n \neq 0$ und $m \neq 0$. □

3 Logik, Mengen, Abbildungen

3.1 Logik

Aussagenlogik

Wir bezeichnen mit den Buchstaben $\boldsymbol{A, B, C \ldots}$ **Aussagen** assertion/proposition. Eine Aussage hat die Eigenschaft, entweder »wahr« oder »falsch« zu sein, wobei nur diese beiden **Wahrheitswerte** zugelassen sind. (Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, kann sich unserer Kenntnis allerdings entziehen.)
Zum Beispiel: $A =$ $1 + 1 = 2$, $B =$ Für alle reellen Zahlen x gilt: $x > 0$, $C =$ $1 = 2$ und
$D =$ Es gibt unendlich viele Primzahlen p, für die $p + 2$ ebenfalls Primzahl ist.
Die Aussage A ist wahr, die Aussagen B und C sind falsch. Ob D wahr oder falsch ist, ist unbekannt.

3.1.1 Definition

Aus gegebenen Aussagen A, B lassen sich durch Verknüpfung mit **Junktoren** neue zusammengesetzte Aussagen bilden. Die Tabelle zeigt deren Benennung und wie die Wahrheitswerte aus den Wahrheitswerten von A und B bestimmt werden.

A	B	»nicht A« $\neg A$	»A und B« $A \wedge B$	»A oder B« $A \vee B$	»aus A folgt B« »wenn A, dann B« $A \Rightarrow B$	»A genau dann, wenn B« $A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$\neg$ **Negation** $\wedge$ **Konjunktion** $\Rightarrow$ **Implikation**
$\vee$ **Disjunktion** $\Leftrightarrow$ **Biimplikation**

Bemerkung: Die Definition ist so angelegt, dass sie dem umgangssprachlichen Gebrauch weitgehend entspricht. Das ›$\vee$‹ meint dabei immer das »einschließende oder«, d. h. ›$A \vee B$‹ ist auch dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind, was in der Umgangssprache nicht *immer* der Fall ist: Vater zum Kind: Willst du ein Eis oder einen Kaugummi?

3.1.2 Satz

Folgende Aussagen, **Tautologien,** sind allein aus logischen Gründen heraus immer wahr:

$\neg\neg A$	$\Leftrightarrow$	A	Gesetz der doppelten Verneinung
$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$	Kontrapositionsgesetz
$(A \Rightarrow B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg(A \wedge \neg B))$	(für indirekten Beweis)
$\neg(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \vee \neg B)$	De Morgan'sches Gesetz
$\neg(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge \neg B)$	De Morgan'sches Gesetz

Beweis (der ersten beiden Tautologien):

A	B	A	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	f	w	f
f	w	f	w	f	w	w	w
f	f	f	w	f	w	w	w

Ist der Wahrheitswertverlauf der linken und rechten Seite der Biimplikation gleich (sind also die einzelnen Teilaussagen gleichwertig), so folgt nach Definition 3.1.1, dass die Aussage unter allen Umständen wahr ist. □

Quantoren

Betrachten wir einen Ausdruck wie $A(x) = $ $x > 0.$

Für was steht hier x? Die Bedeutung der **Variable x** wird festgelegt, indem man den **Wertevorrat** (auch Objektbereich genannt) der *möglichen* Ersetzungen für diese Variable angibt, z. B. die reellen Zahlen. Der Ausdruck $A(x)$ wird so zur **Aussageform,** denn es ist damit zwar bekannt, welche Objekte man für x einsetzen darf, es wird aber kein einzelnes Objekt festgelegt. Die **freie Variable x** wird in Klammern geschrieben, um dies kenntlich zu machen.

Ersetzt man die freie Variable in der Aussageform durch ein Element des Wertevorrats, im Beispiel eine reelle Zahl, dann erhält man eine **Aussage:** $A(1) = $ $1 > 0.$ Diese Aussage ist wahr. Die Aussage $A(-5) = $ $-5 > 0$ hingegen ist falsch.

Vielleicht möchte man aber eine Behauptung darüber aufstellen, dass etwas für alle reellen Zahlen gilt: $B = $ Für alle reellen Zahlen x gilt: $x > 0.$

Das ist wieder eine Aussage, sie ist falsch. In der Aussage B ist x jetzt eine **gebundene Variable:** Das x stellt innerhalb der Aussage B nur noch einen Platzhalter dar, der auch gefahrlos durch einen anderen Platzhalter ersetzt werden kann: Die Aussage B ist zum Beispiel gleichwertig (auch äquivalent genannt) zu Für alle reellen Zahlen u gilt: $u > 0.$ Nur wenn aus dem Kontext klar ist, dass man nur von reellen Zahlen redet, darf man auch schreiben: Für alle u gilt: $u > 0.$

Aus einem Ausdruck wie $A(x)$ lassen sich also verschiedene Aussageformen bilden, je nachdem, welchen Wertevorrat man wählt. Und aus diesen Aussageformen lassen sich unterschiedliche Aussagen bilden:

Für alle natürlichen Zahlen x gilt: $x > 0.$ Korrekt!
Es gibt eine reelle Zahl x mit: $x > 0.$ Korrekt! Und nun eine kürzere Schreibweise:

3.1.3 Definition

Bezeichne $A(x)$ eine Aussageform mit freier Variable x, M den Wertevorrat für x.

Die Aussage $\underset{x\in M}{\forall} A(x)$ ist wahr, wenn $A(x)$ wahr ist für alle $x \in M$.

Die Aussage $\underset{x\in M}{\exists} A(x)$ ist wahr, wenn $A(x)$ wahr ist für mindestens ein $x \in M$.

Bemerkung: In der Aussage $\underset{x\in M}{\forall} A(x)$ wird die Variable x durch den **Allquantor** universal quantifier gebunden. Die Aussage ist also zum Beispiel gleichwertig mit $\underset{y\in M}{\forall} A(y)$. Zwischen dem Allquantor und dem **Existenzquantor** existential quantifier besteht folgende wichtige Beziehung:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \neg \underset{x\in M}{\forall} A(x) & \Leftrightarrow & \underset{x\in M}{\exists} \neg A(x) \\ \neg \underset{x\in M}{\exists} A(x) & \Leftrightarrow & \underset{x\in M}{\forall} \neg A(x) \end{array}}$$

Ein Beispiel zur Anwendung: Um zu zeigen, dass es nicht stimmt, dass $A(x)$ für alle $x \in M$ gilt, kann man genauso gut zeigen, dass $A(x)$ für mindestens ein $x \in M$ nicht stimmt. Also:

Die beiden Quantoren werden beim Durchziehen einer Negation vertauscht!

Beispiele:

(1) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} x^2 \geq 0$ ist eine wahre Aussage.

(2) $\neg(\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} n > x) \quad\Leftrightarrow\quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\exists} \neg \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} n > x \quad\Leftrightarrow\quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\exists} \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \neg(n > x).$

Alle drei (Teil-)Aussagen sind falsch.

3.2 Etwas Mengenlehre

Eine **Menge** set $\boldsymbol{M}$ ist eine Sammlung von Objekten, wobei für jedes Objekt x aus dem Bereich aller möglichen Objekte feststeht, ob es zur Menge M gehört $\boldsymbol{x \in M}$ oder nicht $\boldsymbol{x \notin M}$**.**
Wir lassen auch Mengen selbst als Objekte zu. Ist man allzu freizügig, gibt es Probleme:

Sei $M =$ Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

Dann kann weder $M \in M$ noch $M \notin M$ wahr sein, wie man sich leicht überzeugt. Also ist M keine Menge!

Genaueres hierzu findet man in Büchern über Mengenlehre. Es gibt keine Probleme, wenn man nur solche Objekte betrachtet, die aus bereits bekannten bestehen, also etwa Zahlen, Mengen von Zahlen, Folgen von Zahlen, Funktionen, Mengen von Funktionen etc. Dies wird im Axiomensystem der Mengenlehre (meist Z-F-Axiome nach Zermelo und Fränkel) präzisiert.

Beispiele: $\{1\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$, $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist Summe zweier Primzahlen}\}$.

Bemerkung: Die letzten beiden Mengen sind wählerisch: Es werden nur diejenigen Objekte zur Menge zugelassen, welche die einschränkende Bedingung hinter dem Doppelpunkt erfüllen.

Weiter ist $\{1,3\} = \{3,1\} = \{1,3,1\}$. Das heißt, bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge an, und Mehrfachnennung ist zwar erlaubt, bringt aber nichts Neues.

3.2.1 Definition

$\emptyset$	$:=$	Die Menge ohne Element	**leere Menge** empty set
$\boldsymbol{M \cap N}$	$:=$	$\{x : \ x \in M \text{ und } x \in N\}$	**Schnittmenge** intersection
$\boldsymbol{M \cup N}$	$:=$	$\{x : \ x \in M \text{ oder } x \in N\}$	**Vereinigungsmenge** union
$\boldsymbol{M \setminus N}$	$:=$	$\{x : \ x \in M \text{ und nicht } x \in N\}$	**Differenzmenge** set difference
$\boldsymbol{\mathcal{P}(M)}$	$:=$	Die Menge aller Teilmengen von M	**Potenzmenge** power set
$\boldsymbol{M \times N}$	$:=$	$\big\{(m,n) : \ m \in M \text{ und } n \in N\big\}$	**Produktmenge** cartesian product
$\boldsymbol{M \subset N}$	$:\Leftrightarrow$	$\forall_{x \in M} : \ x \in N$	**Teilmenge** subset

Ist I eine Menge, und ist für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben, so sind der **allgemeine Durchschnitt** und die **allgemeine Vereinigung** definiert durch:

$$\bigcap_{i \in I} \boldsymbol{M_i} := \{x : \ x \in M_i \text{ für alle } i \in I\} \qquad \bigcup_{i \in I} \boldsymbol{M_i} := \{x : \ x \in M_i \text{ für mindestens ein } i \in I\}$$

Bemerkung: In der Definition wurde die Bezeichnung $\boldsymbol{(m,n)}$ für das **geordnete Paar** ordered pair, bestehend aus m und n, verwendet. Im Unterschied zu Mengen ist hier $(m,n) \neq (n,m)$, außer wenn zufällig $m = n$ sein sollte.

Man schreibt $\boldsymbol{M \,\dot\cup\, N}$ für $M \cup N$, wenn $M \cap N = \emptyset$ und bezeichnet dies als **disjunkte Vereinigung.**

Beispiele:

$$M = \{1,2\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(M) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$$
$$M = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$$

Beachte: $M \neq \mathcal{P}(M)$, denn M hat kein Element, während $\mathcal{P}(M)$ das eine Element $\emptyset$ hat! Ebenso ist die Zahl 1 nicht gleich der Menge $\{1\}$.

3.3 Abbildungen

3.3.1 Definition

Seien M, N Mengen.

Eine **Abbildung** mapping f von M nach N ordnet jedem Element $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu: $\boldsymbol{f : M \to N}$, $\boldsymbol{x \mapsto f(x)}$

Für $N = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) wird f auch **Funktion** function genannt.

Bezeichnungen: $\boldsymbol{M}$ **Definitionsbereich** domain, $\boldsymbol{N}$ **Wertevorrat** range.

Der **Graph** graph von $f : M \to N$ ist die Menge $\{(x, f(x)) : x \in M\} \subset M \times N$.

Beispiele:

(1) $f : \{1,2\} \to \mathbb{R}$, $f(1) := 0$ und $f(2) := -73$.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, oder in anderer Schreibweise: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

3.3.2 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \le b$.

Die **endlichen Intervalle:**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(a,b)} &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes I.}\\
\boldsymbol{[a,b)} &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} && \text{halboffenes I.}\\
\boldsymbol{(a,b]} &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} && \text{halboffenes I.}\\
\boldsymbol{[a,b]} &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} && \text{abgeschlossenes I.}
\end{aligned}$$

Die **unendlichen Intervalle:**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(a,\infty)} &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\\
\boldsymbol{[a,\infty)} &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}\\
\boldsymbol{(-\infty,b)} &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\\
\boldsymbol{(-\infty,b]} &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}
\end{aligned}$$

Beispiel: $f : [0,1] \to [0,1]\ ,\ x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{falls } x \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{falls } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

3.3.3 Definition

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

f **injektiv** 1-1/one-to-one :⇔ Für jedes $y \in N$ existiert höchstens ein $x \in M$ mit $f(x) = y$

f **surjektiv** onto :⇔ Für jedes $y \in N$ existiert mindestens ein $x \in M$ mit $f(x) = y$

f **bijektiv** 1-1 and onto :⇔ Für jedes $y \in N$ existiert genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$

Beispiel: Sei $f(x) := x^2$. Betrachtet man $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist f weder injektiv noch surjektiv. Betrachtet man jedoch $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, so ist f injektiv, und betrachtet man $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so ist f bijektiv.

Streng genommen sollte man für die beiden letzten Abbildungen andere Buchstaben verwenden, da sie einen anderen Definitionsbereich bzw. Wertevorrat haben.

Praktische Bedeutung von Injektivität etc. für das Lösen von Gleichungen

Betrachten wir die Gleichung $y = f(x)$, für eine gegebene Abbildung $f : M \to N$. Zu gegebenem $y \in N$ möchten wir eine Lösung $x \in M$ finden:

f injektiv ⇔ die Gleichung hat höchstens eine Lösung für jedes y

f surjektiv ⇔ die Gleichung hat mindestens eine Lösung für jedes y

f bijektiv ⇔ die Gleichung hat genau eine Lösung für jedes y

Zum Beispiel hat $y = x^2$ genau eine Lösung $x \in [0,\infty)$ für jedes $y \in [0,\infty)$, nämlich $x = \sqrt{y}$.

3.3.4 Definition

Seien M, N, L Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Sei $x \in M$.

(1) Zu der Abbildung $g : N \to L$ ist die **Komposition** $\boldsymbol{g \circ f : M \to L}$ die Abbildung definiert durch
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

(2) Die Abbildung $g : N \to M$ heißt **inverse Abbildung zu** $\boldsymbol{f}$, in Zeichen $\boldsymbol{g = f^{-1}}$, wenn gilt:
$$g \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_N$$
Hierbei bezeichnet $\mathbf{id}_{\boldsymbol{M}} : M \to M$ die **Identitätsabbildung,** $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$.

Praktische Bedeutung der Komposition

Komposition heißt »f in g einsetzen«.

Beispiel: Für $M = N = L = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g(y) = \sin y$ folgt:
$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$$

Bemerkung: Warum wurde bei der Definition von g der Buchstabe y verwendet?

Formal ist es egal, welcher Buchstabe verwendet wird. Man hätte auch $g(x) = \sin x$ schreiben können.

Zum Verständnis ist es sinnvoll, verschiedene Buchstaben für Variablen zu verwenden, deren Rolle verschieden ist. Hier ist x ein Element von M, also etwas, worauf f angewendet werden kann. y ist ein Element von L, also etwas, das als Wert von f vorkommen kann und worauf g angewendet werden kann. (Dass in diesem Beispiel M und L dieselbe Menge sind, spielt keine Rolle.)

Diese Regel zu beachten hilft, Fehler zu vermeiden!

Mathematische Notation sollte nicht nur korrekt, sondern auch suggestiv sein.

Praktische Bedeutung der Inversen

Es gilt: Die Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann bijektiv, wenn f eine Inverse besitzt. In diesem Fall ist $f^{-1}(y)$ die eindeutige Lösung der Gleichung $y = f(x)$.

Denn $g \circ f = \mathrm{id}_M$ bedeutet, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ gilt, dass also x aus dem Wert $y = f(x)$ zurückerhalten werden kann (also f injektiv).

Und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ bedeutet, dass $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$ gilt, dass also $x = g(y)$ eine Lösung von $f(x) = y$ ist (also f surjektiv).

Beispiel: Aufgabe: Zeige, dass $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ als Funktion $[0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung. Lösung:
$$\begin{aligned} & y = \sqrt{1+x^2} \\ \overset{y \geq 0}{\iff} \quad & y^2 = 1 + x^2 \\ \iff \quad & y^2 - 1 = x^2 \\ \overset{x \geq 0,\ y \geq 1}{\iff} \quad & x = \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned}$$
Da alle Umformungen Äquivalenzen waren, existiert zu jedem $x \in [0, \infty)$ genau eine Lösung $y \in [1, \infty)$, also ist f bijektiv und $f^{-1}(y) = \sqrt{y^2 - 1}$.

Also im Wesentlichen:

Die zu f inverse Abbildung bestimmen $\iff$ Die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen.

3.4 Abzählbare Mengen

3.4.1 Definition

Seien M und N zwei Mengen.

M und N sind **gleichmächtig** equipotent	$:\Leftrightarrow$	Es existiert eine Bijektion $f : M \to N$
M ist **abzählbar** countable	$:\Leftrightarrow$	M ist gleichmächtig mit $\mathbb{N}$
M ist **überabzählbar** uncountable	$:\Leftrightarrow$	M ist nicht abzählbar und nicht endlich
M ist **höchstens abzählbar** at most countable	$:\Leftrightarrow$	M ist endlich oder abzählbar

Eine Menge M ist **endlich** finite mit **Mächtigkeit** cardinality $n \in \mathbb{N}_0$, falls es eine Bijektion $M \to \{1, \dots, n\}$ gibt. Im Fall $n = 0$: $M = \emptyset$. Eine Menge ist **unendlich** infinite, wenn sie nicht endlich ist.

(Aussprache der englischen Worte: finite = fainait, aber infinite = infinit; Betonung jeweils vorne.)
Die Abzählbarkeit von M bedeutet, dass man die Elemente von M mit natürlichen Zahlen durchnummerieren kann: Man schreibt die Elemente von M als Folge auf, wobei jedes Element von M genau einmal vorkommt.

Redet man bloß von einer »Folge in M«, muss nicht jedes Element vorkommen:

3.4.2 Definition

Sei M eine Menge. Eine **Folge** sequence in M ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$.
Man schreibt $(a_1, a_2, \dots)$ oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach (a_n).

Folgen können auch mit dem Index 0 beginnen, also $a : \mathbb{N}_0 \to M$, oder in anderer Schreibweise $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ bzw. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

3.4.3 Satz

(1) Jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

(2) Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler höchstens abzählbarer Mengen ist eine höchstens abzählbare Menge.

Beweis (Skizze):

(1) Ist $a_1, a_2, \dots$ eine (möglicherweise endliche) Aufzählung der Elemente von M und ist $N \subset M$, so setze

$$i_1 := \text{Die kleinste natürliche Zahl } i \text{ mit } a_i \in N,$$
$$i_2 := \text{Die kleinste natürliche Zahl } i > i_1 \text{ mit } a_i \in N, \text{ etc.}$$

Dann ist $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$ eine Aufzählung der Elemente von N.

(2) Seien $N_1, N_2, \dots$ höchstens abzählbar viele höchstens abzählbare Mengen. Bezeichne die Elemente dieser Mengen N_k (für $k \geq 1$) mit $a_{k1}, a_{k2}, \dots$ (diese Aufzählung darf auch endlich sein). Die Elemente der Vereinigung aller N_k lassen sich nun nach folgendem Schema abzählen:

$$\begin{array}{lllllllllll}
N_1 = \{ & a_{11}, & & a_{12}, & \rightarrow & a_{13}, & & a_{14}, & \rightarrow & a_{15}, & \dots \} \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
N_2 = \{ & a_{21}, & & a_{22}, & & a_{23}, & & a_{24}, & \dots & & \} \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
N_3 = \{ & a_{31}, & & a_{32}, & & a_{33}, & \dots & & & & \} \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\vdots & a_{41}, & & & & & & & & &
\end{array}$$

Kommen unter den Mengen N_k auch endliche Mengen vor, oder ist die Anzahl der Mengen endlich, dann treten in diesem Schema »Leerstellen« auf. In diesem Fall behält man das Schema bei, überspringt aber die Leerstellen einfach. Auch wird jedes Element übersprungen, das in der Aufzählung bereits einmal vorgekommen ist. □

3.4.4 Korollar

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Beweis: Offensichtlich sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nicht endlich. Es gilt per Definition:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

Nach Satz 3.4.3 ist $\mathbb{Z}$ also abzählbar. Außerdem gilt

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\right\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\mathbb{Z} \to \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ mit $n \mapsto \frac{n}{m}$ eine Bijektion ist, sind die Mengen auf der rechten Seite abzählbar, also ist nach Satz 3.4.3 auch $\mathbb{Q}$ abzählbar. □

Gibt es überhaupt überabzählbare Mengen?

3.4.5 Satz

Die Menge der $\{0,1\}$-Folgen ist überabzählbar.

(Also die Menge der Folgen $(a_1, a_2, \dots)$ mit allen $a_i \in \{0,1\}$.)

Beweis: Sei F die Menge der $\{0,1\}$-Folgen. Angenommen, F wäre abzählbar. Das hieße, dass es Folgen $f_1, f_2, \dots$ gäbe mit $F = \{f_1, f_2, \dots\}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ schreibe die Folge f_k aus als $f_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots)$ mit $a_{ki} \in \{0,1\}$ für alle $k, i \in \mathbb{N}$.

Definiere nun $f = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ durch $b_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{ii} = 0\,. \end{cases}$

Dann würden sich die Folgen f und f_i zumindest an der i-ten Stelle unterscheiden (also $f \neq f_i$ für alle i), denn per Definition ist $b_i \neq a_{ii}$. Dies steht im Widerspruch zu $f \in F$ und $F = \{f_1, f_2, \dots\}$. □

3.4.6 Korollar

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Beweis: Sei F die Menge aller $\{0,1\}$-Folgen. Definiere eine Abbildung $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{f : f \in F\}$ auf folgende Weise: Ist $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, also $A \subset \mathbb{N}$, so ordne A die $\{0,1\}$-Folge $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ zu, die durch

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in A \\ 0 & \text{falls } i \notin A \end{cases}$$

definiert wird. Da es zu jeder $\{0,1\}$-Folge ein A und zu jedem A eine $\{0,1\}$-Folge gibt, ist h eine Bijektion. Mit Satz 3.4.5 folgt dann, dass auch $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. □

Bemerkung: Analog hierzu:
Sei $F_n := \big\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{0,1\}\big\}$; die Elemente von F nennt man $\{0,1\} - n$ -Tupel.
Dann ist $h : \mathcal{P}\big(\{1,2,3,\dots,n\}\big) \to F_n$ mit $A \mapsto (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ eine Bijektion.

Aus Satz 3.4.5 erhält man nun einen der großen Unterschiede zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

3.4.7 Satz

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Die Idee ist leicht zu verstehen. Für die Details müssen wir ein wenig vorgreifen, denn dies ist ohne das Vollständigkeitsaxiom nicht zu beweisen.

Die Idee ist, eine injektive Abbildung $f : F \to \mathbb{R}$ von der Menge der $\{0,1\}$-Folgen F nach $\mathbb{R}$ anzugeben. Hat man so ein f, so erhält man die Behauptung: Denn $f : F \to f(F)$ ist dann bijektiv, also ist mit F auch $f(F)$ überabzählbar. Also hat $\mathbb{R}$ eine überabzählbare Teilmenge (nämlich $f(F)$) und ist damit nach Satz 3.4.3(1) auch überabzählbar.

Definiere f wie folgt: Zu $a = (a_1, a_2, \dots) \in F$ sei $f(a) = 0{,}a_1a_2\ldots,$ wobei dies als Dezimaldarstellung zu verstehen ist. Wie kann man das präzisieren, d. h. was bedeutet »Dezimaldarstellung«? Am einfachsten mittels der Reihe (»unendlichen Summe«)

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots ,$$

deren Bedeutung in Kapitel 7 erklärt werden wird. Diese Reihe »konvergiert«, was hier sehr einfach mit dem Majorantenkriterium, die Majorante ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$, zu zeigen ist.

Es bleibt die Injektivität von f zu überprüfen. Intuitiv ist das klar: Zwei Zahlen mit verschiedenen Dezimaldarstellungen sind verschieden, oder? Nicht ganz, zum Beispiel ist $0{,}999\ldots = 1$. Hier geht aber trotzdem nichts schief, da nur Nullen und Einsen vorkommen.

Formal:

Zu $a = (a_1, a_2, \dots)$ und $b = (b_1, b_2, \dots)$ in F mit $a \neq b$ sei i_0 der kleinste Index mit $a_{i_0} \neq b_{i_0}$.

Sei o. B. d. A. $a_{i_0} = 0$ und $b_{i_0} = 1$.

(Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, andernfalls vertauscht man die Rolle von a und b.)

Dann gilt $f(a) = 0{,}a_1\ldots a_{i_0}a_{i_0+1}\ldots \leq 0{,}a_1\ldots a_{i_0}111\ldots < 0{,}a_1\ldots a_{i_0-1}b_{i_0}b_{i_0+1}\ldots = f(b),$

denn per Wahl von i_0 gilt $a_i = b_i$ für $i < i_0$. Weiter haben wir verwendet, dass $0{,}111\ldots < 1$ gilt, denn dies ergibt die letzte Ungleichung nach Multiplikation mit 10^{-i_0} und Addition von $0{,}a_1\ldots a_{i_0}$. Wie wir sehen werden, ist $0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$, also kleiner als 1. □

4 Etwas Kombinatorik

Wenn nicht audrücklich vermerkt, seien alle Mengen in diesem Kapitel endlich.

4.1.1 Definition

Sei M eine Menge. Dann bezeichnet $\boldsymbol{\#M}$ die Anzahl der Elemente in M.

4.1.2 Satz

Sind M und N Mengen, gilt: $\#(M \times N) = (\#M) \cdot (\#N)$.

Zur Abwechslung beweisen wir dies einmal ausführlich, mit vollständiger Induktion.

Beweis: Zur Abkürzung bezeichne X_n im Folgenden eine n-elementige Menge. Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion über $\#M = n$. Seien also M_n und N Mengen.

Induktionsanfang ($n = 1$): $\#(M_1 \times N) = \#\big(\{m\} \times \{n_1, n_2, n_3, \dots\}\big)$

$$= \#\big\{(m, n_1), (m, n_2), (m, n_3), \dots\big\} = \#N = 1 \cdot \#N = (\#M_1) \cdot (\#N).$$

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$): Angenommen, die Behauptung gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Sei $M_{n+1} = M_n \mathbin{\dot\cup} A$ mit $\#A = 1$ und $\#M_n = n$. Damit folgt:

$$\#(M_{n+1} \times N) = \#\big((M_n \mathbin{\dot\cup} A) \times N\big) = \#\big((M_n \times N) \mathbin{\dot\cup} (A \times N)\big) = \#(M_n \times N) + \#(A \times N)$$

$$\overset{\text{Ann.}}{=} (\#M_n) \cdot (\#N) + (\#A) \cdot (\#N) = n \cdot (\#N) + 1 \cdot (\#N) = (n+1) \cdot (\#N) = (\#M_{n+1})(\#N). \qquad \square$$

4.1.3 Definition

Sei M eine Menge. $\boldsymbol{M^n} := \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{n\text{-mal}} = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) : m_i \in M\,, 1 \leq i \leq n\}$.

4.1.4 Satz

Ist M eine Menge, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\#(M^n) = (\#M)^n$.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion über n.
Induktionsanfang ($n = 1$): $\#(M^1) = \#(M) = \#M = (\#M)^1$.
Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$): Angenommen, die Behauptung gilt für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

$$\#(M^{n+1}) = \#(M^n \times M) \overset{4.1.2}{=} \#(M^n) \cdot (\#M) \overset{\text{Ann.}}{=} (\#M)^n \cdot (\#M) = (\#M)^{n+1} \qquad \square$$

4.1.5 Satz

Wenn M eine Menge mit $\#M = n$ ist, gilt: $\#\mathcal{P}(M) = 2^n$.

Beweis: Nach der Bemerkung zu Korollar 3.4.6 ist $\mathcal{P}(M)$ gleichmächtig der Menge der $\{0, 1\} - n$-Tupel. Mit $N := \{0, 1\}$ ist die Menge der n-Tupel gerade N^n und es folgt:

$$\#\mathcal{P}(M) = \#(N^n) \overset{4.1.4}{=} (\#N)^n = 2^n \qquad \square$$

4.1.6 Definition

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Fakultät** factorial von n ist definiert durch:

$$\mathbf{0!} := 1$$

$$\boldsymbol{n!} := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

beziehungsweise induktiv durch: $\mathbf{(n+1)!} := (n+1) \cdot n!$

4.1.7 Definition

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.
Dann ist der **Binomialkoeffizient n über k** binomial coefficient n choose k:

$$\boldsymbol{\binom{n}{k}} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Bemerkung: Manchmal wird auch die Forderung $k \leq n$ ausgelassen und dann zusätzlich definiert:
Falls $k > n$, sei $\binom{n}{k} := 0$.

4.1.8 Satz

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Beweis: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$ □

Beispiele:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

4.1.9 Satz

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Mit $n! = (n-1)! \cdot n$ bzw. $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ lässt sich die Behauptung wie folgt zeigen:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{\frac{(k+1)!}{(k+1)} \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)}} = \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

□

Bemerkung: Aus dem Satz folgt, dass sich die Binomialkoeffizienten leicht nacheinander mittels des Pascal'schen Dreiecks finden lassen. Jede Zahl ist die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

4.1.10 Satz

Sei M eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen und $0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

(1) Es gibt $n!$ Anordnungen der Elemente von M.

(2) Es gibt $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ Anordnungen von k beliebigen verschiedenen Elementen von M.

(3) Es gibt $\dbinom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen von M.

Beispiele:

▷ Die Zahlen $1, 2, 3$ haben die $6 = 3!$ Anordnungen $123, 132, 213, 231, 312, 321$.

▷ Unter $1, 2, 3, 4$ gibt es folgende 12 Anordnungen von zwei Elementen:

$$12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43$$

Jeweils die erste und zweite, dritte und vierte etc. davon bilden dieselbe zwei-elementige Teilmenge, also gibt es $6 = \binom{4}{2}$ zwei-elementige Teilmengen von M_4.

Es ist nützlich, sich die folgenden Beweise an diesen Beispielen klarzumachen.

Beweis:

(1) Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion über n:

Induktionsanfang ($n = 1$): Ein Element lässt sich auf genau eine Weise anordnen.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$): Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die $(n+1)$-elementige Menge $M = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ und die n-elementigen »Restmengen« $R_a = M_{n+1} \setminus \{a\}$, die durch Weglassen eines beliebigen Elements a entstehen. Wir sortieren die Anordnungen von $1, \ldots, n+1$ nach der ersten vorkommenden Zahl. Da jedes R_a genau n Elemente hat, ergibt sich nach Induktionsvoraussetzung:

1. Zahl a des $(n+1)$-Tupels	R_a	Anzahl der mögl. Anordnungen von $R_{n,a}$
1	$\{2, 3, \ldots, n+1\}$	$n!$
2	$\{1, 3, \ldots, n+1\}$	$n!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$\{1, 2, \ldots, n\}$	$n!$
		$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

Alternativer Beweis: Um eine Anordnung von $1, \ldots, n$ aufzuschreiben, hat man für die erste Stelle n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$ Möglichkeiten (egal, welche Zahl man als erste genommen hat!), für die dritte $n-2$ Möglichkeiten (egal, welche Zahlen man bei den ersten zwei Stellen genommen hat) etc., bis man an der letzten Stelle nur noch eine Möglichkeit hat; insgesamt gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$ Anordnungen.

(2) Wie im alternativen Beweis zuvor: Für die erste Stelle hat man n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$ Möglichkeiten (unabhängig von der ersten Wahl), etc. und schließlich bei der k-ten Stelle $n-k+1$ Möglichkeiten (da auf den ersten $k-1$ Stellen schon $k-1$ Elemente verbraucht wurden), insgesamt also $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ Anordnungen von k beliebigen Elementen.

(3) Sei $A_{n,k}$ die Menge aller Anordnungen von k Elementen aus M und $T_{n,k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von M und sei $f : A_{n,k} \to T_{n,k}$ die Abbildung $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$. Dann gilt:

Für jedes $Y \in T_{n,k}$ hat $f^{-1}(\{Y\}) = \{X : X \in A_{n,k}, \ f(X) = Y\}$ genau $k!$ Elemente, denn $f^{-1}(\{Y\})$ ist die Menge aller Anordnungen, die die k Elemente aus Y annehmen können. Also ist $A_{n,k}$ die disjunkte Vereinigung von $\#T_{n,k}$ $k!$-elementigen Mengen (nämlich der Mengen $f^{-1}(\{Y\})$ mit $Y \in T_{n,k}$). Daher gilt $\#A_{n,k} = k! \cdot \#T_{n,k}$. Nach (2) gilt weiterhin $\#A_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Daraus folgt $\#T_{n,k} = \dfrac{1}{k!} \cdot \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$. □

4.1.11 Korollar

(1) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ ist $\dbinom{n}{k}$ eine ganze Zahl.

(2) $\dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \ldots + \dbinom{n}{n-1} + \dbinom{n}{n} = 2^n$.

Beweis:

(1) Da die Anzahl von Mengen nur ganzzahlig sein kann, folgt die Behauptung mit Satz 4.1.10.

(2) Nach 4.1.5 ist die Menge $\mathcal{P}(M)$ *aller* Teilmengen einer n-elementigen Menge M 2^n-elementig. $\mathcal{P}(M)$ ist nun aber gerade die disjunkte Vereinigung von $T_{n,0}, T_{n,1}, \ldots, T_{n,n}$, wobei $T_{n,k}$ die Menge aller Teilmengen von M mit k Elementen ist. Mit $\#T_{n,k} = \binom{n}{k}$ folgt die Behauptung. □

4.1.12 Satz (Binomischer Lehrsatz)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Beweis: Es ist $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)$. Dieses Produkt ist eine Summe von Termen mit jeweils n Faktoren a oder b. Ein Term entsteht dadurch, dass man in jeder der Klammern entweder a oder b wählt. Die Anzahl der Terme der Form $a^{n-k} \cdot b^k$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, unter den n Klammern genau k auszuwählen, wo man b nimmt. Solch eine Auswahl entspricht also einer k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Da es davon $\binom{n}{k}$ Stück gibt, tritt $a^{n-k} \cdot b^k$ in der Summe genau $\binom{n}{k}$ mal auf. □

Bemerkung: Indem man $a = b = 1$ setzt, erhält man einen neuen Beweis des zweiten Teils von Korollar 4.1.11. Setzt man $a = 1$ und $b = -1$, so folgt, dass die Anzahl der Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit einer geraden Anzahl an Elementen gleich der Anzahl der Teilmengen mit einer ungeraden Anzahl an Elementen ist. Dies ist für ungerades n leicht direkt einzusehen (vgl. Pascalsches Dreieck), für gerades n aber etwas überraschend.

5 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die Körper- und Anordnungsaxiome gelten sowohl für $\mathbb{R}$ als auch für $\mathbb{Q}$. Was ist es nun, das $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet? Die Antwort läßt sich in verschiedenen Weisen formulieren, aber alle drücken aus, dass $\mathbb{Q}$ »Lücken« hat, während dies für $\mathbb{R}$ nicht zutrifft. Ein Ausdruck für diese Lückenhaftigkeit ist der folgende Satz:

5.1.1 Satz

Es gibt keine rationale Zahl q, für die gilt: $q^2 = 2$.

Beweis: Wir zeigen zunächst folgende Hilfsbehauptung:

Wenn n^2 gerade ist, dann ist n gerade.

Beweis: Es genügt, die Kontraposition zu zeigen: Wenn n ungerade ist, ist auch n^2 ungerade. Sei $n \in \mathbb{N}$, wobei n ungerade. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = 2k+1$. Also gilt

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1\,.$$

Wegen $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ ist n^2 ungerade. Was zu zeigen war.

Nun zum Beweis des Satzes: Angenommen, es gäbe ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. Falls $q < 0$ wäre, wäre auch $(-q)^2 = 2$. Es kann also angenommen werden, dass $q > 0$ gilt.

Es müsste also $a, b \in \mathbb{N}$ geben, so dass $(a/b)^2 = 2$, also $a^2 = 2 \cdot b^2$. Aus der Hilfsbehauptung würde folgen: a ist gerade.

Es gäbe also ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a = 2k$ und somit wäre $(2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b^2$. Wiederum würde folgen: Auch b ist gerade.

Damit wäre aber a/b kürzbar gewesen. Für den gekürzten Bruch ließe sich nun genauso zeigen, dass auch dieser wieder kürzbar wäre. Da aber kein Bruch unendlich oft gekürzt werden kann, bzw. keine Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ unendlich viele Primfaktoren 2 enthalten können, folgt der Widerspruch zur Annahme, es gäbe $a, b \in \mathbb{N}$, so dass $(a/b)^2 = 2$. □

Wie formuliert man nun die »Lückenfreiheit« von $\mathbb{R}$? Es gibt hierzu verschiedene Möglichkeiten: Mittels »Dedekindscher Schnitte«, mittels Konvergenz von Cauchy-Folgen (dazu später mehr), oder mittels des Supremumsaxioms. Wir wählen den Zugang über das Supremumsaxiom.

Zuvor ein paar neue Begriffe, die auch im Folgenden immer wieder gebraucht werden:

5.1.2 Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}$.

(1) Eine **obere** bzw. **untere** **Schranke** für M upper bzw. lower bound ist eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq x$ bzw. $a \leq x$ für alle $x \in M$.

(2) Man nennt a **Maximum** bzw. **Minimum** von M, falls gilt:

(a) a ist obere bzw. untere Schranke von M und

(b) $a \in M$.

Man schreibt auch $\max M = a$ bzw. $\min M = a$.

(3) Man nennt a **Supremum** bzw. **Infimum** von M, falls gilt:

(a) a ist obere bzw. untere Schranke von M und

(b) für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

Wenn c eine obere bzw. untere Schranke ist, dann ist

$$a \leq c \quad \text{bzw.} \quad a \geq c.$$

Man schreibt auch $\sup M = a$ bzw. $\inf M = a$.

Mit anderen Worten: $\sup M$ ist die kleinste obere Schranke von M least upper bound und $\inf M$ ist die größte untere Schranke von M greatest lower bound, falls sie existieren.

Eine Menge M heißt **nach oben** bzw. **unten beschränkt** bounded above bzw. below, wenn sie eine obere bzw. untere Schranke besitzt. Beispielsweise sind das Intervall $(0,1)$ und die leere Menge nach oben und unten beschränkt, $\mathbb{N}$ ist nur nach unten beschränkt und $\mathbb{Z}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Selbst wenn M nach oben beschränkt ist, braucht M kein Maximum zu besitzen!

Beispiel: Sei $M := (0,1) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < x < 1\}$.

▷ M hat kein Maximum, denn falls $x \in M$ ist, so existiert ein $y > x$ mit $y \in M$, z. B. $y = \dfrac{(x+1)}{2}$. Das heißt auch, dass jede obere Schranke von M größer oder gleich 1 ist.

▷ $\sup M = 1$, denn:

1 ist obere Schranke, da für alle $x \in M$ gilt: $x \leq 1$.

1 ist kleinste obere Schranke, denn falls $y \in \mathbb{R}$ obere Schranke ist, so ist $y \geq 1$, wie wir gerade sahen.

▷ M hat kein Minimum, denn falls $x \in M$ ist, so existiert ein $y \in M$ mit $y < x$, z. B. $y = \dfrac{x}{2}$. Dies zeigt auch, dass jede untere Schranke von M kleiner oder gleich null sein muss.

▷ $\inf M = 0$, denn:

0 ist untere Schranke, da für alle $x \in M$ gilt: $0 \leq x$.

Jede untere Schranke ist ≤ 0, wie wir im dritten Punkt sahen.

An dieser Stelle bemerken wir noch eine Besonderheit der ganzen Zahlen:

5.1.3 Satz

Jede nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{Z}$, die nach unten beschränkt ist, hat ein Minimum.

Beweis: Wir zeigen dies zunächst für den Fall, dass $M \subset \mathbb{N}$.
Sei A die Menge der natürlichen Zahlen, die untere Schranke für M sind. Dann ist $1 \in A$, da $1 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für jedes $n \in A$ ist entweder $n \in M$ (das heißt, n ist ein Minimum von M) oder $n \notin M$. In diesem Fall ist auch $n+1$ eine untere Schranke für M, also $n+1 \in A$. (Hier verwenden wir, dass für zwei natürliche Zahlen n, m gilt: Aus $n < m$ folgt $n+1 \leq m$. Dies zeigt man leicht mittels vollständiger Induktion über n.)

Wir haben gezeigt: Falls M kein Minimum hat, so ist A induktiv. Wegen $A \subset \mathbb{N}$ ist dann $A = \mathbb{N}$, dies ist aber wegen $M \neq \emptyset$ unmöglich. Also besitzt M ein Minimum.

Sei nun $M \subset \mathbb{Z}$ und a eine untere Schranke für M. Zunächst wissen wir bloß $a \in \mathbb{R}$, doch aus dem archimedischen Prinzip (siehe unten) folgt, dass es ein $b \in \mathbb{N}$ gibt mit $b \geq -a$, also $-b \leq a$; also gibt es auch eine untere Schranke $-b \in \mathbb{Z}$ für M.

Setze nun $M' = M + b + 1 := \{n + b + 1 : n \in M\}$. Dann ist $M' \subset \mathbb{N}$, denn für $n \in M$ ist $n \geq -b$, also $n + b + 1 > 0$. Also hat M' ein Minimum m. Dann ist $m - b - 1$ ein Minimum für M. □

Dies ist deshalb wichtig, weil man in vielen Beweisen die Idee des »**Extremalprinzips**« anwenden kann: Um die Existenz eines Objektes (zum Beispiel einer Zahl) mit gewissen Eigenschaften zu zeigen, sucht man ein Objekt, für das gewisse Eigenschaften »extremal« sind (z. B. die Zahl, die möglichst klein ist). Ein Beispiel werden wir gleich in Satz 5.1.7 kennenlernen.

> **Bemerkung:** Eine etwas solidere Formulierung des Beweises von Satz 5.1.1 ist auch mit Hilfe des Extremalprinzips möglich: Falls $q \in \mathbb{Q}$, wobei $q > 0$, mit $q^2 = 2$ existiert, so kann man $q = {}^a\!/_b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ schreiben. Man wähle nun unter den möglichen Darstellungen von q als ${}^a\!/_b$ diejenige, für die a minimal ist. Dass dann ${}^a\!/_b$ kürzbar ist bedeutet, dass es eine Darstellung $q = {}^{a'}\!/_{b'}$ gibt mit $a' < a$, im Widerspruch zur Minimalitätsannahme.

Haben nun nach oben beschränkte Mengen ein Supremum? In manchen Fällen ist dies leicht zu beantworten:

- ▷ Falls $\max M$ existiert, so existiert auch $\sup M$, und $\max M = \sup M$.
- ▷ Falls $\min M$ existiert, so existiert auch $\inf M$, und $\min M = \inf M$.

Ist nämlich $a = \max M$, so ist a obere Schranke für M nach Definition, und für jede beliebige obere Schranke c von M gilt $c \geq a$ (weil ja a ein Element von M ist, nach Definition der oberen Schranke). Also ist $c = \sup M$. Ähnlich sieht man den zweiten Fall.

Beispiel: Sei $M := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

- ▷ Es ist $\max M = 1$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $n \geq 1$, dann $1 \geq \frac{1}{n}$.
- ▷ Es ist also auch $\sup M = 1$.
- ▷ $\min M$ existiert nicht, denn zu jedem $x \in M$ gibt es ein $y \in M$, für das gilt: $y < x$. Denn x muss die Form $\frac{1}{n}$ haben für ein $n \in \mathbb{N}$, dann kann man $y = \frac{1}{(n+1)}$ nehmen.
- ▷ $\inf M = 0$. Beweis ähnlich zum Fall $M = (0, 1)$.

Ob *jede* nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum besitzt, läßt sich mittels der bisherigen Axiome nicht beantworten. In $\mathbb{Q}$ ist dies nicht so (etwa hat die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$, wie aus den weiteren Betrachtungen folgen wird). Für $\mathbb{R}$ fordern wir dies axiomatisch, als Ausdruck der »Lückenfreiheit«:

5.1.4 Vollständigkeitsaxiom (oder Supremumsaxiom)

Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Hieraus folgt zunächst das Analogon für das Infimum:

5.1.5 Satz

Jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

Beweis: Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $-M := \{-x : x \in M\}$. Da M nach unten beschränkt ist, ist $-M$ nach oben beschränkt, also existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom $\sup(-M) \in \mathbb{R}$. Da $\inf M = -\sup(-M)$ gilt, existiert auch $\inf M$. Die Details sind eine Übung. □

Bevor wir zu den richtig interessanten Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom kommen, hier noch zwei sehr nützliche und ziemlich »offensichtliche« Sätze, die sich erstaunlicherweise nicht aus den Körper- und Anordnungsaxiomen herleiten lassen. Diese »Nichtherleitbarkeit« folgt daraus, dass es auch angeordnete Körper gibt, für die die analogen Eigenschaften nicht gelten. Sie heißen nicht-archimedisch.

5.1.6 Satz (Archimedisches Prinzip)

(1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$.

Beweis:

(1) Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gälte $n \leq x$. Dann wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt. Also existierte $x_0 := \sup \mathbb{N}$. Da x_0 die *kleinste* obere Schranke von $\mathbb{N}$ wäre, wäre $x_0 - 1$ keine obere Schranke, also gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x_0 - 1$, d. h. $n + 1 > x_0$. Da aber $\mathbb{N}$ induktiv ist, läge auch $n + 1$ in $\mathbb{N}$. Die Aussage $n + 1 > x_0$ stünde dann aber im Widerspruch dazu, dass x_0 eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist.

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y = \frac{1}{x}$. Nach (1) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y$, also $n > \frac{1}{x}$. Es folgt: $\frac{1}{n} < x$.
□

Bemerkung: In manchen Büchern wird das archimedische Prinzip als eines der Anordnungsaxiome gefordert.

5.1.7 Satz

$\mathbb{Q}$ ist **dicht** dense in $\mathbb{R}$: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$a < q < b\,.$$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$ und außerdem $k \in \mathbb{Z}$ derart, dass k die kleinste Zahl ist, für die gilt: $\frac{k}{n} > a$.

Beweis dafür, dass es dieses k gibt: Sei $Z := \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} > a\right\}$. Weil $k > na$ für alle $k \in Z$ ist, ist Z nach unten beschränkt, also hat Z wegen Satz 5.1.3 ein Minimum.

Behauptung: $a < \frac{k}{n} < b$.

Beweis: $a < \frac{k}{n}$ ist per Voraussetzung wahr, es bleibt also zu zeigen, dass $\frac{k}{n} < b$.
Angenommen es gälte $\frac{k}{n} \geq b$. Es gilt per Definition $\frac{1}{n} < b - a$, also $-\left(\frac{1}{n}\right) > -(b-a)$, und durch Addition dieser Ungleichung und der Ungleichung $\frac{k}{n} \geq b$ folgt

$$\frac{k}{n} - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a\,,$$

also $\frac{(k-1)}{n} > a$, im Widerspruch zur Minimalität von k.
Es folgt die Negation der Annahme: $\frac{k}{n} < b$, und somit insgesamt: $a < \frac{k}{n} < b$. □

Nun zu einer interessanteren Anwendung des Supremumsaxioms:

5.1.8 Satz (Existenz von Wurzeln)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine Zahl $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ mit

$$b^n = a\,.$$

Man schreibt dann $b = \sqrt[n]{a}$ bzw. $b = \sqrt{a}$ im Fall $n = 2$. Wichtig: Mit beispielsweise $\sqrt{2}$ ist immer die *positive* Wurzel gemeint!

Beweis: *Eindeutigkeit:* Angenommen, $b, c \geq 0$ sind reelle Zahlen mit $b^n = x = c^n$. Falls $b < c$ wäre, so folgte durch n-fache Multiplikation dieser Ungleichung mit sich selbst (weil $b, c \geq 0$ ist, bleibt dabei das Ungleichheitszeichen erhalten), dass $b^n < c^n$, im Widerspruch zur Annahme. Ähnlich schließt man die Möglichkeit $b > c$ aus. Wegen der Trichotomie (erstes Anordnungsaxiom) bleibt nur die Möglichkeit $b = c$.

Existenz: Wir werden die Existenz nur im Fall $n = 2$ und $a = 2$ zeigen. Dieselbe Idee funktioniert auch im Allgemeinen. Einen weiteren Existenzbeweis werden wir später aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen erhalten.

Wir brauchen ein Lemma.

5.1.9 Lemma

(1) Sei $x > 0$ und $x^2 < 2$, dann gibt es $y > x$ mit $y^2 < 2$.

(2) Sei $x > 0$ und $x^2 > 2$, dann gibt es $y < x$ mit $y^2 > 2$ und $y > 0$.

Zuerst der Beweis des Lemmas:

(1) Die Idee ist, $y = x(1 + \frac{1}{m})$ für ein $m \in \mathbb{N}$ zu setzen. Falls m genügend groß ist, ist y nur um so wenig größer als x, dass immer noch $y^2 < 2$ sein sollte.

Um diese Idee umzusetzen, schreiben wir die Bedingung (das Ziel) $x(1 + \frac{1}{m})^2 < 2$ aus und versuchen, daraus eine (hinreichende) Bedingung für m zu finden. Beim Aufschreiben des Beweises beginnen wir mit der so gefundenen Bedingung.

Um zu verstehen wie man drauf kommt, sollte man den Beweis rückwärts lesen!

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $x^2 < 2$, dann gilt

$$x^2 < 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{2}{x^2} - 1\,.$$

Sei nun $\varepsilon := \frac{2}{x^2} - 1$. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{3}{\varepsilon}$. Es gilt dann

$$\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{m} = \frac{2}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon\,.$$

Außerdem gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$m^2 \geq m \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2} \leq \frac{2}{m} + \frac{1}{m} < \varepsilon\,.$$

Damit folgt

$$1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2} < 1 + \varepsilon = \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 < \frac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 < 2\,.$$

Durch Multiplizieren der Ungleichungen $x > 0$ und $1 + \dfrac{1}{m} > 1$ folgt außerdem $x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{m}\right) > x$.

Sei nun $y := x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)$. Dann haben wir gezeigt, dass $y > x$ und dass $y^2 < 2$ gilt, was zu zeigen war.

(2) Die Behauptung lässt sich analog zur ersten Behauptung zeigen:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $2 < x^2$ und $x > 0$, dann gilt $\quad \dfrac{2}{x^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{2}{x^2} > 0\,.$

Setze nun $\varepsilon = 1 - \dfrac{2}{x^2}$ und wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

Dann gilt $\quad -\dfrac{1}{m} > -\dfrac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{2}{m} > -\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{m^2} > -\varepsilon\,,$

also $\quad 1 - \dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{m^2} > 1 - \varepsilon = \dfrac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^2 > \dfrac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^2 > 2\,.$

Aus $x > 0$ und $1 - \dfrac{1}{m} < 1$ folgt außerdem $x \cdot \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) < x$.

Sei nun $y := x \cdot \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)$. Dann haben wir $y < x$ und $y^2 > 2$ gezeigt, also sind wir fertig.

Zum Beweis des Satzes (im Fall $n = 2$ und $a = 2$) sei nun

$$M := \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \ \text{ und } \ y^2 < 2\}\,.$$

Offenbar ist M nach oben beschränkt, z. B. durch 2, denn alle Zahlen y mit $y \geq 2$ haben $y^2 > 4 > 2$, liegen also nicht in M.

Behauptung: $b = \sup M$ erfüllt $b^2 = 2$. Beweis: Offenbar ist $b > 0$. Wäre nun $b^2 < 2$, so existierte nach Teil (1) des Lemmas ein $y > b$ mit $y^2 < 2$, also $y \in M$. Also wäre b keine obere Schranke für M, Widerspruch!

Wäre $b^2 > 2$, so gäbe es nach Teil (2) des Lemmas ein $z < b$ mit $z > 0$ und $z^2 > 2$. Da aus $z^2 > 2 > y^2$ (mit $y, z > 0$) schon $z > y$ folgt (wie im Eindeutigkeitsbeweis oben), wäre z eine obere Schranke für M. Also wäre b nicht *kleinste* obere Schranke für M, Widerspruch!

Da weder $b^2 < 2$ noch $b^2 > 2$ stimmen können, muss $b^2 = 2$ sein. □

Bemerkung: Der Beweis des Lemmas zeigt, dass man im Fall $x \in \mathbb{Q}$ auch immer $y \in \mathbb{Q}$ mit den geforderten Eigenschaften finden kann. Hieraus folgt leicht, dass die Menge $\{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \text{ und } y^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

5.1.10 Definition

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \dfrac{n}{m}$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren dann:

$$\boldsymbol{x^q} := \begin{cases} \sqrt[m]{x^n} & \text{falls } n > 0 \\ 1 & \text{falls } n = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt[m]{x^{-n}}} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

Offenbar ist dies mit Definition 2.3.3 konsistent. Beachten Sie aber, dass

$$\begin{aligned} x^n \quad (n \in \mathbb{N}) &\text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ definiert ist,} \\ x^n \quad (n \in \mathbb{Z}\,, n \leq 0) &\text{ für alle } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \text{ definiert ist,} \\ x^q \quad (q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) &\text{ für alle } x \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Praktisch ist oft noch (z. B. bei Potenzreihen), $0^0 := 1$ zu definieren.

5.1.11 Satz

Für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:

(1) x^q ist **wohldefiniert,** d. h. falls $q = \dfrac{n}{m} = \dfrac{n'}{m'}$, ist $\sqrt[m']{x^{n'}} = \sqrt[m]{x^n}$ für $n, n' > 0$ (und analog im andern Fall).

(2) $x^{p+q} = x^p \cdot x^q$.

(3) $x^{p \cdot q} = (x^p)^q = (x^q)^p$.

Beweis: Übung. □

Abschließende Bemerkung zum Axiomensystem für $\mathbb{R}$

Woher wissen wir, dass diese Axiome »ausreichen«? Wir werden sehen, dass wir alles, was wir brauchen, damit machen können. Ein weiterer Hinweis darauf wird durch folgenden Satz gegeben:

> Es gibt höchstens einen vollständigen angeordneten Körper. Mit anderen Worten: Sind K und L zwei angeordnete Körper, die beide vollständig sind, so gibt es eine bijektive Abbildung $f : K \to L$, die die algebraischen und die Ordnungseigenschaften erhält, d. h.
>
> $$f(a+b) = f(a) + f(b)\,,\quad f(ab) = f(a)f(b)\,,\quad f(0) = 0\,,\quad f(1) = 1 \quad \text{und}$$
> $$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)\,.$$

Ohne die Vollständigkeit stimmt dies nicht, da es zum Beispiel zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ keine solche Bijektion geben kann.

Woher wissen wir, dass dies nicht schon zu viele Axiome sind? Das heißt, woher wissen wir, dass es überhaupt einen vollständigen angeordneten Körper gibt? Dies ist viel schwieriger zu beantworten. Die Frage lässt sich auch so formulieren: Woher wissen wir, dass die Axiome widerspruchsfrei sind, wir aus ihnen also nicht einen Widerspruch (zum Beispiel $1 = 2$) herleiten können? Gödel hat gezeigt, dass man dies nicht wissen kann, genauer dass man die Widerspruchsfreiheit grundsätzlich nicht beweisen kann. Falls Sie sich damit besser fühlen, können Sie aber eine der anfangs erwähnten Konstruktionen von $\mathbb{R}$ bemühen. Die Existenz solcher (zum Beispiel aus den natürlichen Zahlen, oder aus der Mengenlehre) besagt dann folgendes:
Falls die Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen (bzw. die Axiome der Mengenlehre) widerspruchsfrei sind, so sind es auch die Axiome der reellen Zahlen. Ob sie's wirklich sind, lässt sich wiederum nicht beweisen. Aber vielleicht wirken sie auf Sie noch elementarer, noch unmittelbar einsichtiger, dann sollten Sie sich eine dieser Konstruktionen ansehen.

Dies ist recht kompakt in Behrends' Buch Analysis, Band 1, dargestellt (Kap. 1.11).

6 Folgen und Konvergenz

6.1 Definition der Konvergenz

Wir erinnern an die Definition 3.4.2 einer Folge. Wir betrachten in diesem Kapitel nur Folgen reeller Zahlen. Später werden auch Folgen komplexer Zahlen, Folgen von Funktionen usw. auftreten.

Beispiele:

$$a_n = 0 \quad (0,0,0,0,0,0,\dots)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

$$a_n = (-1)^n \quad (-1,1,-1,1,-1,1,\dots)$$

$$a_0 = 1\,,\ a_1 = 1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (1,1,2,3,5,8,13,21,\dots)$$ **Fibonaccifolge**

Wir wollen die Beobachtung präzisieren, dass sich die Folgenglieder im zweiten Beispiel »immer mehr der Null annähern«. Hierzu ist es nützlich, sich zunächst über ein paar einfache Regeln klar zu werden, die den Absolutbetrag von Zahlen und den Abstand zweier Punkte betreffen.

6.1.1 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ sei der **Betrag** absolute value von x wie folgt definiert:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Der **Abstand** distance zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert als $|x - y|$.

6.1.2 Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, x_1, x_2, \dots, x_n, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $|x| \leq y \;\Leftrightarrow\; (x \leq y) \wedge (-x \leq y)$

(2) $|x \cdot y| \;=\; |x| \cdot |y|$

(3) $|x + y| \;\leq\; |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung** triangle inequality

(4) $|x - z| \;\leq\; |x - y| + |y - z|$

(5) $|x - y| \;\geq\; |x| - |y|$

(6) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \;\leq\; |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

Beweis: Seien $n \in \mathbb{N}, x, x_1, x_2, \dots, x_n, y, z \in \mathbb{R}$.

(1) Zunächst zeigen wir die Vorwärtsrichtung der Biimplikation: Sei $|x| \leq y$. Wegen $|x| \geq 0$ ist dann $y \geq 0$. Fallunterscheidung:
   (a) Sei $x < 0$. Dann gilt $x < 0 \leq y$, also $x < y$, und $|x| = -x$, also $-x = |x| \leq y$, also $-x \leq y$.
   (b) Sei $x \geq 0$. Dann gilt $x = |x| \leq y$, also $x \leq y$, und $-x \leq 0 \leq y$, also $-x \leq y$.

Nun die Rückrichtung: Sei $(x \leq y)$ und $(-x \leq y)$. Fallunterscheidung:

(a) Sei $x < 0$. Dann ist $-x = |x|$, und da per Voraussetzung $-x \leq y$ gilt, folgt $|x| \leq y$.

(b) Sei $x \geq 0$. Dann ist $x = |x|$, und da per Voraussetzung $x \leq y$ gilt, folgt $|x| \leq y$.

(2) Vier Fälle:

(a) Sei $x < 0$ und $y < 0$. Dann gilt:

$$|x| = -x \wedge |y| = -y \Rightarrow |x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y \overset{x \cdot y > 0}{=} |x \cdot y|$$

(b) Sei $x < 0$ und $y \geq 0$. Dann gilt:

$$|x| = -x \wedge |y| = y \Rightarrow |x| \cdot |y| = -x \cdot y \overset{x \cdot y < 0}{=} |x \cdot y|$$

(c) Sei $x \geq 0$ und $y < 0$. Dann gilt:

$$|x| = x \wedge |y| = -y \Rightarrow |x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y \overset{x \cdot y < 0}{=} |x \cdot y|$$

(d) Sei $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Dann gilt:

$$|x| = x \wedge |y| = y \Rightarrow |x| \cdot |y| = x \cdot y \overset{x \cdot y > 0}{=} |x \cdot y|$$

(3) Offensichtlich gilt

$$\begin{array}{rcrcr} x \leq |x| & \wedge & y \leq |y| & \Rightarrow & x + y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x| & \wedge & -y \leq |y| & \Rightarrow & (-x) + (-y) \leq |x| + |y| \\ & & & \Rightarrow & -(x+y) \leq |x| + |y| \end{array}$$

Also folgt insgesamt mit (1): $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(4) $|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \overset{(3)}{\leq} |x - y| + |y - z|$.

(5) $|x| = |y + (x - y)| \overset{(3)}{\leq} |y| + |x - y|$, subtrahiere $|y|$.

(6) Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang ($n = 1$): $|x_1| \leq |x_1|$ stimmt natürlich.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n + 1$): Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$|x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + \ldots + x_n) + x_{n+1}| \overset{(3)}{\leq} |x_1 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \overset{\text{Ann.}}{\leq} |x_1| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}|$.

□

Es lohnt sich ein wenig zu üben, »geometrisch offensichtliche« Aussagen die den Abstand betreffen, formal zu beweisen. Als Beispiel zeigen wir (wird später verwendet):

6.1.3 Satz

Für $x, y \in \mathbb{R}$ folgt aus $x > 0$ und $|x - y| \leq \frac{x}{2}$, dass $y \geq \frac{x}{2}$.

Beweis: Wegen $x - y \leq |x - y| \leq \frac{x}{2}$ ist $y = x - (x - y) \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$. □

Wir wollen nun den zentralsten Begriff der Analysis, die Konvergenz von Folgen, einführen. Es wird etwas übersichtlicher, wenn wir zunächst einen Spezialfall betrachten:

6.1.4 Definition

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt **Nullfolge** null sequence, wenn gilt:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \ \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \geq n_0}{\forall} \ |a_n| < \varepsilon$$

In Worten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0 (ein Index), so dass für alle nachfolgenden Indizes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| < \varepsilon$.

Anschaulich: (a_n) ist Nullfolge, wenn sich die a_n für große n immer mehr der Null annähern. Am Anfang vertut man sich aber leicht mit der genauen Bedeutung hiervon. Daher sollte man direkt die formale Definition nachprüfen.

Beispiele:

(1) $a_n = 0$. Dies ist eine Nullfolge. Denn für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| = 0 < \varepsilon$. Man kann also $n_0 = 1$ wählen.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$. Dies ist eine Nullfolge. Denn zu beliebigem ε kann man n_0 so wählen, dass $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$ (nach dem archimedischem Prinzip). Für $n > n_0$ gilt dann $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, also $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$.

(3) $a_n = (-1)^n$ ist keine Nullfolge. Sei beispielsweise $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, dann gibt es kein a_n mit $|a_n| < \dfrac{1}{2}$, denn $|a_n| = 1 \not< \dfrac{1}{2}$.

Bemerkung: Es kommt wesentlich auf die Reihenfolge der Quantoren an. Vertauscht man beispielsweise die beiden ersten Quantoren in der Nullfolgendefinition, so erhält man die Bedingung

$$\underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underbrace{\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ :\ |a_n| < \varepsilon}_{\text{gleichwertig: } \underset{n\geq n_0}{\forall}\ :\ a_n=0}\ , \quad \text{also beispielsweise: } (3,5,7,-1,0,0,0,0,\dots)$$

Hier wird verlangt, dass ab einem gewissen n_0 alle Folgenglieder Null sind; die Konvergenz verlangt hingegen nur eine Annäherung an Null.

Es gilt außerdem (Übung!):

- ▷ (a_n) Nullfolge $\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ sind nur *endlich* viele Folgenglieder außerhalb von $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
- ▷ (a_n) keine Nullfolge $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass *unendlich* viele Folgenglieder außerhalb von $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen.

Beispiel: Die Folge (a_n) mit

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{also} \quad a_n = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

ist keine Nullfolge, da zum Beispiel für $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ und für alle ungeraden n die Folgenglieder a_n außerhalb von $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen.

Oft wird uns eine leichte Variante der Nullfolgenbedingung begegnen, die aber auf's selbe hinausläuft:

6.1.5 Lemma

In der Definition einer Nullfolge kann ersetzt werden:

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{durch} \quad |a_n| \leq \varepsilon$$
$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{durch} \quad |a_n| < K \cdot \varepsilon$$

Hierbei muss $K \in \mathbb{R}$ mit $K > 0$ eine von ε unabhängige Zahl sein.

Beweis: Es wird nur die zweite Behauptung bewiesen, für $K > 1$ (der Fall $K < 1$ läßt sich ganz ähnlich zeigen). Angenommen es gilt

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |a_n| < \varepsilon\,,$$

dann folgt:
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |a_n| < K\cdot\varepsilon$$

Denn aus $|a_n| < \varepsilon$ und $\varepsilon < K\cdot\varepsilon$ folgt $|a_n| < K\cdot\varepsilon$.
Es gelte nun umgekehrt
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |a_n| < K\cdot\varepsilon\,.$$

Ist $\varepsilon' > 0$ gegeben, so setze $\varepsilon := \dfrac{\varepsilon'}{K}$. Man erhält
$$\underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |a_n| < K\cdot\varepsilon = \varepsilon'\,.$$

Also ist (a_n) eine Nullfolge. □

Nun kommt die allgemeine Definition der Konvergenz von Folgen:

6.1.6 Definition
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_n - a) \text{ ist Nullfolge}$$

Statt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ schreibt man auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder einfach $a_n \to a$. Offenbar ist (a_n) eine Nullfolge genau dann, wenn $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

6.1.7 Definition

(a_n) ist **konvergent** convergent $:\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $a\in\mathbb{R}$ mit $a_n \to a$

(a_n) ist **divergent** divergent $:\Longleftrightarrow$ (a_n) ist nicht konvergent

Eine wichtige Beobachtung ist, dass es bei Konvergenz nur auf das Verhalten der Folgenglieder für »genügend große« n ankommt:

6.1.8 Lemma

Sind $(a_n), (b_n)$ Folgen und gilt $a_n = b_n$ für alle, bis auf höchstens endlich viele n, dann gilt:
Falls (a_n) konvergiert, so konvergiert auch (b_n), und zwar gegen denselben **Grenzwert** limit.

Bemerkung: Gleichwertig zur Voraussetzung im Lemma:
Angenommen, es gibt ein n_0, so dass $a_n = b_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Beweis: Übung. □

6.2 Konvergenz und algebraische Operationen

Wir untersuchen nun, wie gut sich Konvergenz von Folgen mit algebraischen Operationen und mit Ungleichungen »verträgt«. Zur Vorbereitung brauchen wir:

6.2.1 Definition

(a_n) ist **beschränkt** bounded $:\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $A\in\mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq A$ für alle n

Mit anderen Worten: Die Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn die Menge $\{a_1, a_2, \ldots\}$ beschränkt ist. Analog definiert man die Begriffe **nach oben** und **nach unten beschränkt.**

6.2.2 Lemma

Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \to a$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für alle $n \geq n_0$.

Man setzt nun $A := \max\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. Dann ist $|a_n| \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

6.2.3 Satz

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und sind $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit

$$a_n \to a \quad \text{und} \quad b_n \to b\,,$$

dann folgt:

(1) $a_n + b_n \;\to\; a + b$

(2) $a_n \cdot b_n \;\to\; a \cdot b$

(3) Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$, so folgt $\dfrac{a_n}{b_n} \;\to\; \dfrac{a}{b}$

Beweis: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Wähle ein $\varepsilon > 0$. Aus $a_n \to a$ folgt, dass man n_0 wählen kann mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Aus $b_n \to b$ folgt, dass man n_1 wählen kann mit $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$.

Setzt man $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$, dann gilt also für $n \geq n_2$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon\,.$$

(1) Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon\,.$$

(2) Damit folgt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \leq |a_n| \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} \cdot |b|\,.$$

Ist nun A so gewählt, dass $|a_n| \leq A$ für alle n, so folgt für $n \geq n_2$ wegen der Rechnung zuvor:

$$|a_n b_n - ab| < A \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot |b| = \underbrace{(A + |b|)}_{\text{unabhängig von } \varepsilon} \cdot \varepsilon$$

(3) Es ist $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ und $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Wegen (2) genügt es zu zeigen:

$$b_n \to b \;\text{ mit }\; b_n \neq 0 \;\text{ und }\; b \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$$

Hilfsbehauptung: $\underset{c>0}{\exists} \; \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; |b_n| \geq c$. Beweis: Aus $b_n \to b$ folgt mit $\varepsilon := \dfrac{|b|}{2}$

$$\underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n \geq n_0}{\forall} \; |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

Wegen Satz 6.1.3 folgt dann $|b_n| \geq \dfrac{|b|}{2}$ für $n \geq n_0$, also können wir setzen:

$$c := \min\left\{\frac{|b|}{2}, |b_1|, \ldots, |b_{n_0-1}|\right\}$$

Somit ist die Hilfsbehauptung bewiesen. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und n_1 derart gewählt, dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Dann folgt mit der Hilfsbehauptung

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} < \frac{\varepsilon}{|b| \cdot c} = K \cdot \varepsilon\,,$$

wobei $K := \dfrac{1}{|b| \cdot c}$ von ε unabhängig ist. □

Wir untersuchen nun die Verträglichkeit von Konvergenz mit Ungleichungen (also mit der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$). Das »Sandwichlemma« werden wir oft zum Nachweis von Konvergenz verwenden:

6.2.4 Satz

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und sind (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen reeller Zahlen, dann gilt:

(1) Falls für alle n gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$,

sowie $a_n \to a$ und $c_n \to a$, so gilt auch $b_n \to a$. **(Sandwichlemma)**

(2) Falls für alle n gilt $a_n \leq b_n$,

sowie $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt auch $a \leq b$.

Bemerkung: Aus $a_n < b_n$ für alle n folgt nicht $a < b$, sondern bloß $a \leq b$.

Beispiel: Seien $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ für alle n. Dann ist $a_n < b_n$ für alle n, aber beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert null.

Beweis: Versuchen Sie es zuerst selbst!

(1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, und n_1 mit $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Setze $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Aus $|a_n - a| < \varepsilon$ folgt $a - a_n < \varepsilon$, also $a - \varepsilon < a_n$. Ähnlich folgt aus $|c_n - a| < \varepsilon$, dass $c_n < a + \varepsilon$. Also gilt für $n \geq n_2$

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon,$$

also $|b_n - a| < \varepsilon$, was zu zeigen war.

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, und n_1 mit $|b_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Setze $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Ähnlich wie in (1) folgt

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$$

für $n \geq n_2$. Also gilt $a < b + 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Daraus folgt $a \leq b$. □

Aus dem zweiten Teil des Satzes, zusammen mit dem Analogon für ›$\geq$‹, folgt sofort:

6.2.5 Korollar

Seien $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \leq c$. Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in [b, c]$ für alle n.
Falls $a_n \to a$, dann ist $a \in [b, c]$.

6.3 Der Grenzwert ›unendlich‹

6.3.1 Definition

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{a_n \to \infty} \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Für jedes } K \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } n_0\text{, so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt} : a_n > K$$

Bemerkung: Ähnlich definiert man $a_n \to -\infty$. Aus $a_n \to \infty$ folgt, dass (a_n) unbeschränkt (nach oben) ist. Wenn (a_n) unbeschränkt ist, folgt daraus aber nicht $a_n \to \infty$.

Beispiel: Sei (a_n) die Folge definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{also} \quad (1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots)$$

Die Folge (a_n) ist zwar unbeschränkt, aber $a_n \not\to \infty$.

Bemerkung: Zur Sprechweise: Eine Folge, die den Grenzwert ∞ oder $-\infty$ hat, ist trotzdem divergent! Manchmal werden solche Folgen **bestimmt divergent** genannt.

Es gibt aber auch divergente Folgen, die weder den Grenzwert ∞ noch den Grenzwert $-\infty$ haben, so etwa $a_n = (-1)^n$.

6.3.2 Lemma

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n > 0$ für alle n. Dann gilt:

$$a_n \to \infty \iff \frac{1}{a_n} \to 0$$

Beweis: Übung. □

Ein wichtiges Beispiel einer Folge mit Grenzwert ∞ bildet den folgenden Satz:

6.3.3 Satz

Seien $x > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\dfrac{x^n}{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Mit anderen Worten: Exponentielles Wachstum ($n \mapsto x^n$) schlägt polynomielles Wachstum ($n \mapsto n^k$). Bevor wir dies beweisen, ist es nützlich, sich über die Natur der Funktion $n \mapsto \binom{n}{k}$ klar zu werden.

6.3.4 Lemma

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es gibt $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{Q}$ mit $d_k = \dfrac{1}{k!}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{n}{k} = d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \ldots + d_1 n$$

Beweis: Dies folgt einfach durch Ausmultiplizieren:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} = \frac{1}{k!}n^k + d_{k-1}n^{k-1} + \ldots + d_1 n$$

Der Term mit n^k entsteht dadurch, dass man aus jeder der $k-1$ Klammern im Zähler den Faktor n nimmt. Der Term mit n^{k-1} entsteht dadurch, dass man in $k-2$ Klammern den Faktor n nimmt und in einer, etwa in $(n-j)$, den Faktor j. Da jedes $j = 1, \ldots, k-1$ einen solchen Term beiträgt, ist $d_{k-1} = -\dfrac{1+\ldots+(k-1)}{k!} = \dfrac{1}{2(k-2)!}$ usw.

Ein formalerer Beweis läßt sich mit vollständiger Induktion geben. □

Bemerkung: Die Zahlen d_i hängen nicht nur von i ab, sondern auch von k (aber nicht von n).

Beispiel:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

Beweis (Satz 6.3.3): Sei $x := 1 + c$ mit $c > 0$. Dann ist:

$$x^n = (1+c)^n = 1 + nc + \binom{n}{2}c^2 + \ldots + \binom{n}{k}c^k + \binom{n}{k+1}c^{k+1} + \ldots$$

Da alle Terme ≥ 0 sind, folgt für $n > k$:

$$x^n \geq \binom{n}{k+1}c^{k+1}$$

Die Idee ist nun, dass die rechte Seite »für große n wie n^{k+1} anwächst«, also schneller als der Nenner n^k. Präzise: Wir verwenden das Lemma mit k ersetzt durch $k+1$ und schreiben:

$$\binom{n}{k+1} = d_{k+1}n^{k+1} + d_k n^k + \ldots + d_1 n$$

Also folgt für $n > k$:

$$\frac{x^n}{n^k} > \frac{\binom{n}{k+1}c^{k+1}}{n^k} = \Big(\underbrace{d_{k+1}n}_{\to\infty} + \underbrace{d_k}_{\to d_k} + \underbrace{d_{k-1}n^{-1} + \ldots + d_1 n^{1-k}}_{\to 0} \Big) c^{k+1}$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen ∞ strebt, gilt dies auch für die linke Seite. □

An dieser Stelle bietet es sich an, eine zentrale Klasse von Funktionen einzuführen:

6.3.5 Definition

Ein **Polynom vom Grad g** polynomial of degree g mit $g \in \mathbb{N}_0$ ist eine Funktion der Form

$$p(x) = d_g x^g + d_{g-1} x^{g-1} + \ldots + d_1 x + d_0$$

mit $d_0, \ldots, d_g \in \mathbb{R}$. Falls $d_g \neq 0$, so heißt d_g **Leitkoeffizient** leading coefficient und g **Grad** von p.

Lemma 6.3.4 legt nahe, die Definition des Binomialkoeffizienten zu verallgemeinern:

6.3.6 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $\binom{x}{k}$ wie folgt:

(1) $\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ falls $k \geq 1$ und

(2) $\binom{x}{0} := 1$.

Beachte, dass im Allgemeinen $\binom{x}{k} \neq 0$ selbst im Fall $x < k$ gilt, zum Beispiel ist

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Lemma 6.3.4 gilt natürlich entsprechend auch für $\binom{x}{k}$ für reelle x.

Beim Rechnen mit Grenzwerten ist folgendes oft nützlich:

6.3.7 Definition (Erweiterte reelle Zahlen)

Es sei
$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
mit den Rechenregeln:

$$\infty + \infty := \infty \qquad \infty + x := \infty \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \qquad \infty \cdot x := \infty \quad \text{für } x > 0$$

$$\infty \cdot x := -\infty \quad \text{für } x < 0 \qquad \frac{x}{\infty} := 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Weiterhin wird die Ordnungsrelation für ›<‹ von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ erweitert mittels:

$$-\infty < x < \infty \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

6.3.8 Satz

Die Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 6.2.3 und die Anordnungsregeln aus Satz 6.2.4 gelten auch wenn die Grenzwerte a, b in $\overline{\mathbb{R}}$ liegen, falls die resultierenden Operationen definiert sind.

Beweis: Übung. □

Beispiel: Falls $a_n \to \infty$ und $b_n \to b$ mit $b \in \mathbb{R}$, so folgt $a_n + b_n \to \infty$.

Bemerkung: Einige Operationen mit ∞ sind nicht definiert. Beispielsweise nicht definiert sind:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0$$

Mit gutem Grund: Gilt etwa $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$, so kann man daraus nichts über den Grenzwert (und sogar die Konvergenz) von $(a_n b_n)$ folgern.

Beispiele:

(1) $a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{n}$, dann $a_n b_n \to 1$.

(2) $a_n = n,\ b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, dann $a_n b_n \to \infty$.

(3) $a_n = n,\ b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, dann divergiert $(a_n b_n)$.

6.4 Asymptotische Gleichheit

6.4.1 Definition

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen positiver reeller Zahlen.

$$\boldsymbol{a_n \sim b_n} \quad (n \to \infty) \quad :\Longleftrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

Gilt $a_n \sim b_n$, so nennt man (a_n) und (b_n) **asymptotisch gleich.**

Dieser Begriff ist vor allem in folgendem Kontext interessant: Die Zahlen a_n sind durch eine komplizierte Vorschrift gegeben (z. B. durch eine komplizierte Formel, oder als Lösung eines Abzählproblems, wofür man evtl. gar keine Formel hat), es gilt $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$, und man möchte die Größenordnung von a_n für große n ungefähr angeben, also die Frage

Wie schnell geht a_n gegen unendlich?

beantworten. Eine oft brauchbare Antwort ist dann die Angabe einer Folge (b_n), die durch eine möglichst einfache Formel gegeben ist, mit $a_n \sim b_n$.

Beispiele:

(1) Mit $a_n := n - 1$ und $b_n := n$ folgt

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n-1}{n} = \underbrace{1}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 1, \text{ also } a_n \sim b_n.$$

(2) Mit $a_n := n^2 + n$ und $b_n := n^2$ folgt

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+n}{n^2} = \underbrace{1}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 1, \text{ also } a_n \sim b_n.$$

Dies zeigt, dass bei asymptotischer Gleichheit die Differenz $|a_n - b_n|$ gegen ∞ gehen kann. Worauf es ankommt, ist, dass die *relative* Differenz gegen Null geht, siehe Teil (c) des folgenden Lemmas.

6.4.2 Lemma

Seien (a_n), (b_n) Folgen positiver Zahlen. Es sind äquivalent:

(a) $a_n \sim b_n \quad (n \to \infty)$

(b) $b_n \sim a_n \quad (n \to \infty)$

(c) $\dfrac{a_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Beweis: Übung. □

Es ist auch leicht zu sehen, dass asymptotische Gleichheit eine Äquivalenzrelation ist, d. h. neben der Äquivalenz von (a) und (b) im Lemma gilt für Folgen (a_n), (b_n), (c_n) positiver Zahlen:

$$a_n \sim b_n \text{ und } b_n \sim c_n \quad \Longrightarrow \quad a_n \sim c_n$$

Die Beispiele oben lassen sich leicht verallgemeinern, und dies war eine zentrale Idee im Beweis von Satz 6.3.3:

6.4.3 Lemma

Ist p ein Polynom von Grad g mit Leitkoeffizient d, dann ist $p(n) \sim dn^g \quad (n \to \infty)$.

Beweis:

$$\frac{p(n)}{dn^g} = \underbrace{\frac{dn^g}{dn^g}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{d_{g-1}n^{g-1}}{dn^g}}_{\to 0} + \underbrace{\ldots}_{\to 0} \to 1$$

□

Ein bemerkenswertes, schwierigeres Beispiel asymptotischer Gleichheit ist die **Stirlingsche Formel,** die eine schnelle approximative Berechnung von $n!$ für große n erlaubt:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Hierbei ist $e =$ 2,71828... die noch einzuführende Eulersche Zahl und $\pi =$ 3,1415....

6.5 Konvergenz und Vollständigkeit

Oft wollen wir die Konvergenz einer Folge zeigen, ohne schon vorher den Grenzwert zu kennen. Dann können wir nicht direkt die Definition verwenden, da dort auf die Differenz $a_n - a$ Bezug genommen wird.

Zum Beispiel will man oft eine Gleichung $f(x) = 0$ lösen, etwa $f(x) = x^5 + x + 1$, man sucht also ein x mit $x^5 + x + 1 = 0$. Für diese Gleichung (und für die meisten anderen) gibt es keine Lösungsformel. Oft gibt es aber Verfahren, wie man Näherungslösungen finden kann. Auf diese Weise findet man etwa eine Folge (x_n) immer besserer Näherungen in dem Sinne, dass $f(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Kann man dann zeigen, dass die Folge x_n konvergiert, so folgt für den Grenzwert a, dass

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

falls f stetig ist (was meistens der Fall ist; Stetigkeit werden wir bald behandeln), d. h. a ist eine Lösung. Ein weiterer Kontext, in dem dieses Problem auftritt, ist bei der Summierung unendlicher Reihen.

In diesem Abschnitt lernen wir einige Kriterien kennen, mit denen die Konvergenz einer Folge ohne Kenntnis ihres Grenzwertes gezeigt werden kann. Sie basieren am Ende alle auf dem Vollständigkeitsaxiom; das erste involviert Monotonie:

6.5.1 Definition

Eine Folge (a_n) heißt	**monoton wachsend,** falls	$a_{n+1} \geq a_n$	für alle n und
	monoton fallend, falls	$a_{n+1} \leq a_n$	für alle n.
Eine Folge (a_n) heißt	**streng monoton wachsend,** falls	$a_{n+1} > a_n$	für alle n und
	streng monoton fallend, falls	$a_{n+1} < a_n$	für alle n.

6.5.2 Satz

Ist (a_n) eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge, dann konvergiert (a_n).

Natürlich gilt eine analoge Aussage für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen.

Beweis: Nach Annahme ist die Menge $M := \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ nach oben beschränkt. Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, dass $a := \sup M$ existiert. Wir zeigen, dass $a_n \to a$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$, denn andernfalls wäre $a - \varepsilon$ obere Schranke im Widerspruch zur Supremumeigenschaft von a. Für $n \geq n_0$ ist dann $\underbrace{a_n \geq a_{n_0}}_{\text{Monotonie}} > a - \varepsilon$ und gemäß der Definition von a ist $a_n \leq a$. Also $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. □

6.5.3 Definition

Eine **Teilfolge** einer Folge (a_n) ist eine Folge $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$,
wobei $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ natürliche Zahlen sind.

Beispiele:

(1) $a_n := \frac{1}{n}$ $\quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ hat zum Beispiel diese Teilfolgen:

$$(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{7}, \dots) \quad (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{6}, \dots) \quad (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \dots)$$

(2) Sei $a_n := (-1)^n$ $\quad (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$. Zwei Teilfolgen sind:

$$\underbrace{(-1, -1, -1, -1, -1, \dots)}_{\to -1} \quad \underbrace{(1, 1, 1, 1, 1, \dots)}_{\to 1}$$

Aus den Definitionen folgt sofort:

6.5.4 Lemma

Falls (a_n) eine Folge mit $a_n \to a$ ist, so konvergiert *jede* Teilfolge von (a_n) gegen a.

Schreibweise: $a_{n_k} \to a \ (k \to \infty)$.

6.5.5 Definition

Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** limit point einer Folge (a_n),
falls für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele n existieren mit: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Beispiel: Die Folge (a_n) mit $a_n := (-1)^n$ $\;-1$ und 1.

6.5.6 Lemma

Ist (a_n) eine Folge und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a ist Häufungspunkt von (a_n) $\Leftrightarrow$ Es gibt eine gegen a konvergierende Teilfolge von (a_n)

Beweis:

›$\Rightarrow$‹ Sei a Häufungspunkt von a_n.

Wähle n_1 so, dass $|a - a_{n_1}| < 1$ $\qquad$ ($\varepsilon = 1$ in Konvergenzdefinition)

Wähle $n_2 > n_1$ so, dass $|a - a_{n_2}| < \frac{1}{2}$ $\qquad$ ($\varepsilon = \frac{1}{2}$ in Konvergenzdefinition)

Wähle $n_3 > n_2$ so, dass $|a - a_{n_3}| < \frac{1}{3}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Die Teilfolge (a_{n_k}) konvergiert gegen a, da $|a - a_{n_k}| < \frac{1}{k}$.

›$\Leftarrow$‹ Sei $a_{n_k} \to a$, dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein k_0 mit: $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für $k \geq k_0$. Daraus folgt, dass a Häufungspunkt von (a_n) ist. □

Beispiel: Sei (a_n) eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$. Dann ist jede reelle Zahl Häufungspunkt von (a_n).

6.5.7 Satz (Satz von Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.

Beweis: Sei (a_n) beschränkt und (b_n) die Folge definiert durch $b_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$. Es gilt $b_n \leq b_{n+1}$ für alle n, denn $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \supset \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, und für beliebige Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $A \supset B$ ist $\inf A \leq \inf B$ (Übung!). Außerdem ist per Annahme $|a_n| \leq K$ für alle n und somit folgt $|b_n| \leq K$ für alle n. (b_n) ist also beschränkt, und somit existiert nach Satz 6.5.2 ein Grenzwert $b \in \mathbb{R}$.

Es bleibt zu zeigen dass eine Teilfolge von (a_n) gegen b konvergiert ($a_{n_i} \to b$). Betrachte

$$\begin{aligned} b_1 &= \inf\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, \dots\} \\ b_{n_1+1} &= \inf\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots, a_{n_2}, \dots\} \\ b_{n_2+1} &= \inf\{a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \dots, a_{n_3}, \dots\} \text{ etc.,} \end{aligned}$$

wobei $n_1 < n_2 < \dots$ wie folgt definiert sind:

Sei n_1 derart, dass $a_{n_1} \leq b_1 + 1$.

Sei $n_2 > n_1$ derart, dass $a_{n_2} \leq b_{n_1+1} + \frac{1}{2}$.

Sei $n_3 > n_2$ derart, dass $a_{n_3} \leq b_{n_2+1} + \frac{1}{3}$ usw.

n_i existiert jeweils, weil nach der Infimumsdefinition $b_{n_{i-1}+1} + \frac{1}{i}$ keine untere Schranke für die Menge $\{a_{n_{i-1}+1}, a_{n_{i-1}+2}, \dots\}$ ist. Dann ist:

$$\underbrace{b_{n_i}}_{\to b} \leq a_{n_i} \leq \underbrace{b_{n_{i-1}+1}}_{\to b} + \underbrace{\frac{1}{i}}_{\to 0}$$

Also wegen Satz 6.2.4: $a_{n_i} \to b$. □

Bemerkung: Das im Beweis konstruierte b ist der kleinste Häufungspunkt von (a_n).

Beweis: Sei $c < b$. Zu $\varepsilon := \frac{b-c}{2}$ gibt es wegen $b_n \to b$ ein n_0, so dass $b_n > b - \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt, und damit wegen $a_n \geq b_n$ auch $a_n > b - \varepsilon$. Nun ist aber $b - \varepsilon = c + \varepsilon$, also folgt $a_n > c + \varepsilon$, also $|a_n - c| > \varepsilon$ für $n \geq n_0$, somit kann c kein Häufungspunkt von (a_n) sein. □

Wir haben gezeigt, dass die Menge der Häufungspunkte einer beschränkten Folge ein kleinstes Element (ein Minimum) besitzt. Analog besitzt sie auch ein Maximum. Für diese Zahlen gibt es Namen:

6.5.8 Definition

Sei (a_n) beschränkt. Dann sei

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &:= \text{ der kleinste Häufungspunkt von } (a_n) \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &:= \text{ der größte Häufungspunkt von } (a_n) \end{aligned}$$

$\liminf$ ist von $\inf$ und $\limsup$ von $\sup$ zu unterscheiden.

Beispiel: Sei (a_n) die Folge mit
$$a_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist ist die Menge der Häufungspunkte $\{0, 1\}$, und es ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \neq \sup\{a_1, a_2, \dots\} = \frac{3}{2}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \neq \inf\{a_1, a_2, \dots\} = -1.$$

Da $\limsup$ und $\liminf$ für beschränkte Folgen immer existieren, $\lim$ aber nicht unbedingt existiert, ist manchmal folgende Beobachtung nützlich:

6.5.9 Lemma

Sei (a_n) eine beschränkte Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

(2) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(3) a ist der einzige Häufungspunkt von (a_n).

Beweis: Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar, ebenso die Implikation (1)⇒ (3). Die Implikation (3)⇒(1) ist eine Übung. □

Man kann die Definition des Häufungspunktes dahingehend erweitern, dass man ∞ und $-\infty$ als Häufungspunkte zuläßt.

> ∞ heißt Häufungspunkt von (a_n), falls (a_n) nach oben unbeschränkt ist. Analog für $-\infty$.

Dann gilt, dass jede Folge (beschränkt oder unbeschränkt) einen Häufungspunkt in den erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ hat (Übung!), und $\limsup$ und $\liminf$ werden (als Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$) für beliebige Folgen reeller Zahlen genauso wie vorher definiert, und das Lemma gilt dann allgemein für beliebige Folgen.

Beispiel: Für $a_n = n$ ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Nun kommen wir zum wichtigsten Kriterium für Konvergenz.

6.5.10 Definition

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt **Cauchy-Folge,** falls
für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Sehr lax ausgedrückt heißt dies, dass die Folgenglieder immer dichter zusammenrücken.

6.5.11 Sätzchen

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Seien $a_n \to a$ und $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Finde n_0 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ ist dann

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$ □

Wesentlich interessanter ist:

6.5.12 Satz

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$.

Dies gilt im Allgemeinen nicht in $\mathbb{Q}$. Sind z. B. x_n rationale Zahlen mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}$, so ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$.

Beweis: In zwei Schritten:

1. Wir zeigen: (a_n) ist beschränkt.

   Sei $\varepsilon = 1$. Finde n_0 mit $|a_n - a_m| < 1$ für $n \geq n_0$. Sei nun $m = n_0$, dann:

   $$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_{n_0}| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq |a_{n_0}| + 1\,.$$

   Also ist $\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\} + 1$ eine obere Schranke für (a_n).

2. Nach Bolzano-Weierstrass hat (a_n) einen Häufungspunkt a. Sei (a_{n_i}) eine Teilfolge mit $a_{n_i} \to a$ für $i \to \infty$. Es bleibt zu zeigen, dass $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$.

   Wähle i_0 mit $i \geq i_0$, somit $|a_{n_i} - a| < \varepsilon$.

   Wähle n_0 mit $n, m \geq n_0$, somit $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

   Wähle ein $i \geq i_0$ mit $n_i \geq n_0$.

   Für $m \geq n_0$ ist dann $$|a_m - a| \leq \underbrace{|a_m - a_{n_i}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_{n_i} - a|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon\,.$$

$\square$

7 Unendliche Reihen

7.1 Definition und Beispiele

Beispiel: Eine unendliche Reihe ist zum Beispiel $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$.
Wenn man nicht aufpasst, gibt's Probleme:

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots &= (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0 \\ &= 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots = 1\,. \end{aligned}$$

Um also nicht in Widersprüche wie $0 = 1$ zu geraten, sollten wir die Summation dieser Reihe nicht zulassen.

7.1.1 Definition

Seien $a_1, a_2, \ldots$ reelle Zahlen und seien

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &:= a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,. \end{aligned}$$

Die **Reihe** $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{\infty} a_i}$ ist per Definition die Folge $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$.

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert gegen $s \in \mathbb{R}$ $:\Longleftrightarrow \quad s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$.

$\boldsymbol{s}$ heißt **Summe** der Reihe, und man schreibt: $a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$.

Die $\boldsymbol{a_i}$ heißen die **Glieder** der Reihe, die $\boldsymbol{s_n}$ heißen **Partialsummen** der Reihe.

Falls $s_n \to \infty$, so schreiben wir: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$.
Die Summation kann auch mit einer anderen Zahl als 1 beginnen, etwa $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.
Die Partialsummen sind dann analog $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.
Wir betrachten zunächst zwei wichtige Beispiele: Die geometrische und die harmonische Reihe.

Die geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots}$$

geometrische Reihe.

Die Partialsummen sind:

$$s_n = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \\ n+1 & \text{falls } q = 1\,. \end{cases}$$

Daraus folgt sofort:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{ist konvergent für } |q| < 1 \\ & \text{divergent für } |q| \geq 1\,. \end{cases}$$

Beispiele:

(1) $$\boxed{\sum_{i=3}^{\infty} q^i} = q^3 + q^4 + q^5 + \ldots \quad = q^3 \cdot \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \ldots\right)}_{\text{geometrische Reihe}} \quad = \frac{q^3}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1\,.$$

(2) Warum ist $0{,}\overline{9} = 1$? Per Definition ist $$0{,}\overline{9} = 9 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + 9 \cdot \frac{1}{10^3} + \ldots,$$

und diese Reihe konvergiert gegen (Ausklammern von $9 \cdot \frac{1}{10}$) $$9 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1\,.$$

Die harmonische Reihe

Die **harmonische Reihe** ist:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}$$

Diese Reihe divergiert, wie man folgendermaßen sehen kann:
Für $n = 2^k$ ist

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} \cdot k\,, \end{aligned}$$

also ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt, somit divergent.

Wir notieren ein paar einfache Rechenregeln, die wir schon in den Beispielen verwendet haben:

7.1.2 Satz

Angenommen, die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergieren.

(1) Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$, und es gilt: $$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

(2) Falls $c \in \mathbb{R}$, so konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i$, und es gilt: $$\sum_{i=1}^{\infty} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Beweis:

(1) Setze $s_n := \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$, $t_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, $u_n := \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Wegen des Kommutativgesetzes gilt für alle n: $s_n = t_n + u_n$.

Mit Satz 6.2.3 gilt dann: $s_n \to \lim_{n\to\infty} t_n + \lim_{n\to\infty} u_n$, und das ist gerade die Behauptung.

(2) Folgt analog. □

Eine einfache Beobachtung ist:

7.1.3 Satz
Falls $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, so folgt: $a_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$.

Bemerkung: *Achtung!* $a_i \to 0 \ (i \to \infty)$ impliziert nicht, dass $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert. Ein passendes Beispiel ist die harmonische Reihe.

Beweis: Es ist $a_i = s_i - s_{i-1}$. Aus der Konvergenz von (s_n) folgt, dass (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein i_0 so, dass $|s_n - s_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq i_0$ ist. Wendet man dies mit $n = i$, $m = i - 1$ an, so folgt $|a_i| < \varepsilon$ für $i \geq i_0 + 1$. □

Mittels Kontraposition folgt: Falls $a_i \nrightarrow 0$ $(i \to \infty)$, so ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent.

Beispiel: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i$ ist divergent.

Der »Klammertrick« am Anfang dieses Kapitels lässt sich nun so verstehen:

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die beiden »Klammerungen« entsprechen genau den beiden Teilfolgen mit geraden bzw. ungeraden Indizes, und diese konvergieren gegen 1 bzw. 0.

Beispiel: Folgende Reihe ist konvergent: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\cdot(i+1)}$

Denn mit $\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ ergibt sich $s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Wie zu erkennen ist, lässt sich diese Summe durch Kürzen stark vereinfachen (Teleskop-Prinzip):

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dies konvergiert gegen 1. Die Reihe ist also konvergent mit Summe 1.

7.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Das interessanteste Problem für Reihen ist sicherlich, ihren Wert zu berechnen. Dies ist meist sehr schwierig und in vielen Fällen unmöglich. Ein erstaunliches Beispiel ist:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Ähnliche Formeln gibt es für die vierten, sechsten, etc. Potenzen. Aber für die dritten (und fünften etc.) Potenzen ist bis heute nicht bekannt, ob man die Summe der Reihe als geschlossenen Ausdruck angeben kann.

Wir werden uns hier mit dem einfacheren Problem beschäftigen, wie man einer Reihe ansehen kann, ob sie konvergiert oder nicht. Auch das ist nicht immer einfach. Diese Fragestellung ist aber für die Analysis deswegen wichtig, weil viele wichtige Funktionen (beispielsweise die allgemeine Potenz, und daraus der Logarithmus und die trigonometrischen Funktionen) mittels Reihen definiert werden. Da will man sicher sein, dass diese Reihen konvergieren!

7.2.1 Satz

Falls $a_i \geq 0$ für alle i, so konvergiert $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ genau dann, wenn die Partialsummenfolge beschränkt ist.

Beweis: Aus $a_i \geq 0$ folgt $s_i \geq s_{i-1}$, also ist (s_n) monoton wachsend. Wir wissen bereits, dass für monotone Folgen gilt

$$s_n \text{ konvergent } \quad \Leftrightarrow \quad s_n \text{ beschränkt.}$$

Bemerkung: Die Konvergenz bzw. die Divergenz ändert sich nicht bei Änderung von endlich vielen Gliedern. (Die Summe ändert sich schon.)

Cauchy - Kriterium

Grundlegend für den Beweis der weiter unten folgenden, praktischen Kriterien ist folgende eher »theoretische« Aussage:

7.2.2 Satz

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } n_0 \text{, so dass für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ gilt:}$$

$$n > m \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon$$

Beweis: Es ist $s_n - s_m = a_{m+1} + \ldots + a_n$, also ist dies einfach die uns schon bekannte Aussage

$$(s_n) \text{ konvergiert } \quad \Leftrightarrow \quad (s_n) \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

□

Majoranten - Kriterium

7.2.3 Satz

Es gelte $|a_i| \leq b_i$ für alle i. Man sagt: (b_i) ist **Majorante** für (a_i).

Falls $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, und es gilt: $\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$

Bemerkung: Die Annahme impliziert $b_i \geq 0$ für alle i.

Bemerkung: Gilt die Annahme nur für $i \geq i_0$ für ein i_0, so gilt dieselbe Aussage, wenn man in der letzten Ungleichung die Summationen bei i_0 beginnen lässt.

Beweis: Wegen $|a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| \leq b_{m+1} + \ldots + b_n = |b_{m+1} + \ldots + b_n|$ folgt dies direkt aus dem Cauchy-Kriterium.

Für $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $t_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ ist analog $|s_n| \leq t_n$, also auch $|\lim\limits_{n\to\infty} s_n| \leq \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. □

Beispiel:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

Für $i \geq 2$ ist

$$\frac{1}{i^2} < \frac{1}{(i-1) \cdot i}$$

also

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right| \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots}_{=1} = 2\,.$$

Quotienten- und Wurzelkriterium

7.2.4 Satz (Quotientenkriterium)

Sei $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(1) Falls ein $q < 1$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $i \geq i_0$ gilt: $\dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \leq q$,

dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

(2) Falls ein $q > 1$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $i \geq i_0$ gilt: $\dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \geq q$,

dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Wichtig: Dasselbe q muss für alle $i \geq i_0$ funktionieren. Für Konvergenz genügt es nicht, dass $\dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} < 1$ gilt! (Siehe das Beispiel der harmonischen Reihe unten.)

Bemerkung: Das Kriterium für Konvergenz ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn gilt:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \text{ existiert und ist } < 1 .$$

Das Kriterium für Divergenz ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn gilt:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|a_{i+1}|}{|a_i|} \text{ existiert und ist } > 1 .$$

Für den Fall $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = 1$ kann keine allgemeine Aussage über die Konvergenz getroffen werden!

Beispiele:

(1) Betrachte die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i!}$ $(i \in \mathbb{N})$. Wegen $\dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \dfrac{\left|\frac{1}{(i+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{i!}\right|} = \dfrac{1}{i+1}$ und $\lim_{i\to\infty} \dfrac{1}{i+1} = 0 < 1$

konvergiert die Reihe.

(2) Für die harmonische Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i}$ $(i \in \mathbb{N})$ ist $\dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \dfrac{i}{i+1}$ und $\lim_{i\to\infty} \dfrac{i}{i+1} = 1$.

Wir wissen, dass diese Reihe divergiert.

(3) Für die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2}$ $(i \in \mathbb{N})$ ist $\dfrac{|a_{i+1}|}{|a_i|} = \dfrac{i^2}{(i+1)^2}$ und $\lim_{i\to\infty} \dfrac{i^2}{(i+1)^2} = 1$.

Wir wissen, dass diese Reihe konvergiert.

7.2.5 Satz (Wurzelkriterium)

Sei $a_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(1) Falls ein $q < 1$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für $i \geq i_0$ gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \leq q$,

dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

(2) Falls ein $q > 1$ und ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für $i \geq i_0$ gilt: $\sqrt[i]{|a_i|} \geq q$,

dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Wichtig: Es reicht *nicht* zu zeigen: $\underset{n\geq n_0}{\forall} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Beispiel:
$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1$$

Wir wissen aber, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Bemerkung: Das Kriterium für Konvergenz ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn gilt:
$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} \text{ existiert und ist } < 1\,.$$
Das Kriterium für Divergenz ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn gilt:
$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} \text{ existiert und ist } > 1\,.$$
Für den Fall $\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = 1$ kann keine allgemeine Aussage über die Konvergenz getroffen werden!

Beispiele:

(1) Für die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} q^i \ (q \in \mathbb{R})$ ist
$$\sqrt[i]{|a_i|} = |q|\,,$$
und wir erhalten Konvergenz für $|q| < 1$ und Divergenz für $|q| > 1$. Der Fall $|q| = 1$ kann mittels des Wurzelkriteriums nicht entschieden werden. (Wir sahen aber oben direkt, dass die Reihe in diesem Fall divergiert.)

(2) Für die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^i}$ ist
$$\sqrt[i]{\left|\frac{1}{i^i}\right|} = \frac{1}{i} \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0\,,$$
damit konvergiert die Reihe.

Beweis (Wurzelkriterium 7.2.5): Wir beweisen nur die erste Hälfte, der Beweis für die andere Hälfte und für das Quotientenkriterium sind ähnlich. Es gilt
$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q \quad \Rightarrow \quad |a_n| \le q^n\,,$$
wegen $0 < q < 1$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, wegen des Majorantenkriteriums folgt, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.□

Alternierende Reihen

Beispiel: Frage: konvergiert die Reihe zu $a_i = \frac{(-1)^{i-1}}{i}$? $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

Das Majorantenkriterium ist nicht anwendbar, da $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ divergiert. Der folgende Satz zeigt, dass diese **»alternierende harmonische Reihe«** konvergiert.

Leibniz - Kriterium

7.2.6 Satz

Ist (b_n) eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe
$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\, b_i = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \ldots$$

Beweis: Behauptung: $s_2 \le s_4 \le s_6 \le \ldots \le s_5 \le s_3 \le s_1$.

(1) Sei zunächst n gerade. Sei $a_i = (-1)^{i-1} b_i$.

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= s_{n-2} + (-1)^{n-2} b_{n-1} + (-1)^{n-1} b_n \\ &\overset{n \text{ gerade}}{=} s_{n-2} + \underbrace{(b_{n-1} - b_n)}_{\geq 0 \text{ weil } b_n \leq b_{n-1}} \geq s_{n-2}\,. \end{aligned}$$

Also gilt für gerade n: $s_n \geq s_{n-2}$.

(2) Analog dazu ist der Beweis für ungerade n. Für diese gilt: $s_n \leq s_{n-2}$.

Außerdem gilt für gerade n: $s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + (-1)^{n-1} b_n = s_{n-1} - b_n \leq s_{n-1}$.

Es folgt also: $s_2, s_4, s_6, \ldots$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent.

Analog konvergiert $s_1, s_3, \ldots$: Sei $\quad s := \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} \qquad \widetilde{s} := \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1}$

Dann ist $s = \widetilde{s}$, denn $|s_n - s_{n-1}| = b_n$ mit $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

Bemerkung: $\lim \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = \log 2$ (natürlicher Logarithmus). Dies werden wir später zeigen.

Bemerkung (interessant): Es gibt berühmte ungelöste Probleme der Mathematik, die mit der Konvergenz (bzw. der Größe der Summe) unendlicher Reihen zu tun haben. Etwa besagt die Lindelöf-Vermutung (die eng mit der Riemannschen Vermutung von ca. 1860 verwandt ist – beide sind ungelöst):

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{c}{\exists}\ \underset{s\geq 1}{\forall}\ \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(s \cdot \log(n))\Big| < c \cdot s^{\varepsilon}\,,$$

d. h. der Wert dieser Reihe (deren Konvergenz nicht einmal ganz einfach zu zeigen ist) wächst (als Funktion von s) langsamer als jede positive Potenz von s, wenn s groß wird.

7.3 Absolute Konvergenz und Umordnung von Reihen

Bei endlichen Summen wissen wir, dass das Resultat nicht von der Reihenfolge der Summanden abhängt. Bei »unendlichen Summen«, also Reihen, ist dies nicht mehr so! Wir werden sehen, dass unter einer zusätzlichen Bedingung (absolute Konvergenz) auch für Reihen die Reihenfolge der Summanden irrelevant ist.

7.3.1 Definition

Die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt **absolut konvergent,** falls $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergent ist.

Beispiel: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Trotz dieses Beispiels ist folgendes ein oft nützliches hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Reihe.

7.3.2 Satz

Ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, dann ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert, also können wir das Majorantenkriterium mit $b_i = |a_i|$ anwenden. □

7.3.3 Definition

Ist $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so heißt $\boldsymbol{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}}$ **Umordnung** rearrangement der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

7.3.4 Satz

Falls $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent ist, so konvergiert jede Umordnung und die Summen sind gleich.

Beweis: Seien $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ und $s = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle n_0 so, dass

$$|s_n - s| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon .$$

Letzteres ist möglich, da die Summe auf der rechten Seite gerade die Differenz zwischen Summe und n_0-ter Partialsumme der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ ist, welche nach Annahme konvergiert.

Sei eine Umordnung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben, setze $t_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$.

Wähle n_1 mit $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n_1)\} \supset \{1, \dots, n_0\}$.

Bemerkung: Wieso ist dies möglich? Die Menge $\{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n_0)\}$ ist endlich, also existiert ein n_1 mit $\{1, \dots, n_1\} \supset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n_0)\}$, was äquivalent zur geforderten Inklusion ist.

Für $n \geq n_1$ besteht dann $t_n - s_{n_0}$ nur aus solchen Summanden a_i, für die $i > n_0$ ist, also folgt mittels der (endlichen) Dreiecksungleichung nach Hinzufügung der anderen Summanden $|a_i|$ mit $i > n_0$

$$|t_n - s_{n_0}| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon .$$

Damit folgt für $n \geq n_1$

$$\begin{aligned} |t_n - s| &= |t_n - s_{n_0} + s_{n_0} - s| \\ &\leq |t_n - s_{n_0}| + |s_{n_0} - s| < 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Also konvergiert $t_n \to s$, was zu zeigen war. □

Folgender Satz zeigt, was alles passieren kann, wenn eine Reihe zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

7.3.5 Satz

Falls $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert, so existiert eine divergente Umordnung.

Außerdem existiert für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung π mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} = c$.

Beweis: Für eine Beweisskizze siehe zum Beispiel Behrends' Buch. □

7.4 Doppelreihen, Cauchy-Produkt

Ein wichtiger Fall von Umordnungen tritt bei sogenannten Doppelreihen auf.

Seien Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir ordnen diese in einem Schema (»unendliche Matrix«) an:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

7.4.1 Satz (Doppelreihensatz)

Seien $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}$.
Angenommen es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum\limits_{(i,j)\in M} |a_{ij}| \leq K$ für jedes endliche $M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Dann gilt:

(1) Jede Zeilensumme $z_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ konvergiert.

(2) Jede Spaltensumme $s_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ konvergiert.

(3) Die Reihen $\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i$ konvergieren und haben dieselbe Summe, nennen wir sie S.

(4) Falls $c_1, c_2, c_3, \ldots$ eine beliebige Aufzählung aller a_{ij} ist, so konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ mit derselben Summe S.

Man schreibt:
$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = S$$

Bemerkung: Die Bedingung im Doppelreihensatz ist eine Umformulierung der absoluten Konvergenz, die auf keine bestimmte Anordnung bezug nimmt. Es gilt nämlich (Übung!): Für eine Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ sind äquivalent:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ist absolut konvergent.

(2) Es gibt ein $K \in \mathbb{R}$, so dass $\sum\limits_{i\in M} |b_i| \leq K$ für alle endlichen $M \subseteq \mathbb{N}$.

Beweis: Dass die Summe in (4) existiert und unabhängig von der Wahl der Aufzählung ist, folgt mittels der Bemerkung aus dem Umordnungssatz. Sei S diese Summe.
Sei $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die Aufzählung »entlang Quadraten«, d. h. erst kommt a_{11} dran, dann die restlichen Einträge des oberen linken 2×2-Quadrats (in beliebiger Reihenfolge), dann die restlichen Einträge des oberen linken 3×3-Quadrats, etc.
Die absolute Konvergenz und damit die Konvergenz jeder Zeilesumme und jeder Spaltensumme folgt daraus, dass dies Teilfolgen der absolut konvergenten Folge (c_k) sind.
Wir zeigen nun, dass $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i = S$ gilt. Sei $Q_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i,j \leq n\}$ das obere linke $n \times n$-Quadrat und $q_n = \sum\limits_{(i,j)\in Q_n} a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n^2} c_k$ die n-te »linke obere Quadratsumme«. Dann gilt offenbar
$$\left|q_n - \sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \sum_{(i,j)\notin Q_n} |a_{ij}| = \sum_{k=n^2+1}^{\infty} |c_k|\,.$$
Da (c_k) absolut konvergiert, strebt die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null. Außerdem strebt q_n für $n \to \infty$ gegen S. Daraus folgt, dass $\sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i = S$. Analog zeigt man, dass die Summe der Spaltensummen gleich S ist. □

Ein wichtiger Spezialfall des Doppelreihensatzes ergibt sich, wenn man zwei Reihen multipliziert:

7.4.2 Satz (Cauchy-Produkt)

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ und $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$ seien absolut konvergent.

Setze $d_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i c_{n-i}$, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ absolut und es gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j\right)$

Bemerkung: Die Motivation für die Definition der d_n ergibt sich aus der Multiplikation von Polynomen: Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad k und $q(x)$ ein Polynom vom Grad l.

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k$$
$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_l x^l$$

Die Multiplikation $p(x) \cdot q(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_k x^k\right) \cdot \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_l x^l\right) \\ &= \left(b_0 c_0 + b_0 c_1 x + b_0 c_2 x^2 + \ldots + b_0 c_l x^l\right) + \left(b_1 c_0 x + b_1 c_1 x^2 + b_1 c_2 x^3 + \ldots + b_1 c_l x^{l+1}\right) \\ &\quad + \ldots + \left(b_k c_0 x^k + b_k c_1 x^{k+1} + b_k c_2 x^{k+2} + \ldots + b_k c_l x^{k+l}\right) \\ &= b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0)\, x + (b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0)\, x^2 + \ldots + b_k c_l x^{k+l} \\ &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_{k+l} x^{k+l}, \end{aligned}$$

wobei $d_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \cdot c_{n-i}$ ist (wenn man die endlichen Folgen $b_0, \ldots b_k$ und $c_0, \ldots, c_l$ zu unendlichen Folgen fortsetzt, indem man $b_i = 0$ für $i > k$ und $c_j = 0$ für $j > l$ setzt).

Beweis: Es gilt:

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{\infty} c_j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\Big) \cdot c_j\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (b_i \cdot c_j)}_{\text{Spaltensumme}}$$

Denn nach den Rechenregeln für Reihen können wir den Faktor $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ in die Summe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j$ hineinziehen und dann für jedes j den Faktor c_j in die Summe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ hineinziehen.

Die Behauptung ist nun ein Spezialfall des Doppelreihensatzes, mit $a_{ij} = b_i \cdot c_j$. Denn zählt man die a_{ij} »nach Diagonalen« auf (ähnlich zum Beweis der Abzählbarkeit einer abzählbaren Vereinigung abzählbarer Mengen):

$$\begin{array}{cccccccccc} a_{00} & \to & a_{01} & & a_{02} & \to & a_{03} & & a_{04} & \cdots \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\ a_{10} & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\ a_{20} & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\ & \swarrow & & & & & & & & \\ a_{30} & & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$

So entsteht die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ gerade dadurch, dass man in dieser Aufzählung den ersten Term d_0 nennt, die nächsten drei Terme (die zweite Diagonale) zu d_1 zusammenfasst etc.

Es bleibt noch die Bedingung im Doppelreihensatz nachzuprüfen, also: Es gibt ein K so, dass für alle endlichen $M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum\limits_{(i,j) \in M} |b_i c_j| \leq K$.

Dies ist okay, denn $\sum\limits_{i,j \in M} |b_i c_j| \leq \sum\limits_{i=0}^{n_0} |b_i| \cdot \sum\limits_{j=0}^{n_0} |c_j| \leq K$ mit $K = \Big(\sum\limits_{i=0}^{\infty} |b_i|\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j|\Big)$ und n_0 so groß, dass $M \subset \{0, \ldots, n_0\} \times \{0, \ldots, n_0\}$. Wichtig: K ist unabhängig von n_0, also von M. □

7.5 Potenzreihen

Eine wichtige Methode, Funktionen zu definieren und zu untersuchen, ist mittels Potenzreihen.

7.5.1 Definition

Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, wobei $c_i \in \mathbb{R}$ für alle i.

Wir wollen eine Potenzreihe als Funktion von $x \in \mathbb{R}$ auffassen. Dafür müssen wir zunächst wissen, für welche Werte x sie überhaupt konvergiert. Der erste Schritt in dieser Richtung ist:

7.5.2 Lemma

Falls die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ für $x = x_0$ konvergiert, so konvergiert sie auch für alle x mit $|x| < |x_0|$, und zwar absolut.

Beweis: Sei $x_0 \neq 0$, sonst ist nichts zu zeigen. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x_0^i$ konvergiert, also $c_i (x_0)^i \xrightarrow{i\to\infty} 0$.

Daher ist die Folge $(c_i x_0^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt, also existiert ein K, so dass für alle i gilt: $|c_i (x_0)^i| \leq K$.

Wir schreiben nun

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x_0)^i \left(\frac{x}{x_0}\right)^i$$

Benutze das Majorantenkriterium: Es gilt

$$|c_i (x_0)^i| \leq K\left|\frac{x}{x_0}\right|^i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} K\left|\frac{x}{x_0}\right|^i \quad \text{konvergiert, da} \quad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1\,.$$

□

7.5.3 Definition

Der **Konvergenzradius** R von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ ist $R := \sup\{x \geq 0 : \sum\limits_{i=0}^{\infty} |c_i x^i| \text{ konvergiert}\}$.

7.5.4 Satz

Hat die Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ den Konvergenzradius R, dann gilt:

(1) Für $|x| < R$ konvergiert die Reihe absolut.

(2) Für $|x| > R$ divergiert die Reihe.

(3) Für $|x| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Wie immer bedeutet »keine allgemeine Aussage möglich«, dass man sich hier etwas anderes einfallen lassen muss, um die Konvergenz bzw. Divergenz zu überprüfen.

Beweis:

(1) Sei $|x| < R$, dann existiert x_0 mit $0 < x_0 < R$ und $|x| < x_0$. Nach Definition von R konvergiert die Reihe für x_0. Verwende nun Lemma 7.5.2.

(2) Sei $|x| > R$. Angenommen, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ konvergiert, so würde nach Lemma 7.5.2 folgen: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i y^i$ ist absolut konvergent für alle y mit $|y| < |x|$.

Wähle y mit $R < y < |x|$, dann folgt ein Widerspruch zur Definition von R.

□

Beispiele:

(1) Was ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ (alle $c_i = 1$)?

Wir wissen bereits: Für $|x| < 1$ konvergiert die Reihe absolut und für $|x| > 1$ divergiert sie.

Daraus folgt: $R = 1$.

(2) Die Exponentialreihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Wir benutzen das Quotientenkriterium: $a_i = \frac{x^i}{i!}$, also

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{\frac{x^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{x^i}{i!}} = \frac{x}{i+1}.$$

Es gilt $\lim_{i\to\infty} \frac{x}{i+1} = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Also folgt: Exponentialreihe konvergiert absolut für beliebige x, also ist der Konvergenzradius $R = \infty$.

(3) Betrachte die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} i!x^i$. Mit dem Quotientenkriterium folgt

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{(i+1)! \cdot x^{i+1}}{i! \cdot x^i} = (i+1)\,x.$$

Es ist $|\,(i+1)\,x| > 2$ für $i > \frac{2}{|x|}$, also ist die Reihe tatsächlich divergent für alle $x \neq 0$.

7.5.5 Satz

Der Konvergenzradius R von $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ ist $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|}}$

Hierbei sei festgesetzt:

(i) $\frac{1}{0} := \infty$

(ii) $\frac{1}{\infty} := 0$

(iii) $\limsup\limits_{i\to\infty}$ (einer nach oben unbeschränkten Folge) $= \infty$

Die Festsetzung in (i) darf *nicht* in anderen Kontexten (z. B. Grenzwertregeln) verwendet werden!

Bemerkung:

▷ Falls der Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|}$ existiert, ist er gleich dem $\limsup\limits_{i\to\infty}$, also $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|}}$.

▷ In manchen Fällen ist die Formel des Satzes nicht besonders nützlich, da der $\limsup$ nur schwer zu berechnen ist. Dies trifft zum Beispiel für die Exponentialreihe zu. In diesem Fall muss man anders vorgehen, um R zu bestimmen (s. oben für die Exponentialreihe).

Beispiele:

(1) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2}$ hat den Konvergenzradius $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\frac{1}{i^2}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\frac{1}{i^2}}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

In diesem Fall konvergiert die Reihe für $x = R$ und für $x = -R$.

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$ hat auch den Konvergenzradius $R = 1$, sie divergiert aber für $x = R$ und konvergiert für $x = -R$, wie wir sahen.

(2) Für die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i$ ist der Konvergenzradius $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{2^i}} = \dfrac{1}{2}.$

Beweis (Satz 7.5.5): Falls $|x| < \dfrac{1}{\limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|}}$, dann folgt $q_0 := \limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i x^i|} = |x| \cdot \limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|} < 1.$

Wählt man nun ein q mit $q_0 < q < 1$, so folgt aus der Definition von $\limsup$, dass es ein i_0 gibt, so dass für $i \geq i_0$ gilt:

$$\sqrt[i]{|c_i x^i|} \leq q$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$.

Die Divergenz für $|x| > \dfrac{1}{\limsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|c_i|}}$ zeigt man ähnlich. □

8 Die Exponentialfunktion

8.1 Grundlegende Eigenschaften

8.1.1 Definition

Die **Exponentialfunktion** exponential function ist definiert als **exp :** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{exp}(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Wie wir sahen, konvergiert diese Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$. Dass dies wirklich etwas mit »Exponenten« zu tun hat, also dass es eine Zahl $e \in \mathbb{R}$ gibt mit $\exp(x) = e^x$ für alle x, ist von der Definition her kaum zu glauben. Genau genommen macht diese Behauptung auch keinen Sinn, denn wir haben die Potenz bisher nur für *rationale* Exponenten definiert! Wir werden also so vorgehen:

(1) Wir zeigen $\exp(x) = e^x$ für eine gewisse Zahl e, für rationales x.

(2) Wir *definieren* $e^x := \exp(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Wegen (1) ist diese Definition mit der schon bekannten (für $x \in \mathbb{Q}$) konsistent.

(3) Für andere Basen $a > 0$ definieren wir dann a^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$ mittels eines Tricks über den Logarithmus mittels e^x. Auch hier ist die Konsistenz mit der bisherigen Definition nachzuprüfen.

Schritt (2) und (3) werden wir in einem machen.

8.1.2 Definition

Die **Eulersche Zahl** ist definiert als

$$\boldsymbol{e} := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Es gilt: $e \approx 2{,}71828$.

8.1.3 Satz

(1) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(2) $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Beweis:

(1) Nach der Definition der Exponentialfunktion gilt $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$,

wobei

$$d_n = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} n! \cdot \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} \qquad \text{(Cauchyprodukt)}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

Also folgt

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

(2) Dies ergibt sich aus dem nachfolgenden Lemma im Fall $c = 1$. □

8.1.4 Lemma

Falls $x \in \mathbb{Q}$ und $c \in \mathbb{R}$ sind, gilt: $\exp(x \cdot c) = (\exp(c))^x$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung zunächst für natürliche Zahlen x, dann allgemeiner für rationale Zahlen x.

(1) Sei $x \in \mathbb{N}_0$. Mit Satz 8.1.3(1) erkennt man, dass

$$\begin{aligned} &\exp(2 \cdot c) = \exp(c) \cdot \exp(c) = \exp(c)^2 \quad \text{und} \\ &\exp(3 \cdot c) = \exp(2 \cdot c) \cdot \exp(c) = \exp(c)^2 \cdot \exp(c) = \exp(c)^3 . \end{aligned}$$

Es liegt also nahe, die Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion zu zeigen:

Induktionsanfang ($x = 0$): $\exp(0 \cdot c) = \exp 0 = 1 = (\exp(c))^0$ ist klar.

Induktionsschritt ($x \rightsquigarrow x+1$): $\exp((x+1) \cdot c) = \exp(x \cdot c + c) = \exp(x \cdot c) \cdot \exp(c) = \exp(c)^x \cdot \exp(c) = \exp(c)^{x+1}$.

(2) Sei $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Nach (1) gilt mit $d \in \mathbb{R}$:

$$\exp(q \cdot d) = \exp(d)^q$$

Mit $d := \frac{p}{q} \cdot c$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \exp(d)^q &= \exp\left(\frac{p}{q} \cdot c\right)^q = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot c\right) = \exp(p \cdot c) = \exp(c)^p \\ &\xRightarrow{q\text{-te Wurzel}} \exp\left(\frac{p}{q} \cdot c\right) = \exp(c)^{\frac{p}{q}} . \end{aligned}$$

(3) Sei $x = -\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$.

Aufgrund von Schritt 2 ist $1 = \exp(0) = \exp(xc)\exp(-xc) = \exp(xc)(\exp(c))^{\frac{p}{q}}$.

Also folgt $\exp(xc) = (\exp(c))^{-\frac{p}{q}}$. □

Bemerkung: Zur Beweistechnik: Warum war es geschickter, die allgemeinere Aussage des Lemmas als den Spezialfall im Satz 8.1.3(2) zu beweisen (abgesehen davon, dass die allgemeinere Aussage an sich von Interesse ist)?

Der erste Schritt im Beweis wäre für $c = 1$ genauso verlaufen. Aber beim zweiten Schritt verwenden wir das Ergebnis des ersten Schrittes in der allgemeineren Form. Hätte man den ersten Schritt nur für $c = 1$ formuliert, wäre dieser Schluss nicht möglich gewesen.

Das Additionsgesetz für die Exponentialfunktion, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, hat interessante Konsequenzen. Zum Beispiel ist Teil (2) des folgenden Satzes aus der Definition von $\exp(x)$ als Reihe kaum zu erkennen.

8.1.5 Satz

(1) $\exp(0) = 1$.

(2) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) exp ist streng monoton wachsend, d. h. $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

(5) Die Abbildung $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ ist bijektiv.

Beweis:

(1) Per Definition über die Reihe ist $\exp(0) = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$.

(2) Offensichtlich ist $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots > 0$ für $x \geq 0$.

Sei nun $x < 0$. Dann ist $-x > 0$ und nach obigem also auch $\exp(-x) > 0$. Aus $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$ folgt $\exp(x) > 0$.

(3) Sei $x < y$. Dann ist $\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(y - x)}_{>1 \text{ wenn } y>x} > \exp(x)$.

(4) Für $x > 0$ gilt: $\exp(x) > 1 + x$. Außerdem gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} 1 + x = \infty$ also $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Für $x < 0$ setze $z := -x$, dann ist $\exp(x) = \frac{1}{\exp z} \to 0$, da $\lim\limits_{z\to\infty} \exp(z) = \infty$.

(Genau genommen werden Grenzwerte von Funktionen erst später eingeführt. Aber was diese Aussagen bedeuten, sollte wohl klar sein.)

(5) Hier verwenden wir einige Ergebnisse über stetige Funktionen im Vorgriff:

exp ist stetig, also gilt der Zwischenwertsatz (siehe Satz 10.3.1).

Surjektivität: Sei $y > 0$. Wegen (4) gibt es ein x_0 mit $\exp(x_0) < y$ und ein x_1 mit $\exp(x_1) > y$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein x mit $\exp(x) = y$.

Injektivität: Diese folgt direkt aus der strengen Monotonie. □

8.1.6 Definition

Wir definieren den **Logarithmus** logarithm **log :** $(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ als die Umkehrfunktion von exp, d. h.:

$$\log(y) = x \;:\Leftrightarrow\; \exp(x) = y \text{ für } y > 0$$

Man nennt log auch den »natürlichen Logarithmus« oder Logarithmus zur Basis e. Manchmal wird statt log die Bezeichnung **ln** verwendet. In der Mathematik ist die Bezeichnung log am weitesten verbreitet.

8.1.7 Satz

Der Logarithmus (log) hat folgende Eigenschaften:

(1) $\log(1) = 0$

(2) log ist streng monoton wachsend.

(3) $\lim\limits_{y\to\infty} \log(y) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \log(y) = -\infty$

(4) $\log(y_1 \cdot y_2) = \log(y_1) + \log(y_2)$

Beweis: Die Behauptungen folgen alle direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion, z. B. (4): Es gilt

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)\,.$$

Einsetzen von $a := \log y_1$ und $b := \log y_2$ ergibt:

$$\exp(\log y_1 + \log y_2) = y_1 \cdot y_2$$
$$\Longrightarrow \log y_1 + \log y_2 = \log(y_1 \cdot y_2)\,.$$
□

8.1.8 Definition

Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $\boldsymbol{a^x} := \exp(x \cdot \log a)$

Dies ist konsistent mit der mit früheren Definition 5.1.10, denn wegen Lemma 8.1.4 gilt für $x \in \mathbb{Q}$

$$\exp(x \cdot \log a) = (\exp(\log a))^x = a^x\,.$$

8.1.9 Satz

Die Rechenregeln für Potenzen in Satz 5.1.11 gelten weiterhin für die allgemeine Potenz.

Vielleicht erscheint unsere Definition der allgemeinen Potenz etwas künstlich oder willkürlich. Wäre es nicht viel natürlicher gewesen, die allgemeine Potenz wie folgt zu definieren?

8.1.10 Alternativ-Definition

Sei $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge *rationaler* Zahlen mit $x_n \to x \;\; (n \to \infty)$.
Dann ist a^{x_n} für jedes x_n schon definiert.
Setze nun:

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$$

Dies wäre in der Tat möglich. Man müsste nun einiges nachprüfen: Dass der Grenzwert a^{x_n} überhaupt existiert, dass er unabhängig ist von der Wahl der approximierenden Folge (x_n), und schließlich, dass die Potenzgesetze gelten. Das könnten Sie ja einmal als Übung versuchen!

Übrigens folgt die Eigenschaft der Alternativ-Definition für »unsere« Potenzfunktion direkt aus der Stetigkeit von log und exp.

8.2 Anhang: $e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und Folgerungen

Hier wird die Identität $e = \lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ bewiesen sowie eine Reihe interessanter Folgerungen daraus hergeleitet.

8.2.1 Satz

Sei $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e \tag{8.1}$$

$(x_n)_n$ ist streng monoton wachsend, $(y_n)_n$ ist streng monoton fallend. Insbesondere gilt f. a. n:

$$x_n < e < y_n$$

Bemerkung: Unsere Definition von e ist

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\,. \tag{8.2}$$

In manchen Büchern wird e mittels (8.1) definiert und dann (8.2) bewiesen.

Beweis: Dies folgt durch »scharfes Ansehen« der binomischen Formel:

(8.3) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Denn
$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$
$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n},$$
also

(8.4) $$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Hält man k fest und lässt $n \to \infty$, so folgt

(8.5) $$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \longrightarrow \frac{1}{k!}$$

wodurch (8.1) mittels (8.2) zumindest plausibel wird. Für ein genaues Argument muss man nur etwas aufpassen, da k in (8.3) nicht »fest« ist, sondern bis n läuft.

Was uns rettet ist die Tatsache, dass die Terme mit »großem« k sehr »klein« sind. Genauer: Aus (8.4) folgt zunächst:

(8.6) $$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Konvergenz der Reihe (8.2) gibt es ein k_0 mit

(8.7) $$e - \sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{k!} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon\,.$$

Wegen (8.5) gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein
$$n_0(k) \ge k \quad \text{mit} \quad \left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right| < \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad \text{für} \quad n \ge n_0(k)\,.$$

Setzt man nun $n_0 := \max\{n_0(1), n_0(2), \ldots, n_0(k_0)\}$, so folgt mittels der Dreiecksungleichung
$$\left|\sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{k_0}} < 2\varepsilon \qquad \text{für} \quad n \ge n_0\,.$$
(Beachte $n_0 \ge k_0$.)
Nun können wir die Differenz $e - x_n$ abschätzen: Für $n \ge n_0$ ist
$$|e - x_n| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right|$$
$$\le \left|\sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{k_0} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right| + \left|\sum_{k=k_0+1}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right|$$
$$< 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon\,.$$

(Eigentlich sind alle Terme positiv, daher könnte man die Betragsstriche auch weglassen; bei der Verallgemeinerung (8.8), (8.9), siehe unten, braucht man sie aber.) Dass der letzte Term in Betragsstrichen kleiner als ε ist, folgt direkt aus (8.7) und (8.6). Damit ist die Konvergenz $x_n \to e$ bewiesen.

Aus $\frac{y_n}{x_n} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$ folgt dann sofort auch
$$\lim_{n\to\infty} y_n = e\,.$$
Die Monotonie der x_n liest man direkt aus (8.3) und (8.4) ab, denn wegen $1 - \frac{j}{n+1} \geq 1 - \frac{j}{n}$ für $j \geq 0$ ist
$$\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \geq \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$
also
$$x_{n+1} - x_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0\,.$$
Dass die y_n monoton fallen, ist mittels einer analogen Rechnung (binomische Formel etc.) kaum einzusehen, folgt aber zum Beispiel so:
$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$
und $\frac{n^2}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n^2}$, also mittels der binomischen Formel (Weglassen der Terme $k \geq 2$):
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n\cdot\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$
woraus $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$, also $y_n < y_{n-1}$ folgt. □

Bemerkung: Derselbe Beweis, mutatis mutandis (d. h. man macht an »offensichtlichen« Stellen »offensichtliche« Änderungen), liefert

(8.8)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ (und sogar $x \in \mathbb{C}$), und allgemeiner

(8.9)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x)$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ (siehe Sektion 8.1 in Königsberger' Analysis I).

Gleichung (8.9) kann man zum Beispiel verwenden, um einen einfachen Beweis des Additionsgesetzes für die Exponentialfunktion zu erhalten: Für $x, y \in \mathbb{C}$ ist
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{xy}{n^2} = 1 + \frac{z_n}{n}$$
mit $z_n = x + y + \frac{xy}{n} \longrightarrow x + y \;\; (n \to \infty)$, also folgt aus (8.9)
$$\begin{aligned}\exp(x)\cdot\exp(y) &= \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \\ &= \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]^n \\ &= \lim\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(x+y)\,.\end{aligned}$$

Folgerungen

Der Satz bzw. die Verallgemeinerungen (8.8) und (8.9) haben eine Reihe hübscher Anwendungen, zum Beispiel:

▷ kontinuierliche Verzinsung führt zur Exponentialfunktion (siehe Königsberger, S. 110)

▷ gute Abschätzungen für die Fakultät

$$e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \tag{8.10}$$

▷ die Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots = \log 2 \tag{8.11}$$

▷ eine gute Annäherung dafür, wie »schnell« die harmonische Reihe divergiert, nämlich logarithmisch:

$$\log(N+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} < (\log N) + 1 \tag{8.12}$$

Beweis (8.10): Das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1}$ vereinfacht sich teleskopartig: Schreibe $x_j = \left(\frac{j+1}{j}\right)^j$, dann

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n-1} &= \left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2^1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{3^3} \cdots \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} \cdot n^{n-1} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \cdot n^{n-1} = \frac{n^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Wegen $x_j < e$ für alle j folgt daraus $\frac{n^n}{n!} < e^{n-1}$, also $n! > e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Die andere Ungleichung beweist man nun analog mittels $y_1 \cdot y_2 \cdots y_n$. □

Bemerkung: Die obere und untere Schranke in (8.10) liegen um den Faktor

$$\frac{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \approx n+1$$

auseinander. Die (viel schwieriger zu zerlegende) Stirlingsche Formel besagt, dass die Wahrheit ziemlich genau in der Mitte (im Sinn des geometrischen Mittels) liegt:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \quad (n \to \infty)\,.$$

Beweis (8.11): Wir verwenden eine ähnliche Teleskopidee, außer dass wir in den Ungleichungen

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

erst die n-te Wurzel ziehen:

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1} \tag{8.13}$$

Schreiben wir dies für $n = N, N+1, \ldots, M$ (für beliebige $N < M$) und multiplizieren diese Ungleichungen, so folgt nach dem Kürzen:

$$\frac{M+1}{N} < e^{\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{M}} < \frac{M}{N-1}$$

Was nützt das? Nimmt man etwa $M = 2N$ und lässt $N \to \infty$, so streben die obere und die untere Schranke gegen 2, also folgt

$$\lim_{N\to\infty} e^{\frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{2N}} = 2\,,$$

bzw. durch Logarithmieren (log ist stetig!)

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{2N}\right) = \log 2\,.$$

Was hat das mit (8.11) zu tun? Folgender kleiner Trick zeigt dies. Die $(2n)$-te Partialsumme der Reihe (8.11) ist

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&\quad=\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\Big)-2\cdot\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\Big)\\
&\quad=\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}\Big)-\Big(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\Big)\\
&\quad=\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Dies ist gleich $\left(\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\frac{1}{n}$, und da der Ausdruck in Klammern gegen $\log 2$ und $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt, folgt (8.11). □

Bemerkung: Die Konvergenz der »ungeraden« Partialsummen (gegen denselben Grenzwert) folgt direkt aus der Konvergenz der geraden Partialsummen, da die Folgenglieder gegen Null gehen.

Beweis (8.12): Schreiben wir zur Abkürzung

$$\boldsymbol{H_N}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}.$$

Die H_N heißen die **harmonischen Zahlen.** Wir schreiben die linke Ungleichung in (8.13) für $n=1,\dots,N$ hin und multiplizieren. Das ergibt nach Kürzen

$$N+1<e^{H_N},$$

also nach Logarithmieren die linke Ungleichung in (8.12). Schreiben wir die rechte Ungleichung in (8.13) für $n=2,\dots N$ hin und multiplizieren, so folgt

$$N<e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}}=e^{H_N-1},$$

also die rechte Ungleichung in (8.12). □

Bemerkung: Die obere und untere Schranke in (8.12) unterscheiden sich um weniger als 1. Da $\log n\to\infty$ für $n\to\infty$, wird der relative Fehler in der Approximation $H_n\approx\log n$ für große n immer kleiner. Mit etwas mehr Hilfsmitteln (z. B. der Euler-MacLaurin-Summationsformel) kann man zeigen, dass, mit einer kleinen Korrektur, sogar der absolute Fehler gegen Null geht: Der Grenzwert

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}(H_n-\log n)$$

existiert und heißt **Euler-Mascheroni-Konstante,** $\gamma=0{,}577\dots$. Es ist bis heute unbekannt, ob γ rational oder irrational ist! Die Konstante taucht in verschiedenen Kontexten auf, zum Beispiel

$$\gamma=\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx,$$

oder bei den wichtigsten speziellen Funktionen, etwa

$$\gamma=-\Gamma'(1)=\lim_{s\to1}\Big(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\Big),$$

wobei $\boldsymbol{\Gamma}$ die **Gamma-Funktion** (Verallgemeinerung der Fakultät) und $\boldsymbol{\zeta(s)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ (für $s>1$) die **Riemannsche Zeta-Funktion** ist.

9 Komplexe Zahlen

9.1 Definitionen und wichtige Regeln

Wir führen die komplexen Zahlen geometrisch ein. Dies vermeidet von Anfang an Fragen wie: Ja, gibt es diese komplexen Zahlen, zum Beispiel diese Wurzel aus -1, denn überhaupt?

Wir werden dann sehen, dass man mit diesen »Zahlen« genauso rechnen kann wie üblich (d. h., dass sie einen Körper bilden), dies rechtfertigt dann vielleicht erst die Bezeichnung »Zahlen«.

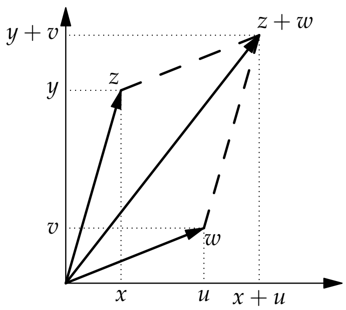
9.1.1 Definition

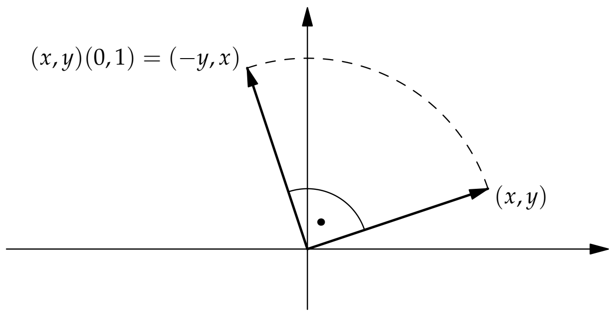
Der Körper der **komplexen Zahlen** complex numbers $\mathbb{C}$ sei wie folgt definiert:

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

Mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, definiert für $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ und $w = (u,v) \in \mathbb{C}$ durch:

$$z + w := (x + u\,,\, y + v)$$
$$z \cdot w := (x \cdot u - y \cdot v\,,\, x \cdot v + y \cdot u)$$





Die Formel für die Berechnung von $z \cdot w$ sieht kompliziert und willkürlich aus. Sie ist aber durch folgende »einfache« Eigenschaften eindeutig festgelegt (Übung!):

1. $(x,y) \cdot (1,0) = (x,y)$.

2. $(x,y) \cdot (0,1) = (-y,x)$. Multiplikation mit $(0,1)$ entspricht $90°$-Rotation nach links.

3. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung $w \longmapsto z \cdot w$ $\mathbb{R}$**-linear,** d. h. es gilt für alle $w, w' \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$z \cdot (w + w') = z \cdot w + z \cdot w'$$
$$z \cdot (\lambda w) = \lambda (z \cdot w)$$
Hierbei ist λw die Skalarmultiplikation von λ mit w, d. h., falls w ein Paar (u,v) reeller Zahlen ist, so ist
$$\lambda w := (\lambda u, \lambda v)$$
(»Streckung« von w für $\lambda > 0$, bzw. Streckung und Punktspiegelung im Nullpunkt für $\lambda < 0$.)

Schreibweise:

▷ Statt $(x,0)$ schreibe einfach x, falls $x \in \mathbb{R}$. Hiermit fassen wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

- ▷ $\boldsymbol{i} := (0,1)$.
- ▷ Für $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ schreibe: $\textbf{Re}\, z := x$, $\textbf{Im}\, z := y$.

  Man nennt $\operatorname{Re} z$ den **Realteil** und $\operatorname{Im} z$ den **Imaginärteil** von z.

Bemerkung: Mit diesen Schreibweisen gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x,y) = x + iy$$

Beweis: $x + iy = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$.

Wenn immer wir im Folgenden $z = x + iy$ schreiben, nehmen wir stillschweigend an, dass x und y reell sind.

Der Hauptgrund für die Einführung der komplexen Zahlen ist, dass es eine »Wurzel aus -1« gibt. Es gibt sogar zwei:

9.1.2 Satz

$i^2 = -1$ und $(-i)^2 = -1$.

Beweis: $(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$ und
$(0,-1) \cdot (0,-1) = (0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1), 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0) = (-1,0)$. □

9.1.3 Satz

$\mathbb{C}$ ist mit $+, \cdot$ ein Körper.

Beweis: Die Körperaxiome sind leicht nachzuprüfen. Die neutralen Elemente sind $(0,0)$ für die Addition und $(1,0)$ für die Multiplikation. Der einzige schwierige Punkt ist, zu zeigen, dass es für jedes $z \neq 0$ ein w gibt, so dass $z \cdot w = 1$ gilt.
Wir geben hier einfach eine Formel für w an; wie man drauf kommt, sehen wir etwas später.

Sei $z = x + iy$. Setze

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\,.$$

Dann rechnet man sofort nach, dass $z \cdot w = 1$ gilt. □

Bemerkung:

- ▷ Man rechnet also mit komplexen Zahlen »ganz normal« (unter Verwendung des Distributivgesetzes), wobei man nur $i^2 = -1$ zu beachten hat, also

$$\begin{aligned}(x+iy)(u+iv) &= xu + iyu + xiv + iyiv = xu + izy + ixv + i^2 yv \\ &= (xu - yv) + i(yu + xv)\,.\end{aligned}$$

  Dies stimmt mit unserer Definition der komplexen Multiplikation überein. Wenn's anders wäre, hätten wir nämlich ein Problem...

- ▷ $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, genauer: Es gibt keine Relation ›$<$‹ auf $\mathbb{C}$, für die die Anordnungsaxiome (Axiome eines angeordneten Körpers) gelten. Denn wie wir gesehen hatten, folgt aus den Anordnungsaxiomen, dass $x^2 \geq 0$ für alle x gilt; außerdem gilt $1 > 0$, also $-1 < 0$. Da nun aber $i^2 = -1$ ist, kann es keine Anordnung geben!

- ▷ Zum Begriff »Wurzel«: Für positive reelle Zahlen x hatten wir $\sqrt{x}$ als die eindeutige *positive* reelle Zahl y definiert, für die $y^2 = x$ gilt. Kann man nun eine sinnvolle Definition für ›$\sqrt{-1}$‹ oder allgemeiner ›$\sqrt{z}$‹ geben, falls $z \in \mathbb{C}$? Was zeichnet i vor $-i$ aus? Hier gibt es keine ähnlich gute Antwort. Wir werden dies später (bei den Polarkoordinaten) nochmal aufgreifen.

9.1.4 Definition

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$.

(1) $\overline{z} := x - iy$ ist das **komplex Konjugierte** complex conjugate von z.

(2) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der **Betrag** absolute value von z.

Die folgenden Rechenregeln sollte man gut beherrschen.

9.1.5 Lemma

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(1) $\overline{(\overline{z})} = z$

(2) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(4) $z = \overline{z} \iff z$ ist reell, d. h. $z = x + i \cdot 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

(5) $|z| = |\overline{z}|$

(6) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(7) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ (Dreiecksungleichung)

Beweis: Einfach nachrechnen. □

Mit 9.1.5(2) können wir die Formel für z^{-1} nun auch besser verstehen. Dies ist ein wichtiger Rechentrick. Um $\dfrac{1}{x+iy}$ zu berechnen, erweitere mit $x - iy$!

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)\cdot(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Vieles, was wir für reelle Zahlen kennengelernt haben, funktioniert auch für komplexe Zahlen. Aber nicht alles (nämlich nichts, was mit der Anordnung zu tun hat)! Insbesondere das, was aus den Körperaxiomen gefolgert wurde, gilt auch weiterhin, zum Beispiel die binomische Formel:
Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k}$$

Bemerkung: Die harmlos aussehende Formel $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ hat eine interessante Konsequenz. Quadriert man sie und schreibt $z = x + iy$, $w = u + iv$, so besagt sie

$$(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)\,.$$

Sind x, y, u, v ganze Zahlen, so kann man dies folgendermaßen lesen:

> Das Produkt zweier Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lassen, läßt sich wieder als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

Zum Beispiel ist $65 = 5 \times 13$ und $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, und man erhält die weniger offensichtliche Darstellung $65 = 4^2 + 7^2$.

Die Frage, welche Zahlen n sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lassen, ist nicht leicht zu beantworten. Etwa für $n = 11$ geht es nicht. Die Antwort, ausgedrückt durch die Primfaktorzerlegung von n, lautet: Es geht genau dann, wenn jeder Primfaktor der Form $4k + 1$ in gerader Potenz auftritt.

9.2 Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Für die Konvergenzbetrachtungen bei Folgen reeller Zahlen war nur wichtig, dass wir einen Abstandsbegriff hatten, der die Dreiecksungleichung erfüllt. Da wir auch auf $\mathbb{C}$ einen Abstandsbegriff haben (der Abstand von $z, w \in \mathbb{C}$ ist $|z-w|$), können wir vieles sofort von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragen. Zum Beispiel die Definition von Konvergenz:

9.2.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq n_0}{\forall} \; |a_n - a| < \varepsilon$$

Nicht definiert ist die Eigenschaft der Monotonie für Folgen im Komplexen.

Die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}$ lässt sich leicht auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ reduzieren:

9.2.2 Satz

Seien $z, z_n \in \mathbb{C}$ mit $z_n = x_n + iy_n$ und $z = x + iy$ $(x_n, y_n\,,\, x, y \in \mathbb{R})$, dann gilt:

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \;\text{ und }\; y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$$

Beweis: Für $w \in \mathbb{C}$ gilt $|w| = \sqrt{(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2} \leq 2 \cdot \max\{|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w|\}$.

Mit $w := z_n - z$ ergibt das ›$\Longleftarrow$‹, denn

$$\operatorname{Re}(z_n - z) = x_n - x$$
$$\operatorname{Im}(z_n - z) = y_n - y\,,$$

so dass aus $|x_n - x| < \varepsilon$ und $|y_n - y| < \varepsilon$ sofort $|z_n - z| < 2\varepsilon$ folgt. Außerdem gilt

$$|\operatorname{Re} w| \leq |w|$$
$$|\operatorname{Im} w| \leq |w|\,.$$

Das ergibt ›$\Longrightarrow$‹. □

9.2.3 Definition

Cauchy-Folgen, sowie Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen definiert man für komplexe Zahlen genauso wie für reelle Zahlen.

Bemerkung: Etwas subtiler ist die Frage, was »**bestimmte Divergenz**« (also $z_n \to \infty$) für eine Folge komplexer Zahlen bedeuten soll, denn bei der Definition wurde die Ordnungsrelation ›$<$‹ verwendet. Standardmäßig definiert man

$$z_n \to \infty \quad :\Longleftrightarrow \quad |z_n| \to \infty$$

Man beachte aber, dass etwa für die Folge $z_n = -n$ im reellen Sinne $z_n \to -\infty$ gilt, während im gerade eingeführten komplexen Sinne $z_n \to \infty$ gilt. Daher ist hier Vorsicht geboten. Auch die Rechenregeln für Limites in den »**erweiterten komplexen Zahlen**« $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muss man neu überdenken (Übung!).

9.2.4 Satz

Die Rechenregeln für Folgen und Reihen, das Cauchy-, das Majoranten-, das Quotienten- und das Wurzelkriterium gelten auch für komplexe Zahlen; ebenso die Sätze über absolute Konvergenz und Umordnungen.

Zum Beweis erinnern wir uns, dass alle diese Sätze darauf beruhten, dass Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren. Dies gilt analog in $\mathbb{C}$:

9.2.5 Satz

Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ konvergieren.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 9.2.2 und dem entsprechenden Satz für reelle Zahlen. □

Beim Majorantenkriterium ist nur zu beachten, dass die Majorante immer eine Folge (nicht-negativer) *reeller* Zahlen ist. Denn die Bedingung $|a_n| \leq b_n$ macht nur für reelle Zahlen b_n Sinn.

Die Aussage von Satz 9.2.5 nennt man auch die **Vollständigkeit der komplexen Zahlen.** Erinnerung: Für $\mathbb{R}$ ist der Satz über die Konvergenz von Cauchy-Folgen äquivalent zum Vollständigkeits- (oder Supremums-)Axiom, d. h. nähme man die Konvergenz von Cauchy-Folgen als Axiom zu den Körper- und Anordnungsaxiomen hinzu, so könnte man daraus die Aussage des Supremumsaxiom herleiten.

9.3 Komplexe Potenzreihen

Wir können Potenzreihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ betrachten, wobei $c_n \in \mathbb{C}$ für alle n und $z \in \mathbb{C}$ ist. Lemma 7.5.2 gilt weiterhin (mit $x, x_0 \in \mathbb{C}$), und der **Konvergenzradius** ist genauso definiert:

$$\boldsymbol{R} := \sup\left\{x > 0 \colon \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n \text{ konvergiert}\right\}$$

Die Reihe konvergiert dann wieder absolut für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$, und wiederum kann man für $|z| = R$ nichts Allgemeines sagen. Beachte aber, dass es nun unendlich viele Punkte z mit $|z| = R$ gibt (falls $0 < R < \infty$), also gibt es hier sehr viele Möglichkeiten.

Übrigens heißt die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ **Konvergenzkreis.** Dies ist wirklich ein Kreis (falls $0 < R < \infty$), und dies ist der Grund für den Namen »Konvergenzradius«. Die **Exponentialfunktion** ist damit auch für komplexe Zahlen definiert:

$$\mathbf{exp}(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \text{ für alle } z \in \mathbb{C},$$

und das Additionsgesetz $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$ (mit demselben Beweis wie in $\mathbb{R}$).

Damit ist auch a^z für $a > 0$ $(a \in \mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$ definiert:

$$\boldsymbol{a^z} := \exp(z \cdot \log a)$$

Bemerkung: Die Frage, ob man die Potenz auch mit komplexer Basis a definieren kann, wird erst in Analysis IV behandelt. Hier nur soviel: Ist der Exponent $z \in \mathbb{Z}$, so ist es kein Problem. Ist aber $z \notin \mathbb{Z}$, so ist $a \mapsto a^z$ $(a \in \mathbb{C})$ eine mehrwertige Funktion (d. h. jedem a sind mehrere »Funktionswerte« zugeordnet: Für $z \in \mathbb{Q}$ endlich viele, sonst unendlich viele).

Es gibt noch viel Interessantes zu den komplexen Zahlen zu sagen, zum Beispiel ist

$$e^{i\pi} = -1,$$

aber davon später mehr.

10 Stetigkeit

10.1 Definition und elementare Eigenschaften

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. D heißt Definitionsbereich von f.

Der Begriff der Stetigkeit soll die Idee ausdrücken, dass die Funktion keinen Sprung macht. Dies kann man für den ganzen Definitionsbereich fordern oder nur für einen einzelnen Punkt $x_0 \in D$:

> f ist stetig in x_0 bedeutet:
>
> Wenn sich x der Zahl x_0 annähert, so nähert sich der Funktionswert $f(x)$ der Zahl $f(x_0)$ an.

Eine unmittelbare Umsetzung dieser Idee ist mittels Folgen möglich:

10.1.1 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

(1) f heißt **stetig in x_0** continuous, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Sonst heißt f **unstetig in x_0** discontinuous.

(2) f heißt **stetig auf D,** wenn f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Beispiele:

(1) Sei $f(x) = x$ und $D = \mathbb{R}$, dann gilt: f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,,$$

da $f(x_n) = x_n$ und $f(x_0) = x_0$.

(2) Sei $f(x) = x^2$ und $D = \mathbb{R}$, dann gilt: f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, denn nach den Regeln über Folgengrenzwerte gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x_0^2 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

(3) Sei $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$ und $D = \mathbb{R}$. Dann ist H nicht stetig in $x_0 = 0$, denn mit $x_n = -\dfrac{1}{n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0\,, \text{ aber } H(x_n) = 0 \nrightarrow 1 = H(x_0)\,.$$

H ist stetig in allen Punkten $x_0 \neq 0$. Dies folgt aus dem nachfolgendem Lemma, wobei man für $x_0 < 0$ als Vergleichsfunktion $g \equiv 0$ und $\delta = |x_0|$ wählt und für $x_0 > 0$ als Vergleichsfunktion $g \equiv 1$, sowie $\delta = x_0$.

H heißt manchmal **Heaviside-Funktion.**

Für $c \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\boldsymbol{g \equiv c}$ hierbei die **konstante Funktion,** $g(x) = c$ für alle x.

10.1.2 Lemma

Stetigkeit ist eine *lokale* Eigenschaft. Das heißt: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, $x_0 \in D$ und es gebe ein $\delta > 0$ so, dass gilt

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta .$$

Falls dann g in x_0 stetig ist, so ist auch f in x_0 stetig.

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$. Das heißt, dass es ein n_0 gibt, so dass für $n \geq n_0$ gilt: $|x_n - x_0| < \delta$, also $f(x_n) = g(x_n)$. Wegen der Stetigkeit von g in x_0 gilt $g(x_n) \to g(x_0)$. Da $f(x_n) = g(x_n)$ für $n \geq n_0$ gilt, folgt $f(x_n) \to g(x_0) = f(x_0)$. Also ist f stetig in x_0. □

Bemerkung: In der Definition der Stetigkeit ist wesentlich, dass die Bedingung für *alle* Folgen (x_n) erfüllt ist. Im dritten Beispiel erfüllt die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ durchaus die Bedingung, dass $x_n \to 0$ und $H(x_n) \to H(0)$ gilt. Das reicht aber eben nicht; H ist unstetig in 0.

Beispiel: Hier noch ein etwas abstruseres Beispiel, das zeigt, dass man nicht alles durch Zeichnungen veranschaulichen kann:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: f ist überall unstetig. Beweis:

(1) Sei $x_0 \notin \mathbb{Q}$, also $f(x_0) = 1$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0 \neq 1$.

Wieso existiert die Folge (x_n)? Weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Genauer: Nach Satz 5.1.7 existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$. Dann gilt offenbar $x_n \to x_0$.

(2) Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \notin \mathbb{Q}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1 \neq 0$.

Wieso existiert die Folge (x_n)? Übung!

Für die Stetigkeit gelten einige einfache »Rechenregeln«, die leicht aus den entsprechenden Grenzwertregeln folgen:

10.1.3 Satz

Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetige Funktionen. Dann gilt:

(1) $f + g$ und $f \cdot g$ sind stetig in x_0.

(2) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ ist, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ stetig in x_0.

Weiterhin sind die konstanten Funktionen und die Funktion f mit $f(x) = x$ f. a. $x \in D$ stetig.

Bemerkung: Hierbei ist natürlich $f + g : D \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, und analog für $f \cdot g$ und $\dfrac{f}{g}$.

Die konstanten Funktionen sind die Funktionen der Form $f(x) = c$ für alle x, für ein festes (von x unabhängiges) $c \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung bei (2) wirkt vielleicht unnatürlich: Für die Stetigkeit von $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 sollte es reichen, dass g nur im Punkt x_0 nicht verschwindet. Wir werden dies später etwas genauer untersuchen (Satz 10.1.7).

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Die Stetigkeit von f und g in x_0 bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)\,,$$

und mit den Grenzwertregeln (Satz 6.2.3) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \big[f(x_n) + g(x_n)\big] = f(x_0) + g(x_0)$. Also ist $f+g$ stetig. Die Stetigkeit von $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ folgt analog.

Die Stetigkeit der konstanten Funktionen ist klar, die von $f(x) = x$ wurde oben nachgeprüft. □

Beispiel: Alle Polynome sind stetig. Denn beginnend mit $f(x) = x$ und den Konstanten kann man jedes Polynom durch wiederholtes Multiplizieren und Addieren erhalten. (Formal: Beweis durch Induktion über den Grad.)

Wir brauchen noch eine weitere Regel, die »zusammengesetzte« Funktionen betrifft, also die Komposition von Funktionen:

10.1.4 Satz (Komposition)

Seien $D, D' \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D'$. Sei $x_0 \in D$. Dann gilt:

Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Zur Erinnerung: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ (sprich »g nach f«).

Beweis: Zu zeigen: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$x_n \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad (g\circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$$

Sei also (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$. Da f stetig in x_0 ist, folgt $f(x_n) \to f(x_0)$. Da g stetig in $f(x_0)$ ist, folgt weiter $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. □

Beispiele:

(1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig (Übung).

(2) Wir wissen: Jedes Polynom ist stetig. Also ist $x \mapsto |p(x)|$ stetig, falls p ein Polynom ist.

(3) Wir werden außerdem sehen, dass $\exp$ stetig ist. Also ist auch $x \mapsto e^{x^2}$ stetig.

(4) Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die im Beispiel (3) nach Definition 10.1.1 definierte Heaviside-Funktion. Dann ist $x \mapsto H(x^2 - 1)$ stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, da für diese gilt: $x^2 - 1 \neq 0$.

Für viele Zwecke ist folgende äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit nützlich. In vielen Büchern wird sie als Definition von Stetigkeit verwendet.

10.1.5 Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

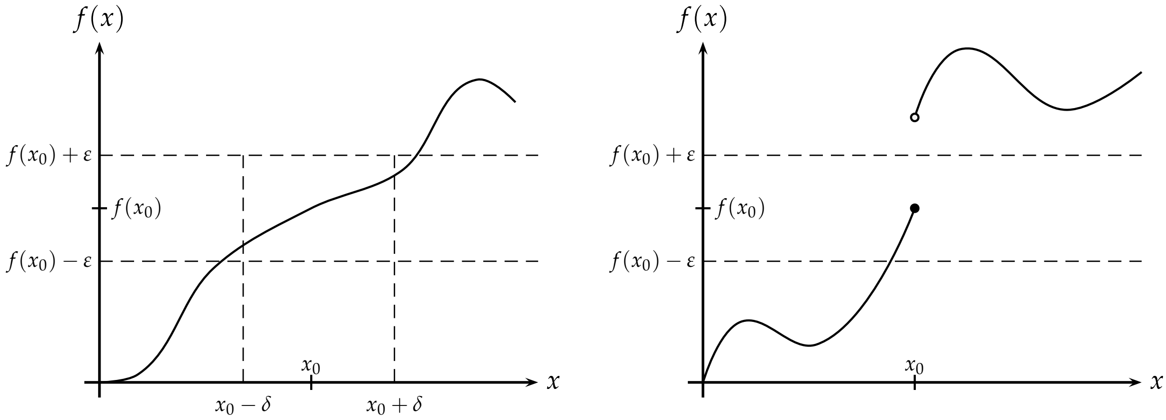
Beispiele:

(1) $f(x) = 10x$. Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 = 0$. Wir brauchen ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$|x - 0| < \delta \overset{!}{\Longrightarrow} |f(x) - f(0)| < \varepsilon\,, \text{ das heißt}$$

$$|x| < \delta \overset{!}{\Longrightarrow} |f(x)| < \varepsilon$$

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$, dann ist $|x| < \frac{\varepsilon}{10} \Longrightarrow |10x| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$.



(a) Es existiert eine δ-Umgebung, so dass für alle x aus der δ-Umgebung alle $f(x)$ innerhalb der ε-Umgebung liegen.

(b) Es kann keine entsprechende δ-Umgebung existieren.

Abbildung 10.1. Stetigkeit mit ε-δ-Charakterisierung

(2) Nochmal Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geq 0\,. \end{cases}$

Prüfen wir die Unstetigkeit in $x_0 = 0$ mittels der ε-δ-Charakterisierung nach. Zu zeigen:

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\substack{x\in D\\ |x-x_0|<\delta}}{\exists}\ |H(x)-H(x_0)| \geq \varepsilon$$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Zu $\delta > 0$ wähle $x = -\frac{\delta}{2}$. Dann ist $|x| < \delta$, aber $|H(x) - H(0)| = |0-1| = 1 \geq \varepsilon$!

Beweis (Satz 10.1.5): Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Wir müssen die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen nachweisen:

A: Mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

B: $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall}$ mit $|x-x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(1) $B \Longrightarrow A$:
Sei $\varepsilon > 0, x_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und δ wie in B. Wähle δ wie in B. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq n_0$. Wegen B mit $x = x_n$ folgt, dass für $n \geq n_0$ $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Somit ergibt sich: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(2) $A \Longrightarrow B$ (indirekter Beweis): Angenommen, B gilt nicht. Das heißt:

$$\underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x\in D}{\exists} \text{ mit } |x-x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

Wähle ein solches ε. Wende dies an auf $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,3,4,5,\ldots$. Nenne x_n das erhaltene x. Dann gilt: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für alle n, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

Also gilt A nicht. Als Kontraposition ist somit $A \Longrightarrow B$ gezeigt. □

In vielen Zusammenhängen ist folgende Beobachtung nützlich:

10.1.6 Lemma

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
Falls $f(x_0) > a$ ist, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $f(x) > a$.

Diesen Beweis sollten Sie nicht einfach nur lesen, sondern erst selbst versuchen zu machen! Es gibt viele andere Arten, dieselbe Idee aufzuschreiben, aber richtig verstehen wird man sie nur, wenn man selbst darüber nachgedacht hat.

Beweis: Wähle $\varepsilon = f(x_0) - a$. Wegen der Stetigkeit von f folgt: Es gibt ein $\delta > 0$ so, dass gilt:

$$x \in D\,, |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Für diese x ist dann insbesondere $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$, also

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = a\,.$$

□

Bemerkung: Aus dem Lemma folgt sofort: Falls $f(x_0) \neq 0$ und f in x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq 0$ für $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Damit können wir die Bedingung an den Nenner in Satz 10.1.3(2) abschwächen:

10.1.7 Satz

Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

(1) Es existiert $\delta > 0$ so, dass $\dfrac{f}{g}$ zumindest auf $D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) =: D'$ definiert ist.

(2) $\dfrac{f}{g} \colon D' \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in x_0.

Beispiele:

(1) $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $\dfrac{1}{x} \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

(2) Allgemeiner: Sind p, q Polynome, dann ist $\dfrac{p}{q}$ stetig auf $\{x : q(x) \neq 0\}$ (rationale Funktion).

10.2 Grenzwerte von Funktionen

Mit der Stetigkeit eng verwandt ist die Betrachtung des Grenzwertes des Funktionswertes $f(x)$, wenn sich x an eine Zahl x_0 annähert. Es ist jedoch nützlich, hier auch solche x_0 zuzulassen, die nicht im Definitionsbereich von f liegen.

Wenigstens sollte aber D an x_0 »angrenzen«. Dies wird durch den folgenden Begriff präzisiert.

10.2.1 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** accumulation point von D, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ existiert: $\quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in D}{\exists}\ 0 < |x - x_0| < \varepsilon$

Zu beachten: x_0 muss hierbei nicht in D liegen!

Beispiele:

(1) Jedes $x_0 \in [0, 1]$ ist Häufungspunkt von $(0, 1)$ und es gibt keine weiteren.

(2) $\mathbb{Z}$ hat keinen Häufungspunkt.

(3) Sei $D = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

$x_0 = 0$ ist der einzige Häufungspunkt. Sobald $x_0 > 0$ ist, gilt: Ab einem bestimmten n_0 ($n \geq n_0$) sind die $\frac{1}{n} < \frac{x_0}{2}$, wähle dann $\varepsilon = \frac{x_0}{2}$. Es gilt dann nämlich für alle $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n} < \frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} - x_0 < -\frac{x_0}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0 - \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - x_0 \right| > \frac{x_0}{2} = \varepsilon$$

(4) Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist ganz $\mathbb{R}$.

Bemerkung: *Vorsicht!* Es gilt *nicht*, dass x_0 Häufungspunkt der *Menge* $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ist, falls x_0 Häufungspunkt der *Folge* (x_n) ist.

So hat beispielsweise die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n$ die Häufungspunkte 1 und -1, jedoch ist die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{(-1)^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ gleich der endlichen Menge $\{-1, 1\}$ und hat damit keine Häufungspunkte.

Die Begriffe ›Häufungspunkt einer Menge‹ und ›Häufungspunkt einer Folge‹ sind also nicht in derselben Weise analog zueinander wie die Begriffe ›Beschränktheit einer Menge‹ und ›Beschränktheit einer Folge‹. In manchen Büchern wird daher bei Folgen von Häufungswerten gesprochen, nicht von Häufungspunkten.

10.2.2 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D und außerdem $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow$$

Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \Rightarrow f(x_n) \to a \ (n \to \infty)$$

Schreibweise: Zur Verdeutlichung schreibt man auch: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = a$.

Eine andere Schreibweise ist: $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x_0 = 1$ und $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ für alle $x \in D$, dann gilt:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

Bemerkung:

▷ Warum werden in der Definition nur Folgen (x_n) zugelassen, für die $x_n \neq x_0$ für *alle* n gilt? Ich habe keine gute Antwort. Das ist Konvention.

> **Bemerkung:** Die Konvention rührt vielleicht daher, dass man hauptsächlich an dem Fall interessiert ist, wo f in x_0 nicht definiert ist, also $x_0 \notin D$. Dies will man aber nicht jedesmal hinschreiben müssen, daher schreibt man statt $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}}$ einfacher $\lim\limits_{x \to x_0}$, wobei dies dann eben die Bedeutung mit $x \neq x_0$ haben soll.

▷ Warum definieren wir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nur, wenn x_0 Häufungspunkt von D ist? Hierauf gibt es eine gute Antwort (wenn wir einmal akzeptieren, dass wir nur Folgen mit $x_n \neq x_0$ zulassen):

Wäre nämlich x_0 kein Häufungspunkt von D, so wäre die Bedingung in der Definition des Grenzwertes leer,

Bemerkung: Denn dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $\{x \in D : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = \emptyset$, daher gäbe es keine Folge (x_n) in D mit $x_n \neq x_0$ für alle n, die gegen x_0 konvergiert.

also würde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ für *jedes* a gelten und somit hätte das Symbol $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ keine wohldefinierte Bedeutung.

10.2.3 Definition (Einseitige Grenzwerte)

Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

(1) Angenommen, x_0 ist Häufungspunkt von $D^+ := \{x \in D : x > x_0\}$. Falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} f(x) = a$$

existiert, heißt a **rechtsseitiger Grenzwert** right-hand limit von f bei x_0.

(2) Angenommen, x_0 ist Häufungspunkt von $D^- := \{x \in D : x < x_0\}$. Falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^-}} f(x) = a$$

existiert, heißt a **linksseitiger Grenzwert** left-hand limit von f bei x_0.

Man schreibt auch $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ für den rechts- und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ für den linksseitigen Grenzwert.

10.2.4 Lemma

Für $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, x_0 Häufungspunkt von D^+ und auch von D^-, $a \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = a$$

$$\iff$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert von f existieren in x_0 und sind gleich a.

Beweis: Übung. □

Dies ist besonders bei stückweise definierten Funktionen nützlich:

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$, dann ist $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.
Wegen $0 \neq 1$ existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht.

Die enge Beziehung zur Stetigkeit kann wie folgt formuliert werden:

10.2.5 Satz

Mit $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ gilt:

(1) Falls x_0 Häufungspunkt von D ist, folgt: f stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) Falls x_0 *nicht* Häufungspunkt von D ist, so ist f stetig in x_0.

Ein Punkt $x_0 \in D$, der nicht Häufungspunkt von D ist, heißt **isolierter Punkt** von D. In isolierten Punkten ist also jede Funktion stetig!

Beweis: Übung. □

Genau wie bei Grenzwerten von Folgen und bei der Stetigkeit hat man die folgenden Regeln:

10.2.6 Satz

Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$. Die Rechenregeln für die Limites von $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ gelten analog zu den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen, also zum Beispiel:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = a+b$$

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus der Definition und den entsprechenden Regeln für Folgen. □

Wir betrachten nun die wichtigen Fälle, wo x_0 oder a in der Definition des Grenzwertes auch $\pm\infty$ sein darf. Da wir für Folgen (x_n) einen Begriff davon haben was $x_n \to \infty$ bedeutet, ist es einfach, eine sinnvolle Definition hierfür zu finden:

10.2.7 Definition (Uneigentliche Grenzwerte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$.

(1) ∞ $(-\infty)$ heißt Häufungspunkt von D, falls D nach oben (unten) unbeschränkt ist.

(2) Sei $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt von D und $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dann definieren wir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ genauso wie in Definition 10.2.2.

Natürlich gibt es (für $x_0 \in \mathbb{R}$) auch entsprechende einseitige Grenzwerte. Die Rechenregeln gelten weiterhin auch für uneigentliche Grenzwerte, solange die resultierenden Operationen erlaubt sind.

Beispiele:

(1) Sei $f(x) = \frac{1}{x}$, definiert auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Bemerkung: Wir haben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ mittels Folgen definiert. Ähnlich zu Satz 10.1.5 lässt sich auch hier eine äquivalente ε-δ-Charakterisierung angeben, falls x_0 und a reelle Zahlen sind (also nicht $\pm\infty$).

Ähnliche Charakterisierungen lassen sich auch im uneigentlichen Fall geben. Zum Beispiel gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$: Falls x_0 Häufungspunkt von D ist, so ist

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

Für alle $N \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

Aus $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in D$ folgt $f(x) > N$.

Die Details überlasse ich Ihnen als Übung. Der Vorteil der Folgendefinition ist, dass sie im eigentlichen und im uneigentlichen Fall genau gleich aussieht. Ich finde sie auch sehr intuitiv.

10.3 Eigenschaften stetiger Funktionen: Zwischenwertsatz, Maximum und Minimum, inverse Funktionen

Wir werden hier einige Eigenschaften stetiger Funktionen beweisen, die ziemlich offensichtlich erscheinen, aber trotzdem nicht ganz einfach zu beweisen sind. Sie sind fundamental für die ganze Mathematik.

10.3.1 Satz (Zwischenwertsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und γ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (inklusive). Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.

Dass γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (inklusive) liegt, soll natürlich bedeuten:

Falls $f(a) < f(b)$, so sei $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$, und falls $f(a) \geq f(b)$, so sei $f(a) \geq \gamma \geq f(b)$, oder etwas kürzer:

$$\gamma \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$$

Beweis: Sei $f(a) > f(b)$, der andere Fall lässt sich analog beweisen (oder auf diesen zurückführen, indem man statt f die Funktion $g = -f$ betrachtet).
Sei $M = \{x : f(x) \geq \gamma\}$. Setze $c = \sup M$. $\sup M$ existiert nach dem Supremumsaxiom, denn:

1. $M \neq \emptyset$, denn $f(a) \geq \gamma$, d.h. $a \in M$.
2. M ist durch b nach oben beschränkt.

Behauptung: $f(c) = \gamma$. Beweis:

1. Wegen $c = \sup M$ gibt es $x_1, x_2, x_3, \ldots \in M$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} c$ (denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $c - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für M, also existiert ein $x_n \in M$ mit $c - \frac{1}{n} \leq x_n \leq c$).
2. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \to f(c)$.
3. Wegen $x_n \in M$ gilt $f(x_n) \geq \gamma$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $f(c) \geq \gamma$.
4. Angenommen, es wäre $f(x) > \gamma$. Weil f stetig ist, würde dann $\delta > 0$ existieren, so dass $f(x) > \gamma$ für alle x mit $|x - c| < \delta$ (siehe Lemma 10.1.6). Also wäre $f(c + \frac{\delta}{2}) > \gamma$, also $c + \frac{\delta}{2} \in M$ und somit $c \neq \sup M$. Dies ist aber ein Widerspruch. Somit war die Annahme $f(c) > \gamma$ falsch und es folgt $f(c) = \gamma$. □

Beispiel: Behauptung: $x^5 + x + 1 = 0$ hat eine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $f(x) = x^5 + x + 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt: $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$. Da f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $c \in [-1, 0]$ gibt mit $f(c) = 0$.

Allgemein gilt:

10.3.2 Satz

Jedes Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = a_g x^g + a_{g-1} x^{g-1} + \ldots + a_0$ mit g ungerade und $a_g > 0$ (der Fall $a_g < 0$ geht analog) ein Polynom g-ten Grades. Dann ist

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty .$$

Vergleiche Lemma 6.4.3. Der exakte Beweis hierfür ist: Schreibe zunächst

$$p(x) = x^g (a_g + a_{g-1} x^{-1} + \ldots + a_0 x^{-g}) .$$

Für $x \to \pm\infty$ konvergieren alle Summanden in der Klammer außer dem ersten gegen Null. Damit konvergiert die Klammer gegen a_g, und da x^g für $x \to \infty$ gegen ∞ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ strebt (da g ungerade ist), folgt die Behauptung.

Also gibt es ein x_0 mit $p(x_0) > 0$ und ein x_1 mit $p(x_1) < 0$, und der Zwischenwertsatz liefert die Behauptung. □

Die Behauptung des Satzes ist falsch, falls der Grad des Polynoms gerade ist. Zum Beispiel hat $p(x) = x^g + 1$ keine Nullstelle für gerades g.

Eine weitere hübsche Anwendung des Zwischenwertsatzes ist folgender Fixpunktsatz:

10.3.3 Satz

Falls $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion ist, gibt es ein $c \in [0,1]$ mit $f(c) = c$.

Solch ein c heißt **Fixpunkt** von f, eben weil es unter f auf sich selbst abgebildet wird.

Beweis: Setze $g(x) = f(x) - x$. Dann ist $g(0) = f(0) \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Da f stetig ist, ist auch g stetig, also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein c mit $g(c) = 0$, also $f(c) = c$. □

Bemerkung: Ein analoger Satz gilt auch in höheren Dimensionen (Brouwerscher Fixpunktsatz). Zum Beispiel hat jede stetige Abbildung $[0,1]^2 \to [0,1]^2$ einen Fixpunkt, wobei $[0,1]^2$ das Einheitsquadrat in der Ebene ist. Das ist aber viel schwieriger zu beweisen. Versuchen Sie, sich davon ein Bild zu machen!

Einer der wichtigsten Sätze der Mathematik ist der folgende:

10.3.4 Satz (Satz vom Maximum und Minimum)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann gibt es $m, M \in [a,b]$ so, dass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M)$$

Bemerkung: $f(m)$ heißt **Minimum** von f, $f(M)$ heißt **Maximum** von f.
Alle Bedingungen im Satz sind wesentlich:

- ▷ $[a,b]$ ist ein *abgeschlossenes* Intervall: Z. B. hat $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ kein solches m oder M.
- ▷ f ist *stetig*: Zum Beispiel hat $f(x) = [x]$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kein Maximum (f ist unstetig bei $x = 1$).

Beweis: Sei $N := \{f(x) : x \in [a,b]\}$, und setze $s := \sup N$ falls N nach oben beschränkt ist, sonst $s = \infty$.

1. Es existiert dann eine Folge (y_n) in N mit $y_n \to s$ $(n \to \infty)$. Nach Definition von N gibt es für jedes n ein $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) = y_n$, also gilt $f(x_n) \to s$. Außerdem hat (x_n) nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge (x_{n_i}).
2. Sei $M = \lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}$. Es gilt $M \in [a,b]$, weil das Intervall $[a,b]$ abgeschlossen ist. Da f stetig in M ist, folgt $f(x_{n_i}) \xrightarrow{i\to\infty} f(M)$. Da mit $f(x_n) \to s$ auch für die Teilfolge $f(x_{n_i}) \to s$ gilt, folgt $s = f(M)$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes.
3. Die Definition von s sagt nun, dass $f(M) \geq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ ist. Also ist M ein Maximum von f.

Die Existenz des Minimums zeigt man analog. □

Oft braucht man nur eine unmittelbare Folgerung des Satzes:

10.3.5 Korollar

Eine stetige Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall ist beschränkt.

Auch hier ist wesentlich, dass das Intervall abgeschlossen ist, so ist zum Beispiel unbeschränkt:

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

10.3.6 Satz

Falls $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion ist, dann ist $I' = f(I)$ $(:= \{f(x) : x \in I\})$ ein Intervall, $f : I \to I'$ ist bijektiv und die Umkehrung $f^{-1} : I' \to I$ ist streng monoton und stetig.

Man beachte, dass sowohl I als auch I' beschränkt oder unbeschränkt sein dürfen.

Beispiele:

(1) Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Hier ist $I = (0,1]$, $I' = [1,\infty)$ und $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$. Dieses Beispiel zeigt, dass I' unbeschränkt sein kann, selbst wenn I beschränkt ist.

(2) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

f ist streng monoton und stetig, und $I' = [0,\infty)$, da $f(0) = 0$, $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ und $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$. Also ist $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert und stetig. Die übliche Bezeichnung ist $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Dies zeigt die Existenz n-ter Wurzeln positiver Zahlen.

Zum Beweis des Satzes macht man sich am Besten erst eine charakteristische Eigenschaft der Intervalle klar:

10.3.7 Lemma

Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn gilt:

$$\text{Für alle } x_0, x_1 \in I \text{ mit } x_0 \leq x_1 \text{ ist } [x_0, x_1] \subset I.$$

Beweis: Das sollte intuitiv ziemlich klar sein. Formal kann man ›$\Rightarrow$‹ durch Nachprüfen der einzelnen Fälle $I = (a,b)$, $I = (a,b]$ etc. mit Hilfe der Transitivität von ›$\leq$‹ zeigen, und ›$\Leftarrow$‹ mittels Unterscheidung der Fälle: I nach oben/unten beschränkt oder unbeschränkt; zum Beispiel im beidseitig beschränkten Falle setzt man dann $a := \inf I$, $b := \sup I$, unterscheidet die Fälle $a \in I$, $a \notin I$ (und analog für b) und zeigt dann beispielsweise im Fall $a \in I$, $b \notin I$ leicht $I = [a,b)$. □

Bemerkung: Intuitiv sind die Intervalle die »zusammenhängenden« Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zum Beispiel ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kein Intervall und hat zwei zusammenhängende Teile.

In höheren Semestern wird ein entsprechender Begriff zusammenhängender Teilmengen im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, definiert. Die Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes lautet dann:

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig, dann ist $f(A)$ zusammenhängend.

Sobald wir stetige Abbildungen in $\mathbb{R}^n$ definiert haben, was ganz analog zum Fall $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ geht.

Beweis (Satz 10.3.6): O. B. d. A. sei f streng monoton wachsend (sonst ersetze f durch $-f$).

1. I' ist Intervall:

   Sind $y_0, y_1 \in I'$, also etwa $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ mit o. B. d. A. $x_0 \leq x_1$, also $y_0 \leq y_1$, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz für jedes γ mit $y_0 \leq \gamma \leq y_1$ ein c mit $x_0 \leq c \leq x_1$ und $f(c) = \gamma$.

   Das heißt $f([x_0, x_1]) \supset [y_0, y_1]$. Da I Intervall ist, ist $[x_0, x_1] \subset I$, also

   $$I' = f(I) \supset [y_0, y_1]\,.$$

   Wir haben gezeigt, dass für beliebige $y_0, y_1 \in I'$ mit $y_0 \leq y_1$ gilt, dass $[y_0, y_1] \subset I'$. Nach dem Lemma ist I' also ein Intervall.

2. $f : I \longrightarrow I'$ injektiv:

   Falls $x \neq x'$ in I sind, so ist $\begin{array}{lcl} x > x' & \Rightarrow & f(x) > f(x') \\ x < x' & \Rightarrow & f(x) < f(x'), \end{array}$

   wegen der strengen Monotonie, also in jedem Fall $f(x) \neq f(x')$.

3. $f : I \longrightarrow I'$ surjektiv: So war I' gerade definiert!

4. $f^{-1} : I' \longrightarrow I$ streng monoton wachsend:

   Seien $y_0, y_1 \in I'$ mit $y_0 < y_1$, und sei $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, also
   $$y_0 = f(x_0)\ , \quad y_1 = f(x_1)\,.$$
   Wäre $x_0 \geq x_1$, so folgte $y_0 \geq y_1$ aus der Monotonie von f, im Widerspruch zur Annahme. Also folgt $x_0 < x_1$, d. h. $f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_1)$.

5. $f^{-1} : I' \longrightarrow I$ stetig:

   Sei $y_0 \in I'$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir arbeiten vom Ziel aus rückwärts. Wir müssen ein $\delta > 0$ derart finden, dass für alle $y \in I'$ mit $x = f^{-1}(y)$ gilt, dass $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$. Mit anderen Worten, $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \Rightarrow f^{-1}(y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, oder äquivalent $f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Da f bijektiv ist, ist dies äquivalent zu $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset f((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$. Dies sagt uns, wie wir δ zu wählen haben, und wir setzen den Beweis zusammen:

   Zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ setze $x_- = x_0 - \varepsilon$, $x_+ = x_0 + \varepsilon$, $y_- = f(x_-)$ und $y_+ = f(x_+)$. Aus Teil 1 des Beweises und der Bijektivität folgt leicht $[y_-, y_+] = f([x_-, x_+])$ und durch Weglassen der Endpunkte auch $(y_-, y_+) = f((x_-, x_+))$. Wegen $x_0 \in (x_-, x_+)$ folgt $y_0 = f(x_0) \in (y_-, y_+)$. Wählt man also $\delta = \min\{y_+ - y_0, y_0 - y_-\}$, so folgt $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_-, y_+) = f((x_-, x_+))$, was zu zeigen war.

   Bemerkung: Genau genommen haben wir hier angenommen, dass $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Falls x_0 kein Randpunkt von I ist, ist das unwesentlich, da man dann o. B. d. A. ε so klein annehmen kann, dass dies gilt. Ist dagegen x_0 ein Randpunkt von I, z. B. der rechte, so setzt man einfach $x_- = x_0 - \varepsilon$, erhält $(y_-, y_0] = f((x_-, x_0])$ und nimmt $\delta = y_0 - y_-$. □

10.4 Funktionenfolgen; gleichmäßige Konvergenz

Bisher haben wir nicht gezeigt, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Da sie durch eine Potenzreihe, also als Grenzwert von Polynomen (nämlich den Partialsummen der Reihe) definiert ist, liegt es nahe, erst einmal diese Frage zu beantworten:

> *Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gegen eine Funktion f konvergiert, ist dann f notwendigerweise stetig?*

Die Antwort lautet: Je nachdem. Je nachdem, was man genau mit »f_n konvergiert gegen f« meint.

Beispiele:

(1) Definiere die Funktionen f_n $(n \in \mathbb{N})$ und f auf dem Definitionsbereich $D = [0,1]$ wie folgt:
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
f_n ist stetig für jedes n, f ist unstetig bei 0. Für jedes $x > 0$ ist $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, denn wählt man $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n} < x$, so ist $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$. Außerdem ist $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $f_n(0) \to 1 = f(0)$.

Also gilt für jedes x, dass $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, alle f_n sind stetig, aber f ist unstetig!

(2) $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $f(x) = x$. Hier sind alle f_n und f stetig, und offenbar ist $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ für jedes x. Aber hier ist die Konvergenz »stärker«, in folgendem Sinne:

10.4.1 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f, f_n : D \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

f_n **konvergiert punktweise** converges pointwise gegen f, falls für jedes $x \in D$ gilt:

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

f_n **konvergiert gleichmäßig** converges uniformly gegen f, falls gilt:

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Bemerkung:

▷ Die punktweise Konvergenz lässt sich umformulieren als $f_n(x) - f(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für jedes $x \in D$, dann sieht man die Analogie und den Unterschied zur gleichmäßigen Konvergenz besser.

▷ Die gleichmäßige Konvergenz lässt sich auch so formulieren:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Man vergleiche dies mit der Definition der punktweisen Konvergenz:

Für jedes $x \in D$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Was ist der Unterschied? Bei der punktweisen Konvergenz darf n_0 von x abhängen, bei der gleichmäßigen Konvergenz nicht!

▷ Verwendet man Quantoren, so liegt der Unterschied »nur« in der Reihenfolge der Quantoren:

Gleichmäßige Konvergenz: $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ \underset{x\in D}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Punktweise Konvergenz: $\underset{x\in D}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

▷ Geometrisch bedeutet die gleichmäßige Konvergenz, dass (sehr lax formuliert) der Graph von f_n für alle genügend großen n in jedem beliebig schmalen Streifen um den Graphen von f liegt.

▷ Konvergiert $f_n \to f$ gleichmäßig, dann konvergiert $f_n \to f$ punktweise.

Beispiel: Auf $D = \mathbb{R}$ betrachte $f_n(x) = x^2 - \frac{x}{n}$, $f(x) = x^2$.
Dann gilt: $f_n \to f$ punktweise, aber nicht gleichmäßig. Aber: $f_n \to f$ gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall I.
Denn: Sei K derart, dass $|x| \leq K$ für alle $x \in I$. Dann gilt $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{K}{n} < \varepsilon$, falls $n > \frac{K}{\varepsilon}$, unabhängig von x.

10.4.2 Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f, f_n : D \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Falls alle f_n $(n \in \mathbb{N})$ stetig sind und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ gleichmäßig konvergiert, so ist f stetig.

Wir sahen oben, dass *punktweise* Konvergenz hier nicht ausreicht!

Beweis: Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben.

1. Wähle n_0 mit $\underset{x\in D}{\forall}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ (gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$).

2. Wähle $\delta > 0$ mit: $|x-x_0|<\delta,\ x\in D \ \Rightarrow\ \left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)\right|<\varepsilon$ (Stetigkeit von f_{n_0} in x_0).

Dann gilt für $|x-x_0|<\delta,\ x\in D$:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \underbrace{\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

Ein praktisches Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe ist das **Weierstrass-Kriterium:**

10.4.3 Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}$, und seien $g_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionen $(n \in \mathbb{N})$.

Angenommen, es gibt eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, für die gilt:

1. $|g_n(x)| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ gleichmäßig auf D.

Das heißt: Für jedes $x \in D$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) =: f(x)$, und die Folge der Partialsummen $f_n = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Insbesondere ist $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ stetig, falls die g_n stetig sind.

Beweis: Die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, für festes x, folgt aus dem Majorantenkriterium. Weiterhin gilt:

$$|f(x)-f_n(x)| = \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} g_i(x)\Big| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i$$

Die rechte Seite geht für $n \to \infty$ gegen Null, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert. Da die rechte Seite nicht von x abhängt, folgt die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$. □

Die wichtigste Anwendung ist:

10.4.4 Satz

Betrachte die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Sei R der Konvergenzradius. Sei $R > 0$.

(1) Sei $0 < r < R$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig auf $\{x : |x| \leq r\}$.

(2) Die Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist stetig für $|x| < R$.

Beweis:

(1) Wähle s mit $0 < r < s < R$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konvergiert, gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n s^n| \leq K$ für alle n.

Dann $|x| \leq r$, somit $|a_n x^n| \leq |a_n|\, r^n = |a_n|\, s^n \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq K \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^n =: c_n$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, weil $\left|\frac{r}{s}\right| < 1$. Also ist der Satz 10.4.3 anwendbar.

(2) Sei $|x| < R$. Wähle r mit $|x| < r < R$. Wegen (1) ist f auf dem Intervall $[-r, r]$ stetig, also insbesondere in x. □

11 Differentialrechnung

Hier lernen wir den Begriff der Ableitung (Differentialquotient) einer Funktion kennen. Nicht alle Funktionen haben eine Ableitung an jedem Punkt, daher führen wir gleichzeitig den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion ein. Dann werden wir einige Regeln zum Berechnen von Ableitungen herleiten. Zu den wichtigsten Anwendungen des Ableitungsbegriffs gehören:

- ▷ Das Auffinden lokaler Extrema mittels der Nullstellen der Ableitung.
- ▷ Die Charakterisierung von Monotonie und Konvexität einer Funktion mittels der Ableitung (diese Eigenschaften lassen sich dann zum Beispiel zum Beweis einiger fundamentaler Ungleichungen verwenden).
- ▷ Die Approximation von Funktionen mittels Polynomen (Taylorapproximation und Taylorreihe).

Daneben ist die zentrale Rolle der Ableitung durch ihre Bedeutung in den Anwendungen der Mathematik (zum Beispiel als Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, als Wachstumsgeschwindigkeit einer Population, als Wachstumsindikator für eine Ware oder ein Kapital) begründet.

11.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Geometrische Vorüberlegungen

Die **Steigung** einer Geraden in der x, y-Ebene ist definiert als

$$\frac{y - y_0}{x - x_0}$$

wobei (x, y) und (x_0, y_0) zwei beliebige Punkte auf der Geraden sind. Dass dieser Quotient unabhängig von der Wahl der beiden Punkte ist, ist eine charakteristische Eigenschaft von Geraden. Dies wird auch durch die »Geradengleichung« zum Ausdruck gebracht: Die Gerade mit der Steigung s durch den Punkt (x_0, y_0) ist die folgende Menge: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_0 + s\,(x - x_0)\}$

Sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $x_0 \in I$. Wir wollen die Ableitung von f in x_0 definieren. Geometrisch soll dies die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P = (x_0, y_0)$ sein.

Was ist eine Tangente? Die **Tangente** lässt sich auf zwei Arten charakterisieren:

1. Als die Gerade durch P, die den Graphen »nahe P« am Besten approximiert.
2. Als »Grenzwert« von Sekanten (durch P und $(x, f(x))$ für $x \to x_0$).

Wir verwenden die zweite Charakterisierung zur Definition der Ableitung.

11.1.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.
f heißt **differenzierbar in x_0** differentiable, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird dann als **Ableitung** derivative von f in x_0 bzw. $\boldsymbol{f'(x_0)}$ bezeichnet.

Bemerkung:

- ▷ Mit $h := x - x_0$ gilt: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
- ▷ Falls x_0 ein Randpunkt des Intervalls I ist, so ist der Grenzwert in der Definition als einseitiger Grenzwert zu verstehen (da x immer in I liegen muss).

Beispiele: In den Beispielen ist der Definitionsbereich immer $I = \mathbb{R}$.

(1) Sei $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} : f'(x_0) = 0\,.$$

(2) Sei $f(x) = ax$ wobei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0+h) - ax_0}{h} = \frac{ah}{h} = a \quad \Longrightarrow \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} : f'(x_0) = a\,.$$

(3) Sei $f(x) = x^2$, dann gilt: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2 - {x_0}^2}{h}$

$$= \frac{{x_0}^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow{h \to 0} 2x_0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} : f'(x_0) = 2x_0\,.$$

(4) Sei $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$, dann gilt: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0\,. \end{cases}$

Also folgt: $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 1$ und $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -1\,,$

und es folgt, dass der Grenzwert für $h \to 0$ nicht existiert, denn für $x_0 > 0$ ist der Grenzwert 1 und für $x_0 < 0$ ist er -1. Dies folgt aus dem folgenden Lemma (wobei man für $x_0 > 0$ die Vergleichsfunktion $g(x) = x$ und $\delta = x_0$ nimmt und für $x_0 < 0$ die Vergleichsfunktion $g(x) = -x$, $\delta = -x_0$).

Ähnlich wie für die Stetigkeit gilt:

11.1.2 Lemma

Differenzierbarkeit und der Wert der Ableitung sind *lokale* Eigenschaften. Das heißt:
Falls $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, und falls ein $\delta > 0$ existiert mit:

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\,,$$

dann gilt: f differenzierbar in $x_0 \Leftrightarrow g$ differenzierbar in x_0, und dann $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Beweis: Einfache Übung. □

Um zu einer äquivalenten Charakterisierung der Ableitung zu gelangen, die der ersten Beschreibung der Tangente entspricht, ist folgende (auch anderswo wichtige) Schreibweise nützlich:

11.1.3 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$, 0 sei Häufungspunkt von D. Seien $F, G : D \to \mathbb{R}$ mit $G(h) \neq 0$ für $h \neq 0$.
Wir schreiben

$$\boldsymbol{F(h) = o\,(G(h))} \;\; (h \to 0) \;\; (F \text{ ist klein o von } G),$$

wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = 0\,.$$

Dies ist ähnlich zu ›≪‹ auf Übungszettel 4 (Wintersemester 2005/06). Zur Vorstellung: $F(h)$ ist für kleine h viel kleiner als $G(h)$.

Beispiele: Für $h \to 0$ ist

▷ $h^s = o(h^t)$ falls $s > t$, denn $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h^s}{h^t} = \lim\limits_{h\to 0} h^{s-t} = 0$.

»Höhere Potenzen verschwinden schneller bei Null als niedrigere.«

▷ $e^{-\frac{1}{h}} = o(h^n)$ (für $h > 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Denn mit $z = \frac{1}{h}$ ist $z \to \infty$ für $h \to 0^+$ und $\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^n} = e^{-z}z^n = \frac{z^n}{e^z}$, und wegen $e > 1$ konvergiert dies gegen Null für $z \to \infty$, siehe Satz 8.1.5.

Vorsicht: $F(h) = o(G(h))$ und $F_1(h) = o(G(h)) \not\Rightarrow F(h) = F_1(h)$, für alle h. Das Gleichheitszeichen hat hier also nicht die übliche Bedeutung.

Bemerkung: Geometrisch bedeutet $F(h) = o(h)$ $(h \to 0)$ gerade, dass die x-Achse im Nullpunkt tangential an den Graphen von F ist!

Sind $p, a \in \mathbb{R}$, so ist der Graph von $h \mapsto p + ah$ eine Gerade der Steigung a, die die y-Achse bei p schneidet. Also bedeutet $F(h) - (p + ah) = o(h)$ $(h \to 0)$, dass diese Gerade im Punkt $(0, p)$ tangential an den Graphen von F ist. Insbesondere muss $F(0) = p$ sein.

Wendet man dies auf $F(h) := f(x_0 + h)$ an, so folgt: Die Bedingung im folgenden Satz sagt, dass der Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente der Steigung a hat.

11.1.4 Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.
f ist differenzierbar in x_0, mit Ableitung $f'(x_0) = a$ genau dann, wenn

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h = o(h) \quad (h \to 0)$$

Beweis: Es ist
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \Big)$$

Dies ist gleich Null genau dann, wenn $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$. □

11.1.5 Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar. Sei $c \in \mathbb{R}$.

(1) Dann sind cf, $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar, und

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

(2) Falls $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis: Die Aussagen für cf und $f+g$ folgen direkt aus den Grenzwertregeln mit einfachen Umformungen. Interessanter ist die Produktregel, hier passiert etwas Neues.
Am besten versteht man die Produktregel, wenn man abkürzend schreibt:

$$f = f(x_0)\,,\quad g = g(x_0)\,,\quad \Delta f = f(x) - f(x_0)\,,\quad \Delta g = g(x) - g(x_0)$$

(und sich dabei merkt, dass Δf, Δg von x abhängen). Dann ist $f(x) = f + \Delta f$, $g(x) = g + \Delta g$, also ist der Zähler des Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= (f+\Delta f)(g+\Delta g) - fg \\ &= f\Delta g + g\Delta f + \Delta f \Delta g\,. \end{aligned}$$

Teilt man nun durch $\Delta x := x - x_0$ und lässt dann x gegen x_0 gehen, so strebt $\frac{\Delta g}{\Delta x}$ per Definition gegen $g'(x_0)$, also $f\frac{\Delta g}{\Delta x}$ gegen $f(x_0)g'(x_0)$ (denn $f = f(x_0)$ hängt nicht von x ab). Analog führt der zweite Term zu $f'(x_0)g(x_0)$.

Schließlich ist $\frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x$, und da die ersten beiden Faktoren für $x \to x_0$ konvergieren und der dritte gegen Null strebt, konvergiert das Produkt gegen Null.

Die Quotientenregel folgt ähnlich: $\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g} - \frac{f}{g} = \frac{(f+\Delta f)g - f(g+\Delta g)}{(g+\Delta g)g} = \frac{\Delta f g - f\Delta g}{(g+\Delta g)g}$ □

Differenzierbarkeit ist stärker als Stetigkeit:

11.1.6 Satz
Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann ist f stetig in x_0.

Beweis: Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0)\cdot 0 = 0\,,$$

also insgesamt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir von jetzt an einfach x statt x_0, wenn es nicht zu Verwirrung führt.

Eine konkrete Ableitungsberechnung mit Hilfe der Ableitungsregeln:

11.1.7 Satz
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$. Dann gilt: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis: Die Behauptung lässt sich leicht mit Hilfe der vollständigen Induktion über den Grad n von f zeigen:
Induktionsanfang $(n = 1)$: $f(x) = x^1 = x$, also $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$ haben wir bereits gerechnet.
Induktionsschritt $(n-1 \rightsquigarrow n)$: $f(x) = x^n = x \cdot x^{n-1}$, also $f'(x) = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = x^{n-1} + (n-1) \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$. □

Schreibweise: Verschiedene Schreibweisen für Ableitungen sind

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$$

Hat man eine Variable y mittels $y = f(x)$ eingeführt, so schreibt man auch

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Bemerkung: Was genau ist eigentlich eine »Variable«? Die Mathematiker drücken sich hier meist um eine Antwort – eine wird viel später im Kontext von Mannigfaltigkeiten gegeben (eine Variable ist eine Funktion des Ortes). Nehmen Sie's hier einfach als praktisches Konstrukt zum Vermeiden überladener Notation.

Beispiel: $\frac{dx^n}{dx} = \frac{d(x \cdot x^{n-1})}{dx} = \frac{dx}{dx} \cdot x^{n-1} + x \cdot \frac{dx^{n-1}}{dx} = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}$

11.1.8 Satz (Kettenregel)

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $g : I \to J$ und $h : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei $x_0 \in I$. Angenommen, g ist in x_0 und h in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $h \circ g$ in x_0 differenzierbar und es ist

$$(h \circ g)'(x_0) = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Beweis: Erster Versuch:

$$\begin{aligned}(h \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,,\end{aligned}$$

da mit $x \to x_0$ nach Satz 11.1.6 auch $g(x) \to g(x_0)$ gilt.

Wieso ist das kein vollständiger Beweis? $g(x) - g(x_0)$ kann Null werden und mit Null dürfen wir nicht »erweitern«! Ein möglicher Ausweg: Setze $y_0 = g(x_0)$ und

$$H(y) = \begin{cases} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ h'(y_0) & \text{für } y = y_0\,. \end{cases}$$

Da h in y_0 differenzierbar ist, ist H in y_0 stetig. Es gilt nun

$$h(g(x)) - h(g(x_0)) = H(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0))\,,$$

denn für $g(x) \neq g(x_0)$ folgt das sofort aus der Definition von H, und für $g(x) = g(x_0)$ sind beide Seiten gleich Null. Teilt man nun durch $x - x_0$ und betrachtet den Limes $x \to x_0$, so folgt wie oben

$$(h \circ g)'(x_0) = \big(\lim_{x \to x_0} H(g(x))\big) \cdot g'(x_0)$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel: Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Setze $g(x) = 1 + x^2$ und $h(y) = \frac{1}{y}$. Dann ist $f(x) = h(g(x))$. Wegen $g'(x) = \frac{d}{dx}(1+x^2) = \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}x^2 = 0 + 2x = 2x$ und $h'(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{y} = \frac{-1}{y^2}$ folgt:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$$

Bemerkung (Kurzschreibweise für die Kettenregel): In der Praxis beginnt man mit einer Funktion $f(x)$, die »zusammengesetzt« ist, also die Form $h(g(x))$ hat. Man schreibt dann $z = f(x)$, $y = g(x)$. Also $z = h(y)$, und die Kettenregel sagt dann

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

was sich sehr leicht merken lässt. Am Schluss nicht vergessen, y wieder durch $g(x)$ zu ersetzen!

Formal »kürzt« man einfach dy. Beachten Sie jedoch, dass dies eine rein formale Operation ist, da dy für sich genommen keine Bedeutung hat.

Bemerkung: Auch dies wird im Kontext von Mannigfaltigkeiten revidiert werden. Dort hat dy eine Bedeutung. Man nennt es dort eine **»Eins-Form«.**

Am Besten nochmal das Beispiel: $z = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{y}$ mit $y = 1 + x^2$. Dann ist $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2}$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$. Also folgt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2} \cdot 2x = -\frac{1}{(1+x^2)^2} 2x$$

11.1.9 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion. Sei $I' = f(I)$ und $f^{-1} : I' \to I$ die Umkehrfunktion zu f. Falls f in $x_0 \in I$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, so ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es ist

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis: Entweder mit der Kettenregel:
Aus $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, mit $\mathrm{id}(x) = x$ für alle x, folgt $(f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = id'(x_0) = 1$ und damit die Behauptung.
Oder direkt: Sei $y \in I'$ und $x = f^{-1}(y)$, also $y = f(x)$. Der Differenzenquotient von f^{-1} ist dann

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1}.$$

Da f stetig ist, strebt mit $y \to y_0$ auch $x \to x_0$. Also folgt die Behauptung aus der Definition der Ableitung. $\square$

Bemerkung (Finden der Umkehrfunktion): Erinnerung an die Bedeutung der Umkehrfunktion: Um die Umkehrfunktion einer gegebenen Funktion f zu finden, kann man folgende Schritte machen:

1. Schreibe $y = f(x)$.
2. Löse die Gleichung nach x auf.
3. Es ist dann $x = f^{-1}(y)$.

Wer lieber x als unabhängige Variable und y als abhängige Variable verwendet, kann abschließend die Variablen x und y vertauschen. Dies sollte man jedoch wirklich nur abschließend tun!

Beispiel: Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Dann ist $I' = (0, \infty)$.
Sei also $y = x^2$ und somit $\sqrt{y} = x$. Es folgt dann $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
Sei $x_0 \in (0, \infty)$, dann ist $f'(x_0) = 2 \cdot x_0$. Also folgt: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{2 \cdot x_0} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y_0}}$.
Ersetzt man nun y durch x, so kann man das Ergebnis auch so schreiben:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

Bemerkung (Kurzschreibweise für Regel über die Umkehrfunktion):
Schreibt man $y = f(x)$, so folgt $x = f^{-1}(y)$, und die Kettenregel sagt einfach

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

was sich wiederum sehr leicht merken lässt. Wiederum darf man am Ende nicht vergessen, x durch $f^{-1}(y)$ zu ersetzen, da das Argument von f^{-1} ja y ist, man also $(f^{-1})'$ als Funktion von y, und nicht von x, ausdrücken möchte. Im Beispiel nochmal: $y = x^2$, also $\frac{dy}{dx} = 2x$. $x = \sqrt{y}$, also nach der Regel:

$$\frac{d\sqrt{y}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Betrachtet man übrigens die Funktion $y = x^2$ für $x < 0$, so ist die Umkehrfunktion $x = -\sqrt{y}$ und ihre Ableitung entsprechend $-\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Wir wollen auch Funktionen wie exp ableiten können. Dafür brauchen wir folgenden Satz:

11.1.10 Satz (Ableitung einer Potenzreihe)

Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ habe einen Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ den Konvergenzradius R, und für alle x mit $|x| < R$ gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Mit anderen Worten:

$$\forall_{x\in(-R,R)} \quad \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n \cdot x^n)$$

Diesen Satz beweist man am einfachsten mittels eines Umwegs über die Integration. Wir verschieben also den Beweis auf später (ans Ende von Kapitel 13).

Die abgeleitete Summe beginnt wirklich erst mit $n = 1$, da $\frac{d}{dx}a_0 = 0$.

Beispiele:

(1) Es ist $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, für $|x| < 1, R = 1$. Dann ist die Ableitung $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

Wie man diese Formel direkt herleiten kann, ist nicht ganz offensichtlich! (Eine andere Möglichkeit ist mittels des Cauchy-Produkts der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit sich selbst.)

(2) $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Es ist $R = \infty$. Nun ist $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{m:=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

(3) Logarithmus: $y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$. $\frac{d}{dy}\log y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}}$$

(4) Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ gilt: $a^x = e^{x \log a} := e^u$ mit $u := x \cdot \log a$. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \log a = a^x \cdot \log a$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \log a}$$

(5) Für $b \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = x^b = y = e^{b \log y} = e^v$ mit $v := b \cdot \log x$. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = e^v \cdot b \cdot \frac{1}{x} = b \cdot x^{b-1}$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^b = b \cdot x^{b-1}}$$

Wir sagen, eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei **auf I differenzierbar,** wenn f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist.

11.1.11 Definition (Höhere Ableitungen)

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar, so ist $f' : I \to \mathbb{R}$ erklärt. Ist diese Funktion f' wieder auf I differenzierbar, so heißt f zweimal differenzierbar und wir schreiben:

$$\boldsymbol{f''(x)} := (f')'(x)$$

Analog definiert man höhere Differenzierbarkeit und höhere Ableitungen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f'(x) &= 2x^3 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Schreibweise:

$$f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$$

Für Argumentationen, z. B. mittels Induktion, schreibt man $f^{(n)}$ auch im Fall $n = 1, 2, 3$. Außerdem setzt man

$$f^{(0)} := f\,.$$

Dies, zusammen mit $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ für $n \in \mathbb{N}$, definiert $f^{(n)}$ rekursiv.

11.1.12 Definition

f heißt **unendlich oft differenzierbar,** wenn alle Ableitungen $f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots$ existieren.

Beispiele:

(1) $f(x) = e^x$ ist unendlich oft differenzierbar: $f^{(n)}(x) = e^x$.

(2) Etwas allgemeiner: $f(x) = e^{cx}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = c^n e^{cx}$.

(3) Für $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $f^{(n)}(x) = n!$.

Beweis: (Sollte eigentlich mit Induktion geführt werden)

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2 \cdot x^{(n-(n-1))} \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n! \end{aligned}$$

□

11.2 Ableitung und Funktionseigenschaften

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Wir wollen markante Eigenschaften von f, wie z. B. Monotonie, oder Stellen an denen f Maxima oder Minima annimmt (sogenannte Extrema), mit der Ableitung in Verbindung bringen.

11.2.1 Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

(1) x_0 ist **globales Maximum** von f, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$.

x_0 ist **globales Minimum** von f, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$.

(2) x_0 ist **lokales Maximum** von f,
falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.

x_0 ist **lokales Minimum** von f,
falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ gilt: $f(x) \geq f(x_0)$.

(3) x_0 ist **globales bzw. lokales Extremum** von f,
falls x_0 globales bzw. lokales Maximum oder Minimum von f ist.

11.2.2 Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von I. Angenommen, f hat bei x_0 ein lokales Extremum. Wenn f differenzierbar in x_0 ist, dann muss $f'(x_0) = 0$ gelten.

Beweis: Angenommen, f hat in x_0 ein lokales Minimum. (Der andere Fall kann analog gezeigt werden.) Das heißt:

$$\underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

Daraus folgt:

(a) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, falls $x_0 < x < x_0 + \delta$.

(b) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, falls $x_0 - \delta < x < x_0$.

Da $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert, muss dieser Grenzwert gleich dem linksseitigen und gleich dem rechtsseitigen Grenzwert sein.

Aus (a) folgt damit: Der rechtsseitige Grenzwert ist ≥ 0, also $f'(x_0) \geq 0$.
Aus (b) folgt damit: Der linksseitige Grenzwert ist ≤ 0, also $f'(x_0) \leq 0$.

Insgesamt muss also $f'(x_0) = 0$ gelten. □

Beispiel: Bestimme unter allen Rechtecken mit Umfang 2 diejenigen, deren Fläche maximal oder minimal ist:

Das Rechteck habe die Seitenlängen x und y. Der Umfang ist $2x + 2y$, also folgt $x + y = 1$. Der Flächeninhalt ist $xy = x(1 - x)$.
Wir müssen also die Extrema der Funktion $F : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, F(x) = x(1 - x)$ bestimmen, wobei $I = [0, 1]$ (denn $x \geq 0$, $y = 1 - x \geq 0$).

1. Am Rand hat die Funktion die Werte $F(0) = F(1) = 0$. Im Innern von I ist F positiv. Daher sind 0 und 1 globale Minima.

2. Nach Satz 10.3.4 hat F ein globales Maximum, da F stetig ist und $[0, 1]$ abgeschlossenes Intervall ist.

3. Das globale Maximum muss an einem inneren Punkt angenommen werden, da die Funktion am Rand minimal ist. Also muss beim Maximum $F'(x) = 1 - 2x = 0$ sein. Dies hat die eindeutige Lösung $x = \dfrac{1}{2}$.

4. Also ist $x = \frac{1}{2}$ das Maximum von F.

Resultat: Das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt ist das Quadrat. Das mit dem kleinsten Flächeninhalt ist der Strich: Breite gleich Null. Man kann das Resultat auch sehr leicht direkt (ohne Ableitungen) sehen:

$$F(x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2,$$

denn $\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - x + x^2\right) = x - x^2 = x(1-x)$. Offenbar gilt $F(x) \leq \frac{1}{4}$ für alle x, mit Gleichheit genau für $x = \frac{1}{2}$. (Denn das Quadrat einer positiven Zahl ist positiv.)

Beachte: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht, dass x_0 ein lokales Extremum ist.

Beispiel: $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein lokales Extremum, da $f(x) > 0$ für $x > 0$ und $f(x) < 0$ für $x < 0$ ist.

11.2.3 Definition

Sei x_0 innerer Punkt. x_0 heißt **stationärer Punkt** von f, falls $f'(x_0) = 0$.
Ein stationärer Punkt, der kein lokales Extremum ist, heißt **Sattelpunkt.**

Für theoretische Zwecke sehr wichtig ist der folgende Satz:

11.2.4 Satz (Mittelwertsatz)

Sei $a < b$. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:

$$\underset{\xi \in (a,b)}{\exists} : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Warum nehmen wir nicht einfach an, dass f auf $[a, b]$ differenzierbar ist? Dies würde gewisse Fälle ausschließen, z. B. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Beweis: Zwei Schritte:

1. Spezialfall: $f(a) = f(b)$. Zeige: $\underset{\xi \in (a,b)}{\exists} : f'(\xi) = 0$ **(Der Satz von Rolle)**

   Beweis: Der Fall, dass f konstant ist, ist trivial. Wenn f nicht konstant ist, folgt:
   $$\underset{x_0 \in (a,b)}{\exists} : f(x_0) \neq f(a).$$
   O. B. d. A. gelte $f(x_0) > f(a)$. Nach dem Satz vom Maximum wissen wir: $\underset{\xi \in [a,b]}{\exists} : f$ maximal in ξ.

   ξ muss dann innerer Punkt von $[a, b]$ sein, denn $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$, woraus $\xi \neq a$ und $\xi \neq b$ folgt. Somit folgt mit Satz 11.2.2: $f'(\xi) = 0$.

2. f beliebig. Wir ziehen von f eine lineare Funktion ab und wenden Schritt 1 an. Sei
   $$h(x) := f(x) - mx.$$
   Für welches m gilt: $h(a) = h(b)$? Wir wollen:
   $$f(a) - ma = f(b) - mb,$$
   und somit folgt:
   $$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
   Also von vorne: $h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$.

   h ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und es ist $h(a) = h(b)$. Dann folgt mit Schritt 1:
   $$\underset{\xi \in (a,b)}{\exists} : h'(\xi) = 0.$$
   Nun ist $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ genau die gesuchte Formel! □

11.2.5 Korollar

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:

(1) $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist konstant.

(2) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend.

(3) $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend.

(4) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend.

(5) $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

Beweis: (1) Wir zeigen, dass f konstant ist, genauer:

$$\underset{x,y\in[a,b]}{\forall} : f(x) = f(y)$$

Seien $x, y \in [a,b]$. O. B. d. A. sei $x < y$. Direkt mit dem Mittelwertsatz folgt dann:

$$\underset{\xi\in(x,y)}{\exists} : \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Somit folgt: $f(x) = f(y)$. Der Beweis »Rückrichtung« für die Rückrichtung bleibt Ihnen als Übung, und die Beweise von (2) - (5) verlaufen analog. □

Bemerkung: Für (3) und (5) gelten die Umkehrschlüsse nicht. So ist zum Beispiel $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Später werden wir noch folgende Verallgemeinerung benötigen.

11.2.6 Satz (Der verallgemeinerte Mittelwertsatz)

Sei $a < b$, und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beide stetig auf $[a,b]$ und beide differenzierbar auf (a,b). Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\underset{\xi\in(a,b)}{\exists} : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Der »alte« Mittelwertsatz ergibt sich nun als Spezialfall mit $g(x) = x$.

Beweis: Argumentiere wie im Beweis des Mittelwertsatzes, jedoch mit

$$h(x) = f(x) - m \cdot g(x),$$

wobei $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Wegen $h(a) = h(b)$ existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$, und dies liefert genau die Behauptung. □

11.3 Taylorapproximation und Taylorreihen

Motivation

Berechne $\sqrt{1{,}01}$ zumindest angenähert. Eine Sammlung von Ideen:

- ▷ Nahe bei 1.
- ▷ Weniger als 1,01, weil $\sqrt{x} < x$ für $x > 1$.
- ▷ Schreibe $\sqrt{1{,}01} = 1 + a$, dann gilt $1{,}01 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$, somit $0{,}01 = 2a + a^2$.
- ▷ a^2 ist sehr viel kleiner als $2a$ (wegen $a < 0{,}01$), kann daher vernachlässigt werden.
- ▷ Also ist $a \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$.
- ▷ Taschenrechner liefert $\sqrt{0{,}01} = 1{,}0049875...$, Fehler unserer Approximation: $1{,}005 - 1{,}0049875... = 0{,}0000125...$. Sehr gut!

Für sehr kleine x gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+x} && = 1 + a \\ \Longrightarrow\quad & 1 + x && = 1 + 2a + a^2 \\ \Longrightarrow\quad & x && = 2a + a^2 \approx 2a \\ \Longrightarrow\quad & a && \approx \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \text{ für kleine } x.$$

Fragen:

- ▷ Wie kann man bei allgemeinen Funktionen ($f(x)$ statt $\sqrt{1+x}$) vorgehen?
- ▷ Noch bessere Approximation durch Verwendung von x^2, $x^3, \dots$?
- ▷ Wie groß ist der Fehler höchstens? Wie kann man zeigen, dass er sehr klein ist, ohne den Taschenrechner zu verwenden?

Wir klären zunächst, woher der Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem x in der Approximation von $\sqrt{1+x}$ kommt. Betrachte den Graphen von $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ und seine Steigung an der Stelle $x_0 = 0$:

Es ist $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, also $f'(0) = \frac{1}{2}$. Die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ hat also die Steigung $\frac{1}{2}$. Nahe $x_0 = 0$ sind die Funktionswerte von $\sqrt{1+x}$ und der Tangente $1 + \frac{x}{2}$ annähernd gleich, denn nach Satz 11.1.4 gilt:

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & - f(0) & - \, x f'(0) & = \mathrm{o}(x) \\ \sqrt{1+x} & - \quad 1 & - \quad \frac{x}{2} & \end{array}$$

Damit folgt: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. Sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $x_0 \in I$. Wir wollen die Werte $f(x)$ für x nahe x_0 in ähnlicher Weise angenähert berechnen. Ähnlich wie oben beobachten wir:

(0) $f(x)$ ist nahe bei $f(x_0)$ (Fehler $\to 0$ für $x \to x_0$, Approximation nullter Ordnung).

(1) Etwas genauer: $f(x)$ ist ungefähr $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (Fehler ist $\mathrm{o}(x - x_0)$ für $x \to x_0$, Approximation erster Ordnung).

Damit (0) stimmt, muss f bei x_0 stetig sein, damit (1) stimmt, muss f bei x_0 differenzierbar sein. Geht es noch genauer? Gegeben seien $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall), $x_0 \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

- ▷ Gibt es Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass mit $T(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$ gilt:
$$|f(x) - T(x)| = \mathrm{o}(|x - x_0|^n)\ ?$$
- ▷ Was sind die a_i?
- ▷ Kann man den Fehler noch genauer (effizient berechenbar) abschätzen?

Um eine Idee zu bekommen, betrachten wir zunächst einen Spezialfall: f ist selber ein Polynom vom Grad n:
$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$
Dann kann man $a_0, \ldots, a_n$ finden, so dass sogar $T(x) = f(x)$ für alle x. Konkret:
$$\begin{aligned} h &:= x - x_0 \;\Rightarrow\; x = h + x_0 \\ \text{somit: } f(x) &= f(h + x_0) = b_0 + b_1(h + x_0) + \ldots + b_n(h + x_0)^n \\ &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n \;\text{ nach Umordnung.} \end{aligned}$$
Die a_i sind dabei komplizierte Ausdrücke in den b_j und in x_0. Wegen $h = x - x_0$ ist also $f(x) = T(x)$ für alle x.

Wie kann man die a_i effizient aus f berechnen? Wir wissen bereits, dass $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$ ist. Das legt nahe, $f = T$ bei x_0 wiederholt abzuleiten:
$$\begin{aligned} T(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n \\ T'(x) &= a_1 + 2 \cdot a_2(x - x_0) + 3 \cdot a_3(x - x_0)^2 + \ldots \\ T''(x) &= 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + \ldots \\ T'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \ldots \\ T^{(k)}(x) &= k! \cdot a_k + \ldots \end{aligned}$$
Daher ist $T(x_0) = a_0$, $T'(x_0) = a_1$, $T''(x_0) = 2 \cdot a_2$, $T'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3$, allgemein $T^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$. Also ist für Polynome (wo $f = T$):
$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$
Dies motiviert die folgende Definition.

11.3.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}_0$. Sei f n-mal differenzierbar auf I. Dann ist das ***n*-te Taylorpolynom** von f bei x_0 definiert durch:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_n(x)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

Beispiel:
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1 + x)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$
Für $x_0 = 0$ und $n = 2$ ist $T_2(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\frac{1}{4}x^2}{2!} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.

Für $x = 0{,}01$ ist der quadratische Term gleich $0{,}0000125$, das war gerade der Fehler zum Taschenrechnerergebnis oben. Damit gibt das zweite Taylorpolynom schon die korrekte Antwort mindestens auf 7 Stellen!

Vollständige Antworten auf die zuvor gestellten Fragen ergeben sich aus folgendem Satz:

11.3.2 Satz (Satz von Taylor)

Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei $x \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Beweis: Der Fall $n = 0$ ist der Mittelwertsatz. Wie kann man dies auf höhere Ableitungen verallgemeinern? Ein genialer Trick, der dies recht schnell erledigt, ist auf dem elften Übungszettel angegeben. Man fragt sich dabei jedoch, wie man auf so etwas kommen kann. Ein etwas befriedigender Beweis wird mit Hilfe der Integralrechnung möglich sein. Dazu in Analysis II mehr. □

Bemerkung: »Zwischen« bedeutet: Falls $x > x_0$, so ist $\xi \in (x_0, x)$, und falls $x < x_0$, so ist $\xi \in (x, x_0)$.

Beispiel: Sei $n = 1$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ und $x_0 = 0$. Dann ist $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ für ein ξ zwischen 0 und x. Damit ist eine Fehlerabschätzung für das Taylorpolynom an der Stelle x möglich: Es muss nur noch eine obere Schranke der Menge

$$\left\{ \left| \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \right| : \xi \in [0, x] \right\}$$

bzw. der Funktion

$$g : [0, x] \to \mathbb{R} \;\text{ mit }\; g(\xi) = \left| \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \right|$$

bestimmt werden.

Dieses Verfahren führt uns zum nachfolgenden Korollar:

11.3.3 Korollar

Sei I ein Intervall, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei $s > 0$. Falls es $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq C$ für alle $\xi \in I$ mit $|\xi - x_0| \leq s$, dann gilt:

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{C}{(n+1)!} \cdot s^{n+1} \;\text{ für alle } x \text{ mit } |x - x_0| \leq s$$

Beispiel: Sei $n = 1$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ und $x_0 = 0$. Setze $s = 0{,}01$. Es ist $f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}$.

Die Abbildung $\xi \longmapsto (1+x)^{-\frac{3}{2}}$ ist monoton fallend, da $-\frac{3}{2} < 0$. Also gilt: $(1+\xi)^{-\frac{3}{2}} \leq (1-0{,}01)^{-\frac{3}{2}}$, denn $|\xi| \leq 0{,}01$ und somit $\xi \geq -0{,}01$. Eine grobe Abschätzung hierfür ist: $0{,}99^{-\frac{3}{2}} \leq 0{,}99^{-2} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{-2} = \frac{100}{81} < 2$.

Man kann also $C = \frac{1}{2}$ wählen, und es gilt:

$$|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}| \leq \frac{\frac{1}{2}}{2} \cdot 0{,}01^2 = 0{,}000025 \;\text{ für }\; |x| \leq 0{,}01$$

Für $0 \leq x \leq 0{,}01$ kann dies verbessert werden: Aus $0 \leq \xi \leq 0{,}01$ folgt $(1+\xi)^{-\frac{3}{2}} \leq 1$, also kann man $C = \frac{1}{4}$ wählen, und es gilt:

$$\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}\right| \leq 0{,}0000125 \;\text{ für }\; 0 \leq x \leq 0{,}01$$

Beispiel: Kann man auch etwa $\sqrt{5}$ auf diese Weise angenähert ausrechnen? 5 liegt »in der Nähe« von 4, also ist die erste Näherung $\sqrt{4} = 2$. Am einfachsten verfährt man dann so:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+\tfrac{1}{4})} &= 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} \\ &\approx 2\Big(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{4}\Big)^2\Big)\end{aligned}$$

Dies ist auf zwei Nachkommastellen korrekt. Schätzen Sie den Fehler ab!

Bemerkung: Die Taylorformel sollte man auswendig kennen! Am einprägsamsten ist sie, wenn man $x - x_0 = h$ setzt:

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}}$$

Beachte: Der »**Fehlerterm**« (oft auch Restglied genannt) sieht so aus wie die anderen Terme, außer dass man $f^{(n+1)}$ bei ξ statt bei x auswertet.

Es gibt verschiedene andere Arten, den Fehlerterm zu schreiben. Diese sind für verschiedene Anwendungen effizienter. Für theoretische Untersuchungen ist oft eine Integralform am brauchbarsten, die wir später kennenlernen werden.

Hier ist eine hübsche Anwendung des Satzes von Taylor.

11.3.4 Satz

Gegeben sei eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei x_0 ein innerer Punkt von I, f sei n-mal differenzierbar auf I, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. $f^{(n)}$ sei in x_0 stetig.
Angenommen, es gilt $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann folgt:
Wenn n gerade ist:
Falls $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.
Falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.
Wenn n ungerade ist:
f hat in x_0 einen Sattelpunkt.

Beweis: Wir beweisen dies mit Hilfe des Satzes von Taylor, wobei dort n durch $n-1$ ersetzt wird. Wegen $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ erhält man für $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

für ein ξ zwischen x_0 und x.

Erster Fall: Sei $f^{(n)}(x_0) > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass $f^{(n)}(x) > 0$, falls $|x - x_0| < \delta$. Falls nun $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$, so folgt auch $|\xi - x_0| < \delta$, also $f^{(n)}(\xi) > 0$. Somit ist $f(x) \geq f(x_0)$ für diese x, denn $(x-x_0)^n \geq 0$ für alle x (n gerade!). Daraus folgt, dass x_0 ein lokales Minimum ist. Analog geht der Fall, dass $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist.

Zweiter Fall: n ist ungerade, somit folgt:

(1) $(x-x_0)^n > 0$ für $x > x_0$.

(2) $(x-x_0)^n < 0$ für $x < x_0$.

Da wie im ersten Fall $f^{(n)}(\xi)$ konstantes Vorzeichen für ξ nahe x_0 hat, wechselt $f(x) - f(x_0)$ das Vorzeichen beim Übergang von $x < x_0$ nach $x > x_0$. □

Beispiele (Kurvendiskussion): Gegeben sei $f(x) = x^3 - 3x$ auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$.

- ▷ Nun ist $f'(x) = 3x^2 - 3$ und $f''(x) = 6x$.
- ▷ $f'(x) = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.
- ▷ Da $f''(x_1) = 6 > 0$ folgt: x_1 ist lokales Minimum.
- ▷ Da $f''(x_2) = -6 < 0$ folgt: x_2 ist lokales Maximum.
- ▷ Die Nullstellen lassen sich leicht bestimmen: Weil $x^3 - 3x = x(x^2-3)$ ist, folgt aus $x^3 - 3x = 0$, dass $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{3}$. Damit lässt sich der Graph von f leicht skizzieren.

Ein weiteres Beispiel: Gegeben sei $f(x) = x^6$ mit $x_0 = 0$.
Dann ist $f'(x) = 6x^5, f''(x) = 6 \cdot 5x^4, \ldots, f^{(6)}(x) = 6!$. Also ist $f'(0) = \ldots = f^{(5)}(0) = 0$. Da aber $f^{(6)} > 0$ ist, folgt, dass x_0 ein lokales Minimum ist (was natürlich auch so klar ist).

Taylorreihen

Falls die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist, kann man die Taylorapproximation für jedes n durchführen. Da die Approximation immer »besser« wird, je größer n ist, könnte man vermuten, dass immer

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

gelten muss. Die rechte Seite ist eine einfache Verallgemeinerung von Potenzreihen. Man spricht von einer **»Potenzreihe um x_0«.** Das stimmt zwar für viele der gängigen Funktionen (wie wir unten sehen werden), aber nicht immer.

Beispiel: Sei $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$

f ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n (Übung).

Also folgt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ für alle x. Aber für $x > 0$ ist $f(x) \neq 0$.

Bemerkung: Wie ist das zu verstehen? Sei $s > 0$. Nach dem Satz von Taylor (bzw. dessen Korollar) gibt es zwar zu jedem n eine Zahl C_n, so dass

$$|f(x) - T_n(x)| \le \frac{C_n}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

für alle x mit $|x| \le s$ gilt: Man wähle

$$C_n = \sup_{\xi : |\xi| \le s} |f^{(n+1)}(\xi)| .$$

Falls jedoch C_n für $n \to \infty$ so schnell gegen ∞ geht, dass die rechte Seite dieser Ungleichung nicht gegen Null geht, so können wir daraus nicht folgern, dass $T_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ gilt (was äquivalent zu (*) wäre)! Und dies ist offenbar in dem Beispiel oben der Fall.

Anders gesagt: Die Approximation $f(x) \approx T_n(x)$ ist zwar auf einem Intervall $x \in [-s, s] \in S$ sehr gut, die Größe dieses Intervalls kann jedoch für $n \to \infty$ beliebig klein werden.

11.3.5 Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt **Taylorreihe** von f um x_0.

Wir fassen die Diskussion oben zusammen:

11.3.6 Satz (Taylorreihe)

(1) $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall I unendlich oft differenzierbar. Seien $x, x_0 \in I$.

f ist bei x gleich seiner Taylorreihe (d. h. (*) gilt) genau dann, wenn $f(x) - T_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen Null geht.

(2) Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen, für die (*) für kein $x \neq x_0$ gilt.

Im Beispiel oben galt (*) immerhin noch für $x \le 0$. Ein Beispiel für die stärkere Aussage (2) ist $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$.
Falls eine Funktion durch eine Reihe gegeben ist, ist dies schon ihre Taylorreihe:

11.3.7 Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ für ein Intervall I und $x_0 \in I$. Falls es $\delta > 0$ und $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, dann folgt:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für alle } n\,,$$

das heißt, f ist gleich seiner Taylorreihe, zumindest für $|x - x_0| < \delta$.

Beweis: Dies geht analog zur Herleitung der Formel $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ für Polynome: Es ist $f(x_0) = a_0$. Wegen $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots$ ist weiterhin $f'(x_0) = a_1$ etc. □

Beispiel: Wir wissen: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$. Ersetzt man x durch $-x^2$, so folgt

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{für } |x| < 1\,.$$

Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, aber die Reihenentwicklung gilt nur für $|x| < 1$.

Bemerkung: Wie ist das zu verstehen? Mittels der komplexen Zahlen! Denn betrachtet man $f(z) = 1/(1+z^2)$ für komplexes z, so ist wegen $1 + i^2 = 0$ die Funktion f bei i (und bei $-i$) nicht definiert. Wegen $|i| = 1$ ist es also kein Wunder, dass die Reihe nur für $|z| < 1$ konvergiert, vergleiche Satz 7.5.4, der wörtlich auch im Komplexen gilt.

Mit anderen Worten: Das größte r, für das f auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ definiert ist, ist $r = 1$. Dies ist gerade der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$.

Wie gesagt: Das stimmt in $\mathbb{C}$, aber die analoge Aussage in $\mathbb{R}$ ist falsch, wie $\frac{1}{1+x^2}$ zeigt.

Eine analoge Aussage gilt allgemein: Eine Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kann nicht über den Rand des Konvergenzkreises $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ hinaus »definiert« werden (wobei R der Konvergenzradius der Reihe sei). Genauer gesagt muss es eine Folge (z_n) in K geben mit $|f(z_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Dies hat äußerst interessante Konsequenzen. Es ist mit unseren Mitteln sehr schwierig zu zeigen, jedoch mit dem zentralen Satz der Funktionentheorie (der Cauchy-Integralformel) eine Kleinigkeit. All dies wird in Analysis IV ausführlich behandelt.

Wichtige Taylorreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad (|x| < 1\,,\ a \in \mathbb{R}) \quad \textbf{Binomische Reihe}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$

Beweis: Für die binomische Reihe:
Mit $f(x) = (1+x)^a$ ist $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$, $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$ und allgemein $f^{(n)}(x) = a(a-1)\cdots(a-n+1)\,(1+x)^{a-n}$, also

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f(x) - T_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dies kann mit Hilfe einer Variante des Satzes von Taylor geschehen. Für die Details siehe die Übung und die Standardbücher.

Die Rechnung für $f(x) = \log x$ ist wegen $f'(x) = x^{-1}$ sehr ähnlich. □

Bemerkung: Für $a \in \mathbb{N}_0$ ist die binomische Reihe eine endliche Summe, da $\binom{a}{n} = 0$ für $n > a$ ist. Die binomische Reihe wird dann zur binomischen Formel.

11.3.8 Korollar (Identitätssatz für Potenzreihen)

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius, deren Werte auf einem Intervall $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ übereinstimmen. Dann ist $a_n = b_n$ für alle n.

Beweis: Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$. Damit: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = b_n$ für alle n. □

11.4 Konvexität, Bedeutung der zweiten Ableitung

Die folgende Definition drückt eine geläufige geometrische Eigenschaft für den Graphen einer Funktion aus.

11.4.1 Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$.
Die Funktion f heißt **konvex** auf I, falls für alle $x_0, x_1 \in I$ und alle $t \in [0,1]$ gilt:

(1) $$f((1-t)x_0 + tx_1) \le (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$$

f heißt **streng konvex,** falls Gleichheit nur für $t = 0$ oder 1 oder $x_0 = x_1$ gilt.
f heißt **(streng) konkav,** falls das umgekehrte Ungleichheitszeichen gilt.

Warum ist dies die korrekte Übersetzung der geometrischen Vorstellung von Konvexität?
Sei beispielsweise $x_0 < x_1$, und setze $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$. Die Bedingung (1) sagt, dass der Graph von f auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ unterhalb der Sehne durch die Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) liegt. Denn die Punkte der Sehne sind gerade (x_t, y_t) mit $t \in [0,1]$, wobei

$$x_t = x_0 + t(x_1 - x_0) = (1-t)x_0 + tx_1$$
$$y_t = y_0 + t(y_1 - y_0) = (1-t)y_0 + ty_1\,,$$

und (1) sagt $f(x_t) \le y_t$ für alle $t \in [0,1]$.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = x^2$ ist streng konvex auf $\mathbb{R}$. Dies ist geometrisch klar. Um (1) nachzuprüfen, muss man ein wenig rechnen. Für $t = \frac{1}{2}$ etwa heißt (1)

(2) $$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 \le \frac{x_0^2 + x_1^2}{2}\,,$$

mit Gleichheit nur für $x_0 = x_1$. Dies lässt sich leicht zu $(x_0 - x_1)^2 \ge 0$ äquivalent umformen, was sicherlich stimmt. (2) ist bekannt als **Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel.**

Mit Hilfe des folgenden Satzes lässt sich oft leicht entscheiden, ob eine Funktion konvex ist:

11.4.2 Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex} \quad &\Leftrightarrow \quad f'' \geq 0 \text{ auf } I \\ f \text{ ist konkav} \quad &\Leftrightarrow \quad f'' \leq 0 \text{ auf } I \\ f \text{ ist streng konvex} \quad &\Leftarrow \quad f'' > 0 \text{ auf } I \\ f \text{ ist streng konkav} \quad &\Leftarrow \quad f'' < 0 \text{ auf } I \end{aligned}$$

Beachte, dass in den letzten Fällen die Implikation ›⇒‹ nicht gilt. Zum Beispiel ist $f(x) = x^4$ streng konvex auf $\mathbb{R}$, aber $f''(0) = 0$. Vergleiche die ähnliche Situation für die erste Ableitung in Korollar 11.2.5.

Beweis: Wir beweisen die erste Aussage, die anderen beweist man ähnlich. Für $x, x' \in I$, $x \neq x'$ sei $s(x, x') = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ die Steigung der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(x', f(x'))$.

1. Schritt: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x_0, x, x_1 \in I$ mit $x_0 < x < x_1$ gilt:

(S) $$s(x_0, x) \leq s(x_0, x_1) \leq s(x, x_1)$$

Beweis: $x = (1-t)x_0 + tx_1$ für ein $t \in (0,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & f(x) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \\ \xrightarrow{\text{subtrahiere } f(x_0)} \quad & f(x) - f(x_0) \leq t(f(x_1) - f(x_0)) \\ \xrightarrow{\text{teile durch } t(x_1 - x_0) = x - x_0} \quad & s(x_0, x) \leq s(x_0, x_1)\,. \end{aligned}$$

Die Äquivalenz mit der zweiten Ungleichung zeigt man ähnlich.

2. Schritt: Wir zeigen, dass f konvex ist genau dann, wenn f' monoton wächst.

Beweis: Sei f konvex und $x_0 < x_1$. Nach Definition der Ableitung ist $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} s(x_0, x)$ und $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} s(x, x_1)$. Lässt man in (S) x gegen x_0 gehen, so folgt $f'(x_0) \leq s(x_0, x_1)$, und lässt man x gegen x_1 gehen, so folgt $s(x_0, x_1) \leq f'(x_1)$. Zusammen ergibt dies $f(x_0) \leq f(x_1)$.

Sei umgekehrt f' monoton wachsend und $x_0 < x_1$. Die Funktion $s_0(x) = s(x_0, x)$ hat die Ableitung

$$s_0'(x) = \frac{f'(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{x - x_0}\Big(f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\Big)\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz ist $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$ für ein $\xi \in (x_0, x)$. Wegen der Monotonie von f folgt $s_0'(x) \geq 0$ für alle x, also wächst s_0 monoton. Sei nun $x \in (x_0, x_1)$ beliebig. Dann folgt $s_0(x) \leq s(x_1)$, also die linke Ungleichung in (S). Die rechte Ungleichung von (S) folgt ähnlich, also ist f konvex.

3. Schritt: Da $f'' \geq 0$ genau dann gilt, wenn f' monoton wächst, folgt die Behauptung aus Schritt 2. □

Beispiele:

(1) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist streng konvex, da $f''(x) = 2 > 0$.

(2) Sei $f(x) = x^3$. Dann ist $f''(x) = 6x$ positiv falls $x > 0$, und negativ falls $x < 0$. Also ist f streng konkav auf $(-\infty, 0)$ und streng konvex auf $(0, \infty)$.

(3) Die Funktion $f(x) = \log x$ ist streng konkav $(0, \infty)$, denn $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ für alle $x > 0$.

Bemerkung: Die Konkavität von log direkt nachzuprüfen wäre schwierig. Die Hauptanwendung von Satz 11.4.2 besteht in der Implikation $f'' > 0 \Rightarrow f$ streng konvex, und dem Analogon für Konkavität. Für den Logarithmus ergibt sich zum Beispiel im Spezialfall $t = \frac{1}{2}$ (mit $x_1, x_2 > 0$):

$$\log \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \frac{\log x_1 + \log x_2}{2} \text{ , also}$$
$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \text{ ,}$$

wobei Gleichheit nur für $x_1 = x_2$ gelten kann, also wiederum die Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel.

12 Die trigonometrischen Funktionen

12.1 Sinus und Cosinus

In der Schule wurden die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks eingeführt. Dabei beschäftigte man sich mit den Längenverhältnissen zwischen den drei Seiten des Dreiecks. Es wurde definiert:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

wobei α der Winkel zwischen der Hypothenuse (der Länge c) und der Kathete der Länge b ist und die Gegenkathete die Länge a hat.

In unserem Aufbau des Zahlensystems können wir nicht so vorgehen, da der Begriff des Winkels nicht definiert ist. Wir wählen einen Zugang, der dieses Problem umgeht, dafür aber zunächst wenig intuitiv erscheinen mag. Der Bezug zur Geometrie wird jedoch sehr bald zu erkennen sein.

Um Sinus und Cosinus zu definieren, werden wir wie folgt vorgehen:

1. Wir betrachten die folgende Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\quad f\,(t) = e^{it}$

   Hierbei ist i die imaginäre Einheit, und $e^{it} = \exp(it)$ ist mittels der Potenzreihe definiert.

2. Sei
   $$K = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$$
   der Einheitskreis in der komplexen Ebene. Wir werden zeigen, dass $f(t) \in K$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

3. Wir werden sehen, dass $f(t)$ mit wachsendem t um K herumläuft, und zwar gegen den Uhrzeigersinn.

4. Offenbar ist $f(0) = 1$. Ein nicht-trivialer Schritt wird sein, zu zeigen, dass es ein $t > 0$ gibt, für das $f(t) = i$ ist. Es gibt sogar ein minimales solches t. Nennen wir es t_0. Dann definieren wir die Zahl π mittels $\pi := 2t_0$.

5. Die Verbindung zur Geometrie: Stellt man sich $t \mapsto f(t)$ als Beschreibung der Bewegung eines Punktes vor (der zum Zeitpunkt t am Ort $f(t)$ ist), so ist $|f'(t)|$ die Geschwindigkeit des Punktes. Wir werden sehen, dass $|f'(t)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Daher ist (für $t > 0$) die Länge des im Zeitintervall $[0, t]$ durchlaufenen Weges gerade t. Also ist t die **Bogenlänge** des Kreisabschnitts von $1 = f(0)$ bis $f(t)$ (zumindest für $0 < t < 2\pi$, für größere t muss man die Bogenlänge mehrmals um den Kreis herummessen).

   Da die Bogenlänge eines Kreisabschnitts offenbar proportional dem entsprechenden Winkel ist, ist t ein Maß für den Winkel zwischen den Strecken $\overline{0f(0)}$ und $\overline{0f(t)}$, nur in einer anderen Einheit als Grad.

   Dies zeigt auch, dass $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ die Länge eines Viertels des Einheitskreises ist, also 2π die Länge des Einheitskreises. Damit entspricht unsere Definition von π der üblichen, geometrischen.

6. Definiert man dann $\cos t = \operatorname{Re} e^{it}$ und $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$, so folgt nun sofort, dass sin und cos zumindest für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gerade die in der Schule definierten Funktionen sind (denn die Länge der Hypothenuse ist 1), nur dass der Winkel t als Bogenlänge gemessen wird.

7. Sämtliche wichtige Eigenschaften von sin und cos lassen sich aus der Definition mittels e^{it} leicht herleiten. Viele Rechnungen werden sogar vereinfacht, wenn man mit e^{it} rechnet statt direkt mit sin und cos. Wir werden dies am Beispiel der Additionstheoreme sehen.

Der einzige undefinierte Begriff hierbei war der der Bogenlänge (er wurde aber nur zur Veranschaulichung verwendet). Wir werden allgemein die Länge einer Kurve in Analysis II definieren. Dies wird genau mittels der Idee oben (über die Geschwindigkeit) geschehen!

12.1.1 Definition

Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$:

(1) $\mathbf{cos}\, \boldsymbol{t} := \operatorname{Re} e^{it}$

(2) $\mathbf{sin}\, \boldsymbol{t} := \operatorname{Im} e^{it}$

Bemerkung: Differenzierbarkeit und Ableitung haben wir bisher nur für Funktionen $I \to \mathbb{R}$ definiert, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall war. Für Funktionen

$f : I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ und

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

»funktionieren« wörtlich dieselben Definitionen, also sind Differenzierbarkeit und Ableitung auch definiert. Außerdem gelten dieselben Rechenregeln (wieder mit wörtlich denselben Beweisen) aus Sektion 11.1.

Bemerkung: Die anderen Sätze (Mittelwertsatz und Folgerungen, lokale Extrema, Konvexität, Satz von Taylor) gelten nicht oder nur in modifizierter Form. Dies wird in Analysis II und IV genauer behandelt.

Aus den Rechenregeln folgt sofort: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, also $f = u + iv$, dann ist

$$f' = u' + iv'$$

Beispiele:

(1) $\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ (hier ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$).

(2) $\dfrac{de^z}{dz} = e^z$ ($f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$).

(3) $\dfrac{d(ct)}{dt} = c$ für $c \in \mathbb{C}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = ct$).

(4) $\dfrac{de^{it}}{dt} = \dfrac{d(it)}{dt} \cdot e^{it} = i \cdot e^{it}$ (Kettenregel für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$).

Bemerkung: *Geometrische Anschauung*
Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$, dann beschreibt f eine Kurve in der Ebene (parametrisierte Kurve): $f(t)$ ist der Ort eines bewegten Teilchens zur Zeit t. Weiterhin bedeuten für $t_0 \in I$:

▷ $f'(t_0)$ die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0. Dies ist eine komplexe Zahl, kann also als Vektor (Geschwindigkeitsvektor) aufgefasst werden.

Denn $f(t) - f(t_0)$ ist der im Zeitintervall von t_0 bis t zurückgelegte Weg, also ist $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit auf diesem Zeitintervall. Für $t \to t_0$ ergibt sich also die Momentangeschwindigkeit.

▷ $|f'(t_0)|$ ist die momentane Absolutgeschwindigkeit (ohne Richtung).

12.1.2 Lemma

Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $|e^{it}| = 1$

(2) $\frac{d}{dt} e^{it} = ie^{it}$

Beweis: Zu (1): Es gilt nach den Regeln für komplexe Zahlen:

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}}$$

Weiterhin gilt:

$$e^{\overline{z}} = \overline{(e^z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Denn:

$$e^{\overline{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{(e^z)}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen verwendet man $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, woraus mittels Induktion $\overline{z}^n = \overline{z^n}$ folgt, und außerdem, dass $n!$ reell ist, also $\overline{n!} = n!$. Beim dritten Gleichheitszeichen verwendet man genau genommen die Stetigkeit der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto \overline{w}$. Also:

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{\overline{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1$$

Teil (2) des Lemmas wurde oben als Beispiel der Kettenregel hergeleitet. □

Bemerkung: Teil (2) des Lemmas sagt geometrisch für die Kurve $f(t) = e^{it}$, dass die Multiplikation mit i einer 90-Grad–Rotation gegen den Uhrzeigersinn entspricht:

▷ Der Geschwindigkeitsvektor $f'(t)$ zum Zeitpunkt t steht senkrecht auf dem Ortsvektor $f(t)$ (nicht überraschend, da die Tangente an einen Kreis senkrecht auf dem Radiusvektor steht).

▷ $f'(t)$ zeigt nach oben links, falls $f(t)$ im ersten Quadranten ist, nach unten links, wenn $f(t)$ im zweiten Quadranten ist, etc. $f(t)$ läuft also auf K gegen den Uhrzeigersinn für wachsendes t.

▷ Der Betrag der Geschwindigkeit ist $|ie^{it}| = 1$.

12.1.3 Satz (Euler-Formel)

Für $t \in \mathbb{R}$ ist
$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Dies ist für uns trivial, da ja $\cos t$ und $\sin t$ so definiert waren!

12.1.4 Satz

(1) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$; beide sind unendlich oft differenzierbar.

(3) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.

(4) $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(5) $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!}$

Beweis:

(1) Wende $|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2 = |z|^2$ auf $z = e^{it}$ an.

(2) Berechne die Ableitung von $f(t) = e^{it}$ auf zwei Arten:

$f'(t) = i \cdot e^{it}$ wie oben mit der Kettenregel.
$f'(t) = (\cos t + i \sin t)' = \cos' t + i \sin' t$ (Bemerkung nach Definition 12.1.1).

Also folgt $\cos' t + i \sin' t = ie^{it} = i(\cos t + i \sin t) = i \cos t - \sin t$. Da $\sin t$ und $\cos t$ reell sind, müssen hier Real- und Imaginärteile übereinstimmen, also $\cos' t = -\sin t$, $\sin' t = \cos t$.

(3) $e^{i0} = e^0 = 1 = 1 + i0$.

(4/5) Wir benutzen die Potenzreihe für e^{it}:

$$e^{it} = 1 + it + \frac{i^2t^2}{2!} + \frac{i^3t^3}{3!} + \frac{i^4t^4}{4!} + \frac{i^5t^5}{5!} + \ldots$$

Mit $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ folgt weiter

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots\right) \end{aligned}$$

nach Umsortieren. Durch Vergleich mit Real- und Imaginärteil von $e^{it} = \cos t + i \sin t$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Mittels der Potenzreihen in (4) und (5) kann man $\cos t$ und $\sin t$ auch für komplexes t definieren. Die anderen Punkte und die Euler-Formel gelten dann weiterhin, allerdings ist $\cos t$ und $\sin t$ nicht reell für t nicht reell, also ist dann auch $\cos t$ nicht der Realteil von e^{it}.

12.1.5 Lemma

Die Menge $T := \{t > 0 : \cos t = 0\}$ ist nicht leer und hat ein Minimum t_0. Für dieses gilt $\sin t_0 = 1$.

Beweis: Wir zeigen zunächst $\cos 2 < 0$:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} \underbrace{- \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}}_{<0} \underbrace{- \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}}_{<0} - \ldots,$$

denn für alle $n \geq 1$ ist $\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+2}}{(n+2)!}$. Somit folgt

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Wegen $\cos 0 = 1$ ergibt sich nach dem Zwischenwertsatz, dass es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\cos t = 0$ ist. Daher folgt $T \neq \emptyset$.

Dass T ein Minimum besitzt, folgt aus der Stetigkeit von cos: Sei $t_0 = \inf T$. Dies existiert, da T nach unten beschränkt (durch 0) und nicht leer ist. Nach der Definition des Infimums gibt es eine Folge (t_n) in T, die gegen t_0 konvergiert. Da alle $t_n > 0$ sind, ist $t_0 \geq 0$. Nach Definition von T bedeutet $t_n \in T$, dass $\cos t_n = 0$ ist für alle n. Aus $t_n \xrightarrow{n\to\infty} t_0$ und der Stetigkeit von cos folgt $\cos t_0 = \lim_{n\to\infty} \cos t_n = 0$. Also folgt $t_0 \in T$, denn wegen $\cos 0 = 1 \neq 0$ muss $t_0 \neq 0$, also $t_0 > 0$ sein.

Um $\sin t_0 = 1$ zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass $\cos t > 0$ für $t \in [0, t_0)$ (wegen der Minimalität von t_0). Wegen $\sin' = \cos$ ist also sin streng monoton wachsend auf $[0, t_0)$. Wegen $\sin 0 = 0$ folgt $\sin t_0 > 0$. Schließlich folgt aus $\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 = 1$ und $\cos t_0 = 0$ noch $|\sin t_0| = 1$, also muss $\sin t_0 = 1$ sein.

Anschaulich: e^{it} läuft gegen den Uhrzeigersinn. Es fängt für $t = 0$ bei 1 an. Daher muss der erste Punkt, wo es die imaginäre Achse schneidet (wo also $\cos t = 0$ ist), der Punkt i sein. □

12.1.6 Definition

Sei $t_0 = \min\{t > 0 :\ \cos t = 0\}$. Dann sei $\quad \pi := 2t_0$

Bemerkung: Wie am Anfang dieses Kapitels erklärt, ist damit $\frac{\pi}{2}$ die Länge eines Viertelkreises.

12.1.7 Satz

(1) $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(3) Die Funktionen cos, sin und $t \mapsto e^{it}$ sind 2π-periodisch.

(4) Aus $e^{it} = 1$ folgt $t = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Die Abbildung $[0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$, $t \mapsto e^{it}$ ist bijektiv.

Hierbei heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-periodisch,** falls $f(t + 2\pi) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. In (5) kann man $[0, 2\pi)$ durch ein beliebiges halboffenes Intervall der Länge 2π ersetzen.

Beweis:

(1/2) Mit t_0 wie oben ist $e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{it_0} = \cos t_0 + i \sin t_0 = 0 + i1 = i$ nach Lemma 12.1.5. Also
$e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{it} = i \cdot e^{it} = i\,(\cos t + i \sin t) = i \cos t - \sin t$ und andererseits
$e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$.
Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert die Behauptung.

(3) Durch viermalige Anwendung von

$$e^{i\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = i \cdot e^{it} \text{ folgt}$$
$$e^{i(t+2\pi)} = i^4 e^{it} = e^{it},$$

also die Behauptung für e^{it}. Für cos und sin folgt sie, indem man zu Real- bzw. Imaginärteil übergeht.

(4) Übung!

(5) Injektivität folgt sofort aus (4), da $e^{it} = e^{is} \Rightarrow e^{i(t-s)} = 1 \Rightarrow t - s = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und bei $t, s \in [0, 2\pi)$ nur $k = 0$ in Frage kommt. Surjektivität zeigt man zunächst im ersten Quadranten: Sei $|z| = 1$, $z = x + iy$ und $x \geq 0$, $y \geq 0$. Wegen $1 = |z|^2 = x^2 + y^2$ ist $y \leq 1$. Wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ existiert ein $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos t = y$ nach dem Zwischenwertsatz. Wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ folgt dann $|\sin t| = |x|$, und aus $\sin t \geq 0$, $x \geq 0$ folgt $\sin t = x$, also $e^{it} = z$. Die anderen Quadranten erhält man durch wiederholtes Multiplizieren mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. □

Beispiele: Einige interessante Beispiele sind:

$$\boxed{e^{i\pi} = -1\,, \quad e^{i \cdot 2\pi} = 1}$$

Als Beispiel dafür, dass die Euler-Formel auch beim Rechnen nützlich ist, zeigen wir:

12.1.8 Satz (Additionstheoreme)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Diese Formeln sehen kompliziert aus, sind aber nichts als die Summenregel für die Exponentialfunktion, wie der folgende Beweis zeigt!

Beweis: Wir benutzen wieder die Euler-Formel:

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} \\ &= e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i\sin x) \cdot (\cos y + i\sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)\,.\end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man die Behauptung. □

Satz 12.1.7 hat folgende nützliche Konsequenz:

12.1.9 Satz (und Definition)

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r > 0\,, \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Jedes solche Paar (r, φ) nennt man **Polarkoordinaten** von z.
Hierbei ist $r = |z|$, und φ ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis: Setze $r = |z|$, dann ist $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$, also $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$, also $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$.
Sind andererseits $z = re^{i\varphi}$ und $z = se^{i\psi}$ zwei solche Darstellungen, so folgt $r = |z| = s$, und dann $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$, und daraus $\varphi - \psi = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. □

Multiplikation ist in Polarkoordinaten besonders einfach:

$$z = re^{i\varphi}\,,\ w = se^{i\psi} \quad \Longrightarrow \quad zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

Dies folgt sofort aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion. Man multipliziert also die Beträge und addiert die Winkel.

Mit Polarkoordinaten kann man in $\mathbb{C}$ vorzüglich Wurzeln ziehen:

12.1.10 Satz

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}$. Dann hat z genau n n-te Wurzeln. Falls $z = re^{i\varphi}$ ist, so sind dies

$$se^{i\frac{\varphi}{n}}\,,\ se^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}\,,\ \ldots\,,\ e^{i\frac{\varphi+(n-1)\cdot 2\pi}{n}}\,,\ s = \sqrt[n]{r}\,.$$

Beweis: Dass die n-te Potenz dieser Zahlen z ist, folgt aus der Multiplikationsregel. Sie sind alle verschieden, da sich die Winkel um weniger als 2π unterscheiden. Es kann auch keine weiteren n-ten Wurzeln geben, da die polynomielle Gleichung $w^n = z$ (mit der Unbekannten w) den Grad n und somit höchstens n Nullstellen hat. (Man kann sich dies aber auch direkt mit Polarkoordinaten klarmachen.) □

Der Fall $z = 1$, in Verbindung mit der Euler-Formel, wird oft als **Satz von de Moivre** bezeichnet.

Bemerkung (Hauptwert für die Quadratwurzeln komplexer Zahlen):

Sei $z \neq 0$, $z = re^{i\varphi}$, wobei wir $\varphi \in [0, 2\pi)$ wählen. z hat Quadratwurzeln $w = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ und $\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = -w$. Dann liegt w in der oberen Halbebene ohne negative reelle Achse, also $\operatorname{Im} w \geq 0$, $w \nleq 0$. Dieses w nennt man manchmal den **Hauptwert** der Quadratwurzel aus z und bezeichnet es mit $\sqrt{z}$. Das verallgemeinert dann die auf den positiven reellen Zahlen definierte Funktion ›$\sqrt{\ }$‹.

Aber der Hauptwert hat einen Nachteil: Im Allgemeinen gelten die Wurzelgesetze nicht in gewohnter Form! Zum Beispiel ist $\sqrt{-1} = i$ und $\sqrt{1} = 1$, also

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1) \cdot (-1)}\,.$$

Folgender Grenzwert wird gelegentlich gebraucht. Noch wichtiger ist es, die Beweismethode zu verstehen!

12.1.11 Satz

Mit $t \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Beweis: Wie schon gezeigt, lässt sich $\sin t$ darstellen als

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \ldots,$$

also ist für $t \neq 0$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} \ldots$$

und somit

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,,$$

denn alle Terme außer dem ersten gehen gegen 0 für $t \to 0$.

Genaue Argumentation: Die Potenzreihe $1 - \frac{t^2}{3!} + \ldots$ hat positiven Konvergenzradius und ist daher stetig bei 0. Also ist der Grenzwert für $t \to 0$ gleich dem Wert für $t = 0$. □

Bemerkung (Regel von l'Hospital): In den meisten Büchern wird dieser Grenzwert mittels der Regel von l'Hospital berechnet. Ich habe diese Regel aus gutem Grund nicht behandelt: Die Grenzwerte, die man mit dieser Regel berechnen kann, kann man in den meisten Fällen auch auf andere, einsichtspendendere Weise erhalten.

12.2 Weitere trigonometrische Funktionen

12.2.1 Definition

Tangens und Cotangens:
$$\mathbf{tan}\, x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \neq \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \ldots\right)$$
$$\mathbf{cot}\, x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \left(x \neq \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots\right)$$

12.2.2 Satz

Die Ableitung des $\tan$ ist
$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

Beweis: Wir benutzen die Quotientenregel für die Ableitung:

$$\begin{aligned}\tan' &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cdot \cos - \cos' \cdot \sin}{\cos^2} \\ &= \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}\ , \text{ und auch} \\ &= \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2\end{aligned}$$

□

12.2.3 Definition

Der Arcustangens
$$\textbf{arctan} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$
ist per Definition die Umkehrfunktion zu $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

Dies ist eine sinnvolle Definition, denn:

- ▷ tan wächst wegen $\tan' = 1 + \tan^2 \geq 1$ streng monoton auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- ▷ $\tan t \to -\infty$ für $t \to -\frac{\pi}{2}+$ und $\tan t \to \infty$ für $t \to \frac{\pi}{2}-$,
- ▷ tan ist stetig auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- ▷ also ist $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv (Satz 10.3.6).

12.2.4 Satz

Es gilt:
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Beweis:
$$\begin{aligned} & y = \arctan x \\ \Leftrightarrow\quad & x = \tan y \\ \Rightarrow\quad & \frac{dx}{dy} = \frac{d \tan y}{dy} = 1 + \tan^2 y \end{aligned}$$

Nach der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion gilt dann:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$
□

13 Integration

Es gibt zwei Sichtweisen zur Integration: *Flächenberechnung* und *»Inverses zur Differentiation«*.

Wir werden das Integral so definieren, dass es unserer Vorstellung von einem Flächeninhalt unter einem Graphen entspricht. Dann werden wir zeigen, dass Integration wirklich in gewissem Sinne die inverse Operation zur Differentiation ist. Dies wird dann zur praktischen Berechnung von Integralen verwendet. Was bedeutet Flächeninhalt? Wir nähern uns diesem Begriff schrittweise:

- Für ein Rechteck mit Seiten A und B gilt: Flächeninhalt $= A \cdot B$.
- Für eine endliche disjunkte Vereinigung von Rechtecken gilt: Flächeninhalt ist gleich Summe der Einzelflächeninhalte.
- Allgemeinere Mengen werden durch endliche disjunkte Vereinigungen von Rechtecken approximiert und der Flächeninhalt wird dann als Grenzwert definiert.

Wir werden nur Flächeninhalte »unter Graphen«, genauer von Mengen der Form

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b \ \text{ und } \ y \text{ liegt zwischen } 0 \text{ und } f(x)\}$$

berechnen. Hierbei ist f eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dabei werden Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt!

Bemerkung: Die Berechnung des Flächeninhalts allgemeinerer Figuren kann man meist auf diesen Fall zurückführen (z. B. ist die Kreisfläche das Doppelte der Halbkreisfläche, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$). Oft ist es aber natürlicher, hierbei mit mehrdimensionalen Integralen zu arbeiten. Diese werden in Analysis III behandelt.

Die beiden ersten Schritte (Rechtecke und deren endliche disjunkte Vereinigungen) entsprechen den Treppenfunktionen.

13.1 Das Integral für Treppenfunktionen

Bis auf weiteres seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

13.1.1 Definition

Eine Funktion $T : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion,** falls es Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ gibt mit

(1) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, und

(2) T ist konstant auf jedem der Intervalle (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$.

Die Werte an den Punkten $x_0, \ldots, x_n$ können beliebig sein.

13.1.2 Definition

Sei T eine Treppenfunktion, und sei $T(x) = a_i$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{T} \ := \ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,, \text{ auch geschrieben } \int_a^b \underbrace{T(x)}_{\substack{\text{entspr.}\\ a_i}} \ \underbrace{dx}_{\substack{\text{entspr.}\\ x_i - x_{i-1}}}$$

Bemerkung: Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b \text{ und } y \text{ liegt zwischen } 0 \text{ und } T(x)\}$ ist die disjunkte Vereinigung von n Rechtecken mit den Seitenlängen $|a_i|$ und $x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \dots, n)$, und von Strecken der Längen $|T(x_i)|$ $(i = 0, \dots, n)$. Da die Rechtecke den Flächeninhalt $|a_i| \cdot (x_i - x_{i-1})$ und die Strecken den Flächeninhalt null haben, ist $\int_a^b T$ der **»signierte Flächeninhalt«** zwischen dem Graphen von T und der x-Achse. Das heißt: Flächen unterhalb der x-Achse (also mit $a_i < 0$) werden negativ gezählt.

Frage: Wie erhält man den »echten« Flächeninhalt zwischen dem Graphen von T und der x-Achse? Antwort: Als $\int_a^b |T|$.

Beispiel: Für $T : [0,2] \to \mathbb{R}$, $T(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ -1 & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ ist $\displaystyle\int_0^2 T = 1 \cdot (1-0) + (-1) \cdot (2-1) = 0$.

Die Funktion T legt die potentiellen Sprungstellen x_i nicht eindeutig fest. Man könnte ein neues x_i hinzufügen, ohne die Funktion zu ändern: $T(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ -1 & \text{für } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Damit sich Definition 13.1.2 überhaupt »Definition« nennen darf, ist also nachzuprüfen:

13.1.3 Lemma

$$\int_a^b T \text{ ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der } x_i.$$

Beweis (Skizze): Man prüft zunächst, dass das Verfeinern, also das Einfügen einer weiteren (potentiellen) Sprungstelle, sagen wir x' zwischen x_{i-1} und x_i, den Wert der Summe auf der rechten Seite in Definition 13.1.2 nicht ändert. Mittels Induktion ist dann klar, dass man auch mehrere Sprungstellen einfügen, d. h. eine gegebene Darstellung von T beliebig verfeinern darf, ohne den Wert der Summe zu ändern.

Ist dann T mittels der Sprungstellen $x_0, \dots, x_n$ und auch mittels der Sprungstellen $y_0, \dots, y_m$ gegeben, so vergleichen wir beide Darstellungen mit ihrer gemeinsamen Verfeinerung, deren Sprungstellen $\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}$ sind. Da die Werte der x-Summe und der y-Summe gleich dem Wert für diese Verfeinerung sind, sind sie gleich. $\square$

Folgende Eigenschaften des Integrals sind einfach, aber zentral.

13.1.4 Lemma

Die Abbildung $$\int_a^b : \{\text{Treppenfunktionen auf } [a,b]\} \to \mathbb{R}$$

ist für alle Treppenfunktionen T, S auf $[a,b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

(1) linear, d. h. $$\int_a^b \alpha \cdot T = \alpha \cdot \int_a^b T \quad \text{und} \quad \int_a^b (T+S) = \int_a^b T + \int_a^b S$$

(2) beschränkt, d. h. $$\left| \int_a^b T \right| \le \left(\sup_{[a,b]} |T| \right) \cdot (b-a)$$

(3) monoton, d. h. $$T \le S \ \Rightarrow \ \int_a^b T \le \int_a^b S$$

$T \le S$ heißt: $T(x) \le S(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweis (2):

$$\left| \int_a^b T \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \le \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot |x_i - x_{i-1}| \le \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[a,b]} |T| \right) \cdot |x_i - x_{i-1}|$$

$$\overset{x_i > x_{i-1}}{=} \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[a,b]} |T| \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \left(\sup_{[a,b]} |T| \right) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \left(\sup_{[a,b]} |T| \right) \cdot (b-a) \qquad \square$$

Bemerkung: In Behauptung (1) wurde stillschweigend verwendet, dass die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ein Vektorraum ist, d. h. dass mit T, S auch αT (für $\alpha \in \mathbb{R}$) und $T+S$ eine Treppenfunktion ist. Dies folgt für αT unmittelbar aus der Definition, und für $T+S$ mittels der Idee der gemeinsamen Verfeinerung von zwei Sprungstellenmengen, ähnlich wie im Beweis von Lemma 13.1.3.

Die Aussagen (1) und (3) folgen dann direkt aus der Definition.

13.2 Das Integral für Regelfunktionen

Wir führen den Begriff »Regelfunktion« ein. Für diese werden wir in sinnvoller Weise ein Integral definieren können. Dann werden wir sehen, dass alle stetige Funktionen Regelfunktionen sind.

> **Bemerkung:** Mit mehr Arbeit kann man das Integral auch für allgemeinere Funktionen definieren. Dies ist hauptsächlich für theoretische Zwecke nützlich (und notwendig). In Analysis III wird zu diesem Zweck das sogenannte Lebesgue-Integral eingeführt.

13.2.1 Definition

Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion,** falls es Treppenfunktionen $T_1, T_2, T_3, \dots$ gibt, so dass $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert: $f = \operatorname*{glm\,lim}_{n\to\infty} T_n$

Zur Erinnerung, $f = \operatorname*{glm\,lim}_{n\to\infty} T_n$ heißt: $\sup_{[a,b]} |\, f(x) - T_n(x)\,| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beispiel: Sei $f(x) = x$ auf $[0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere die Treppenfunktion T_n auf $[0,1]$ durch

$$T(1) = 1 \quad \text{und} \quad T_n(x) = \frac{i-1}{n} \quad \text{falls } x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right), \; i = 1, \dots, n\,.$$

Also $x_i = \frac{i}{n}$ und $a_i = \frac{i-1}{n}$. Da für $x \in [x_{i-1}, x_i)$ sicherlich $0 \le x - a_i < \frac{1}{n}$ gilt (für jedes i), und da $T_n(1) = f(1)$ ist, folgt $\sup |\, f(x) - T_n(x)\,| = \frac{1}{n}$, und wegen $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ dann $f = \operatorname*{glm\,lim}_{n\to\infty} T_n$.

13.2.2 Satz (und Definition)

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Regelfunktion, $f = \operatorname*{glm\,lim}_{n\to\infty} T_n$ für Treppenfunktionen T_n, dann konvergiert die Folge der Integrale

$$\left(\int_a^b T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der T_n. Wir definieren

$$\int_a^b f \;:=\; \lim \int_a^b T_n$$

Beispiel: Im vorigen Beispiel ist

$$\int_0^1 T_n \;=\; \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n}\cdot \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)}_{\frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^n (i-1)\,, \text{ und mit } j := i-1$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} j \;=\; \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2} \;=\; \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\,, \text{ also } \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

Beweis:

1. $\left(\int_a^b T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeige dazu, dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist:

   Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 so groß, dass für $n \ge n_0$ gilt: $\sup_{[a,b]} |\, f - T_n\,| < \varepsilon$. Dann ist für $n, m \ge n_0$: $|\, T_n - T_m\,| \le |\, T_n - f\,| + |\, f - T_m\,|$, also $\sup_{[a,b]} |\, T_n - T_m\,| < 2\varepsilon$. Verwende Teile (2) und (1) von Lemma 13.1.4 : $|\int_a^b (T_n - T_m)\,| \le 2\varepsilon\cdot(b-a)$ und $|\int_a^b (T_n - T_m)\,| = |\int_a^b T_n - \int_a^b T_m|$.

2. Unabhängigkeit. Seien T_n, S_n Treppenfunktionen und $f = \operatorname{glm}\lim_{n\to\infty} T_n = \operatorname{glm}\lim_{n\to\infty} S_n$.

   Wir müssen zeigen, dass $\lim \int_a^b T_n = \lim \int_a^b S_n$ gilt. Dies geht mit dem folgenden hübschen Trick: Sei (Z_n) die Folge $T_1, S_1, T_2, S_2, T_3, S_3 \ldots$ Dann ist $f = \operatorname{glm}\lim_{n\to\infty} Z_n$. Wegen (1) konvergiert die Folge $\left(\int_a^b Z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Daher konvergiert jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert. Da $\left(\int_a^b T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int_a^b S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ solche Teilfolgen sind, folgt die Behauptung. □

13.2.3 Satz

Die Abbildung $\displaystyle\int_a^b : \{\text{Regelfunktionen auf } [a,b]\} \to \mathbb{R}$ ist linear, beschränkt und monoton (s. Lemma 13.1.4).

Beweis: Übung! (Anwendung der Grenzwertregeln.) □

Wir haben nun zwar einen hübschen Integralbegriff für Regelfunktionen, aber wir wissen noch nicht, dass unsere üblichen Funktionen, z. B. x^n, log, exp und sin wirklich Regelfunktionen sind. Dies folgt aus ihrer Stetigkeit, wie wir gleich sehen werden. Es geht auch etwas allgemeiner:

13.2.4 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **stückweise stetig,** falls es $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ gibt mit

(1) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$,

(2) f ist stetig auf jedem der Intervalle (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$, und

(3) die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_i+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_i-} f(x)$ existieren für $i = 0, \ldots, n-1$ bzw. für $i = 1, \ldots, n$.

Zum Beispiel sind Treppenfunktionen stückweise stetig.

13.2.5 Satz

Stückweise stetige Funktionen sind Regelfunktionen.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass auch Funktionen mit *abzählbar vielen* »Sprungstellen« noch Regelfunktionen sind. Umgekehrt ist jede Regelfunktion von dieser Art. Genauer: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion genau dann, wenn es eine abzählbare Menge $M \subset [a,b]$ gibt, so dass f auf $[a,b] \setminus M$ stetig ist und bei jedem $x \in M$ beide einseitigen Grenzwerte von f existieren. Siehe Königsberger, Kapitel 11.2. Beispiel einer Funktion, die nicht Regelfunktion ist: Die Funktion, die bei den rationalen Zahlen gleich eins und sonst gleich null ist.

Beweis: Der stückweise stetige Fall lässt sich durch Zerlegung des Intervalls leicht auf den stetigen zurückführen.

Sei also $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir müssen Treppenfunktionen T_n $(n \in \mathbb{N})$ konstruieren, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Wie geht das?

Betrachten wir das Beispiel $f(x) = x$ und versuchen es zu verallgemeinern!

Also: Sei $n \in \mathbb{N}$. Teile das Intervall $[a,b]$ in n gleiche Teile, setze also $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Für $i = 1, \ldots, n$ setze $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ und definiere

$$T_n(x) = \inf_{I_i} f, \quad \text{falls } x \in [x_{i-1}, x_i),$$

und $T_n(b) = f(b)$. Da f stetig ist, ist das Infimum sogar ein Minimum, also existiert ein $\overline{x_i} \in I_i$ mit $T_n(x) = f(\overline{x_i})$ für $x \in [x_{i-1}, x_i)$.

Wir wollen zeigen, dass T_n für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
Überlegung: Ist $x \in [x_{i-1}, x_i)$, so folgt $|T_n(x) - f(x)| = |f(\overline{x_i}) - f(x)|$. Da außerdem $\overline{x_i} \in I_i$ ist, gilt $|x - \overline{x_i}| \leq \frac{b-a}{n}$, der Länge des Intervalls I_i. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt $\overline{x_i}$ gilt also: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|T_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in I_i$ gilt, sobald $n \geq n_0$ ist.

Ist das schon ein Beweis? Nein, es ist nicht einmal ganz korrekt, denn der Punkt $\overline{x_i}$ hängt selbst von n ab (genau wie alle x_i); außerdem braucht man für die *gleichmäßige* Konvergenz auf $[a,b]$ (nicht nur auf I_i), dass bei gegebenem ε dasselbe n_0 für alle i funktioniert.

Beides wird durch den folgenden Satz erledigt. Wie man mit dessen Hilfe die Überlegung oben zu einem Beweis macht, sei der geneigten Leserin überlassen. □

13.2.6 Satz

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a,b]$ gilt: $$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Eine Funktion mit dieser Eigenschaft nennt man **gleichmäßig stetig.** Man vergleiche diese Eigenschaft mit der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit in Satz 10.1.5: Dort fixierte man zunächst x_0, dann durfte δ von ε und x_0 abhängen. Hier muss dasselbe δ bei gegebenem ε für alle y (die hier das x_0 ersetzen) gleichzeitig funktionieren.

Bemerkung: Ist f auf einem beliebigen anstatt auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall definiert, so gilt die Aussage des Satzes nicht. Zum Beispiel ist $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis: Übung! Hinweis: Indirekter Beweis, verwende Bolzano-Weierstrass. □

Integration verträgt sich gut mit Grenzprozessen in folgendem Sinne.

13.2.7 Satz

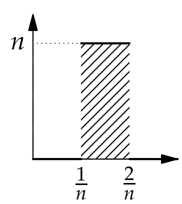
Sind f_n $(n \in \mathbb{N})$ und f Regelfunktionen auf $[a,b]$, und konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, dann gilt: $$\int_a^b f_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f$$

Beweis: $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \underbrace{\sup|f_n - f|}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty} \cdot (b-a) \longrightarrow 0.$ □

Nimmt man nur an, dass die f_n *punktweise* gegen f konvergieren, dann stimmt dies nicht! Dies ist der Grund dafür, dass wir in diesem Kapitel immer die gleichmäßige Konvergenz fordern, auch bei der Definition der Regelfunktionen.

Beispiel: Auf dem Intervall $[0,1]$ sei $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ für jedes $x \in [0,1]$ (denn falls $x \neq 0$, so gilt $f_n(x) = 0$ für $n > \frac{2}{x}$, und für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle n), d. h. die f_n konvergieren punktweise gegen f.



Nun ist aber $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ für alle n und $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, also $\int_0^1 f_n \not\to \int_0^1 f \quad (n \to \infty)$.

Bemerkung: Das Problem hier ist, dass die f_n nicht gleichmäßig beschränkt sind – genauer sagt einer der Hauptsätze der Lebesgue-Theorie des Integrals, dass $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ schon dann gilt, wenn die f_n punktweise gegen f konvergieren und wenn es eine integrierbare Funktion g gibt, so dass $|f_n| \leq g$ für alle n gilt. »Integrierbar« können wir hier nicht definieren; beispielsweise sind Regelfunktionen immer integrierbar. Dies ist wesentlich schwieriger zu beweisen als Satz 13.2.7.

Die wichtigste Anwendung von Satz 13.2.7 ist auf Potenzreihen, siehe Satz 13.4.3.

Es ist nützlich (etwa im Beweis des Hauptsatzes 13.3.3), bei Ausdrücken wie $\int_a^b f$ nicht darauf achten zu müssen, ob $a < b$ ist oder nicht.

13.2.8 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

Falls $a < b$ und f Regelfunktion auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f$ schon definiert.

Falls $a = b$, so definiere $\int_a^b f := 0$.

Falls $a > b$ und f Regelfunktion auf $[b, a]$, so definiere $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Dies ist gerade so gemacht, dass folgendes stimmt.

13.2.9 Satz

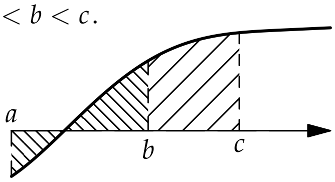
Ist f Regelfunktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, und sind $a, b, c \in I$, dann gilt:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Hierbei ist »Regelfunktion auf einem Intervall« analog zum Spezialfall »Regelfunktion auf $[a, b]$« definiert. Es ist klar, dass man durch Einschränkung einer Regelfunktion auf ein kleineres Intervall wieder eine Regelfunktion erhält, daher sind die Integrale definiert.

Beweis:

1. $a < b < c$.



Die Aussage ist intuitiv klar. Formal beweist man sie zunächst für Treppenfunktionen (direkt aus der Definition) und dann durch Grenzübergang für Regelfunktionen.

2. $a < c < b$. Dann gilt
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^c f,$$
wobei wir im ersten Schritt die vorangegangene Definition und im zweiten Schritt den ersten Fall verwendet haben.

Die anderen Fälle beweist man analog. □

13.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie berechnet man Integrale? Wir haben bisher eine konzeptuelle Definition, und mit dieser haben wir $\int_0^1 x\,dx$ ausgerechnet. Für kompliziertere Funktionen wäre dieses Verfahren aber extrem aufwändig.

Eines der Wunder der Differential- und Integralrechnung ist, dass es (in vielen Fällen) auch einfacher geht. Dies wird aus dem »Hauptsatz« folgen.

13.3.1 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls F differenzierbar auf I ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

13.3.2 Lemma

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + C$ eine Stammfunktion von f, für jedes $C \in \mathbb{R}$.

(2) Sind F, G Stammfunktionen von f, so ist $F - G$ konstant, d. h. es existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $F = G + C$.

Beweis:

(1) $(F+C)' = F' + \underbrace{C'}_{=0} = F' = f$.

(2) Da $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ auf I, ist $F - G$ konstant. □

13.3.3 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei f Regelfunktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in I$.

(1) Für die Funktion $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \;\; (x \in I)$ gilt:

Falls f in $x_0 \in I$ stetig ist, so ist F in x_0 differenzierbar und

$$F'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Insbesondere: Ist f stetig auf I, dann ist F Stammfunktion für f.

(2) Ist f stetig auf I und G eine beliebige Stammfunktion für f, so gilt für $a, b \in I$:

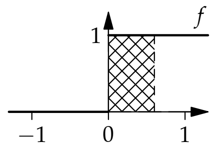
$$\int_a^b f(x)\,dx \; = \; G(b) - G(a) \; =: \; \boldsymbol{G|_a^b}$$

In Teil (2) kann die Stetigkeitsannahme weggelassen werden, doch ist der Beweis dann etwas komplizierter. Siehe Königsberger, Kapitel 11.4.

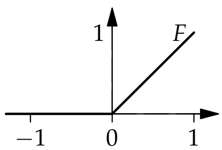
Für »praktische« Zwecke braucht man meist Teil (2) des Hauptsatzes, denn er erlaubt die Auswertung von Integralen (also die Flächenberechnung) für viele Funktionen. Teil (1) ist für theoretische Zwecke oft nützlich und wird zum Beweis von Teil (2) verwendet.

Beispiele:

(1) Auf $I = [-1, 1]$ sei $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$



Für $a = -1$ ist dann $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$



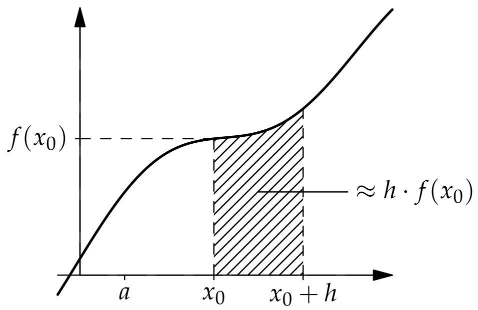
Offenbar ist $F'(x) = 0$ für $x < 0$ und gleich 1 für $x > 0$. Bei $x_0 = 0$ ist f unstetig und F nicht differenzierbar. Also wird die Stetigkeitsannahme in (1) wirklich benötigt.

(2) Wegen $\dfrac{d}{dx} \cdot \dfrac{x^4}{4} = \dfrac{4x^3}{4} = x^3$ ist $\displaystyle\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$.

Beweis (des Hauptsatzes):

(1) Wir sehen uns erst einmal den Differenzenquotienten von F bei x_0 mit »Schrittweite« h an. Zunächst ist nach Satz 13.2.9

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f\,.$$



Die Zeichnung zeigt schon, dass diese Fläche etwa $h \cdot f(x_0)$ sein sollte, da die schraffierte Fläche dem Rechteck mit Seitenlängen $f(x_0)$ und h ziemlich ähnlich sieht, und dass diese Approximation mit $h \to 0$ besser wird.

Wenn wir dies, insbesondere das Wörtchen »etwa«, durch Rechnung präzisieren könnten, wären wir am Ziel.

Da wir zeigen wollen, dass der Differenzenquotient nahe bei $f(x_0)$ liegt, betrachten wir die Differenz

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \;=\; \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\,.$$

Wie weiter? Der Inhalt der schraffierten Fläche ist das Integral. Daher sollten wir versuchen, den Inhalt der sie approximierenden Rechteckfläche auch durch ein Integral auszudrücken:

$$f(x_0) \cdot h = f(x_0) \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$$

Damit folgt

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right| \;=\; \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [\,f(t) - f(x_0)\,]\,dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{h} \cdot \sup_{\substack{t \text{ zw. } x_0 \\ \text{und } x_0+h}} |\,f(t) - f(x_0)\,| \cdot (x_0 + h - x_0) \;=\; \sup_{\substack{t \text{ zw. } x_0 \\ \text{und } x_0+h}} |\,f(t) - f(x_0)\,|\,.$$

Damit sind wir fast fertig. Denn wenn f stetig in x_0 ist, so gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für x mit $|\,x - x_0\,| < \delta$ gilt: $|\,f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$.

Für $|\,h\,| < \delta$ ist dann $\sup\limits_{\substack{t \text{ zw. } x_0 \\ \text{und } x_0+h}} |\,f(t) - f(x_0)\,| < \varepsilon$, also auch $\left| \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$.

Somit ist $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$, was zu zeigen war.

(2) Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ wie in (1). Nach Lemma 13.3.2(2) ist $F - G = C$ ($C \in \mathbb{R}$ Konstante), also

$$\underbrace{F(b)}_{\int_a^b f} - \underbrace{F(a)}_{\int_a^a f = 0} = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)\,.$$

□

13.3.4 Definition

Sei f eine auf einem Intervall definierte stetige Funktion. Das **unbestimmte Integral** von f, $\boldsymbol{\int f(x)\,dx}$, ist die Menge der Stammfunktionen von f.

Zur Abgrenzung nennt man $\int_a^b f$ auch das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$. Beachte: Das unbestimmte Integral ist eine Funktion (genauer eine Menge von Funktionen), das bestimmte Integral ist eine Zahl!

Schreibweise: Falls F eine beliebige Stammfunktion von f ist, gilt nach Lemma 13.3.2
$$\int f(x)\,dx = \{F + C : \ C \in \mathbb{R}\}.$$
Hier lässt man üblicherweise die Mengenklammern weg und schreibt
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$
Noch etwas ungenauer schreibt man auch einfach $\int f(x)\,dx = F(x)$, falls F *eine* Stammfunktion zu f ist, jedoch muss man dann aus zwei Gründen vorsichtig sein:

(1) Das Gleichheitszeichen ist nur als »F ist eine Stammfunktion« zu lesen, nicht im üblichen Sinne. Z. B. ist offenbar
$$\int 2x\,dx = x^2 \text{ und } \int 2x\,dx = x^2 + 1\,,\text{ aber nicht } x^2 = x^2 + 1\,.$$

(2) Die Schreibweise $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ erinnert einen daran, dass es neben F noch unendlich viele weitere Stammfunktionen gibt. Das ist beispielsweise im Kontext der Differentialgleichungen wichtig (Analysis II).

Aus den früher berechneten Ableitungen können wir eine Reihe von Stammfunktionen hinschreiben, die »Grundintegrale«. Wo nicht anders angegeben, ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$:

$f(x)$		$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\boldsymbol{x^n}$	$n\in\mathbb{Z},\ n\neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\boldsymbol{e^x}$	e^x
$\boldsymbol{x^\alpha}$	$\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq -1,\ x>0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\boldsymbol{\cos x}$	$\sin x$
$\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$	$x\neq 0$	$\log\lvert x\rvert$	$\boldsymbol{\sin x}$	$-\cos x$
			$\boldsymbol{\dfrac{1}{1+x^2}}$	$\arctan x$

Warum stehen bei $\log|x|$ die Betragsstriche? Zunächst ist $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ kein Intervall, in Wirklichkeit betrachten wir hier also zwei Funktionen: Erstens $\frac{1}{x}$ für $x \in (0,\infty)$, und zweitens $\frac{1}{x}$ für $x \in (-\infty, 0)$. Prüfen wir nach, dass in beiden Fällen die Ableitung von $\log|x|$ gleich $\frac{1}{x}$ ist!

(1) Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$, also ok.

(2) Für $x < 0$ ist $|x| = -x$, also $\log|x| = \log(-x)$, und nach der Kettenregel
$$\frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{d(-x)}{dx}\cdot\frac{1}{-x} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}\,.$$
Also ist $\log|x|$ auch in dem Intervall $(-\infty, 0)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$.

Bemerkung: Alternative Formulierungen des Hauptsatzes, weil er so wichtig ist:

▷ **Kurz und bündig**

1. Ein unbestimmtes Integral (also eine Stammfunktion) kann man durch das bestimmte Integral mit variabler oberer Grenze erhalten.

2. Bestimmte Integrale lassen sich mittels einer beliebigen Stammfunktion berechnen.

▷ **Teil 2** kann auch so formuliert werden (für differenzierbares G mit stetiger Ableitung):
$$\int_a^b G'(t)\,dt = G(b) - G(a)\,.$$

▷ **»Differentiation ist invers zu Integration« in der Sprache der linearen Algebra**

Wir führen zunächst einige geläufige Bezeichnungen ein:

13.3.5 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **stetig differenzierbar,** falls f differenzierbar auf I und f' stetig auf I ist.

(1) $\boldsymbol{C^0(I,\mathbb{R})} := \{\text{stetige Funktionen } I \to \mathbb{R}\}$

(2) $\boldsymbol{C^1(I,\mathbb{R})} := \{\text{stetig differenzierbare Funktionen } I \to \mathbb{R}\}$

Folgende Aussagen folgen unmittelbar aus den Definitionen und aus den Rechenregeln für Ableitungen und Integrale:

(1) $C^0(I,\mathbb{R})$, $C^1(I,\mathbb{R})$ sind Vektorräume. Das Nullelement ist jeweils die Funktion, die konstant gleich null ist.

(2) Die Abbildung $\mathrm{Diff} : C^1(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I,\mathbb{R})\,,\ F \longmapsto F'$ ist linear.

(3) Sei $a \in I$. Dann ist die Abbildung $\mathrm{Int} : C^0(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^1(I,\mathbb{R})\,,\ f \longmapsto (x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt)$ wohldefiniert und linear.

Die Differenzierbarkeit von $\mathrm{Int}(f)$ mit stetiger Ableitung folgt aus Teil (1) des Hauptsatzes.

Wir würden gerne sagen, dass die Aussage des Hauptsatzes darin besteht, dass Diff und Int zueinenander inverse Abbildungen sind. Das stimmt aber nicht ganz, denn für jede konstante Funktion F ist $\mathrm{Diff}(F) = 0$, also ist Diff nicht injektiv, mithin nicht invertierbar.

Mit einer kleinen Modifikation stimmt's aber doch: Sei $a \in I$. Betrachte den Untervektorraum

$$C_a^1(I,\mathbb{R}) := \{F \in C^1(I,\mathbb{R}) : F(a) = 0\}\,,$$

und die Einschränkungen $\mathrm{Diff}_a : C_a^1(I,\mathbb{R}) \to C^0(I,\mathbb{R})$ und $\mathrm{Int}_a : C^0(I,\mathbb{R}) \to C_a^1(I,\mathbb{R})$ von Diff bzw. Int. (Beachte, dass $\mathrm{Int}(f)$ tatsächlich in $C_a^1(I,\mathbb{R})$ liegt, da $\int_a^a f = 0$.)

Die Aussage des Hauptsatzes ist nun:

(1) $$\mathrm{Diff}_a \circ \mathrm{Int}_a = \mathrm{Id}_{C^0(I,\mathbb{R})}$$

(2) $$\mathrm{Int}_a \circ \mathrm{Diff}_a = \mathrm{Id}_{C_a^1(I,\mathbb{R})}$$

Hierbei bezeichnet wie üblich Id_V die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}_V : V \to V,\ v \mapsto v$, für einen beliebigen Vektorraum V.

13.4 Berechnung von Integralen: Partielle Integration, Substitution und Potenzreihen

Wie integriert man praktisch?

Ein allgemeines Verfahren gibt es nicht. Man kann in einer Tabelle nachsehen, zum Beispiel in unserer Tabelle der Grundintegrale, oder in einer der viel umfangreicheren Tabellen, die in vielen Büchern stehen. Wenn man Pech hat, steht das, was man sucht, nicht drin. Daher (und überhaupt) sollte man die grundlegenden Techniken kennen.

Zunächst ein paar grundsätzliche Bemerkungen:

▷ Warum gibt es Integraltabellen, aber keine Ableitungstabellen, bzw. warum sind die Ableitungstabellen so viel kürzer als die Integraltabellen?

Weil es für Integrale kein Analogon zur Produkt- oder Kettenregel (für Ableitungen) gibt.

Es gibt also kein allgemeines Verfahren, wie man aus $\int f$ *und* $\int g$ *das Integral* $\int fg$ *bestimmen kann!*

Und analog für die Komposition. Daher ist integrieren schwieriger als ableiten. Also braucht der faule (oder effiziente) Mensch längere Tabellen.

▷ Es gibt aber Verfahren, die *manchmal* funktionieren. Man muss probieren, herumspielen, sehen, ob man zum Ziel kommt, evtl. auf anderem Wege neu anfangen, . . .

Die wichtigsten Verfahren sind partielle Integration und Substitution. Sie kommen direkt von der Produkt- und Kettenregel für Ableitungen.

▷ Für manche elementare Funktionen gibt es keine elementaren Stammfunktionen!

Der Begriff »elementar« ist unpräzise, ich meine damit Funktionen, die sich mit Hilfe der Grundrechenarten, exp, log und der trigonometrischen Funktionen ausdrücken lassen.

Ein Beispiel ist $f(x) = \sin(x^2)$. Da f stetig ist, existiert eine Stammfunktion (Teil 1 des Hauptsatzes), aber sie lässt sich nicht elementar ausdrücken. (Das ist aber nicht leicht zu beweisen, für einen Beweis siehe Behrends: Analysis, Band 2.) Als Potenzreihe lässt sich eine Stammfunktion aber hinschreiben, wie wir nachher sehen.

▷ Unter den elementaren Funktionen gibt es auch eine Hierarchie. Etwa würde man rationale Funktionen (Brüche von Polynomen) elementarer nennen als exp, log und die trigonometrischen Funktionen. Während durch Ableiten eine Funktion nicht komplizierter (im Sinne dieser Hierarchie) werden kann, ist dies beim Integrieren möglich, z. B.:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \quad \text{oder} \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

▷ Im Folgenden meine ich mit »Integration« meist das Bestimmen einer Stammfunktion, also unbestimmte Integration. Daraus kann man dann bestimmte Integrale bestimmen (Hauptsatz, Teil 2).
Es gibt aber auch bestimmte Integrale, die man berechnen kann, obwohl man keine Stammfunktion des Integranden finden kann! Z. B. ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\,,$$

aber $\frac{\sin x}{x}$ hat keine elementare Stammfunktion. (Zur Bedeutung von Integralen mit Integrationsgrenzen $\pm\infty$ kommen wir im Kapitel 13.5.)
Die Berechnung solcher Integrale ist nur in Einzelfällen möglich. Manchmal erhält man sie »zufällig« als Nebenprodukt ganz anderer Überlegungen. Den Residuensatz als eine recht allgemeine Technik hierfür werden wir in der Funktionentheorie in Analysis IV kennenlernen.

13.4.1 Satz (Partielle Integration)

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und sind $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int u'v = u \cdot v - \int u \cdot v'\,, \quad \text{und für } a, b \in I\text{:} \quad \int_a^b u'v = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

Beweis: Aus der Produktregel für die Ableitung und aus der Linearität des Integrals folgt

$$(uv)' = u'v + u \cdot v'\,, \text{ also } uv = \int u'v + \int uv'\,, \text{ also } \int uv = u \cdot v - \int u \cdot v'\,.$$

Die Aussage über bestimmte Integrale folgt direkt aus der ersten Aussage mittels Teil 2 des Hauptsatzes.□

Beispiele:

(1) Aufgabe: Berechne $\int x \sin x \, dx$. Lösung: Man versucht, das Produkt $x \sin x$ so als $u'v$ zu schreiben, dass das aus der partiellen Integration resultierende Integral leichter zu berechnen ist. Beachte, dass die Bestimmung von u aus u' auch eine Integration ist!

Erster Versuch:

$$\begin{aligned} u'(x) &= x & &\text{also } u(x) = \frac{1}{2} x^2 \\ v(x) &= \sin x & &\text{also } v'(x) = \cos x \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x \, dx \,.$$

Das ist zwar korrekt, aber nutzlos.

Zweiter Versuch:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sin x & &\text{also } u(x) = -\cos x \\ v(x) &= x & &\text{also } v'(x) = 1 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= \mathbf{-x \cos x + \sin x\,.} \end{aligned}$$

Gegenprobe: $\frac{d}{dx} (-x \cos x + \sin x) = -1 \cos x - x(-\sin x) + \cos x = x \sin x$.

(2) Manchmal ist es noch weniger offensichtlich, was man als u' und was als v nehmen sollte.

Aufgabe: Berechne $\int \log x \, dx$. Lösung: Idee: Die Ableitung von $\log x$ ist einfacher als $\log x$ selbst, daher sollte man $v(x) = \log x$ versuchen. Dann bleibt nur $u' = 1$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & &\text{also } u(x) = x \\ v(x) &= \log x & &\text{also } v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\int \log x \, dx = \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\log x}_{v} \, dx = x \log x - \int x \, \frac{1}{x} \, dx = \mathbf{x \log x - x\,.}$$

Gegenprobe: ...

(3) Manchmal muss man mehrmals partiell integrieren.

Aufgabe: Berechne $\int x^2 e^x \, dx$. Lösung: x^2 vereinfacht sich durch Ableiten, während e^x durch Integrieren zumindest nicht komplizierter wird:

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & &\text{also } u(x) = e^x \\ v(x) &= x^2 & &\text{also } v'(x) = 2x \end{aligned}$$

und damit

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^x}_{u'} \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \,.$$

Das letzte Integral behandeln wir ähnlich:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= e^x & &\text{also } u_1(x) = e^x \\ v_1(x) &= x & &\text{also } v_1'(x) = 1 \end{aligned}$$

und damit

$$\int \underbrace{x}_{v_1} \cdot \underbrace{e^x}_{u_1'} \, dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x e^x - e^x \,.$$

Insgesamt folgt

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = \mathbf{(x^2 - 2x + 2) e^x\,.}$$

Bemerkung: Die partielle Integration ist wesentlich mehr als bloß ein Instrument zum Ausrechnen von Integralen. Mit ihrer Hilfe lassen sich oft interessante Informationen über nicht explizit berechenbare, meist bestimmte Integrale herausbekommen, zum Beispiel:

(1) Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$, siehe Beispiel (2) nach Satz 13.5.2,

(2) die Euler-MacLaurin-Formel, die es erlaubt, Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ mit Hilfe des Integrals $\int_0^n f(x) \, dx$ angenähert zu berechnen, indem sie explizit den Fehler angibt,

(3) man kann den Satz von Taylor auch gut mittels partieller Integration beweisen und bekommt so sogar noch etwas mehr heraus,

(4) der Abelsche Grenzwertsatz wird mittels partieller Summation, eines diskreten Analogons der partiellen Integration, bewiesen; er führt, zusammen mit den Taylorreihen von log und arctan, zu den hübschen Formeln

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Die Kettenregel für Ableitungen übersetzt sich wie folgt.

13.4.2 Satz (Substitutionsregel)

Sind $I, I' \in \mathbb{R}$ Intervalle, ist $s : I \longrightarrow I'$ stetig differenzierbar und ist $f : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\int (f \circ s) \cdot s' = \left(\int f \right) \circ s$$

Ist also F eine Stammfunktion für f, so ist $F \circ s$ eine Stammfunktion für $(f \circ s) \cdot s'$.
Für $a, b \in I$ gilt:

$$\int_a^b (f \circ s) \cdot s' = \int_{s(a)}^{s(b)} f$$

Achtung: Beim bestimmten Integral ändern sich die Integrationsgrenzen!

Beweis: Falls $F' = f$, so folgt aus der Kettenregel $\frac{d}{dx}\,[f(s(x))] = f'(s(x)) \cdot s'(x)$, also $(f \circ s)' = (f' \circ s) \cdot s$. Die Aussage über bestimmte Integrale folgt dann aus Teil 2 des Hauptsatzes. □

Beispiele: Ist F eine Stammfunktion für f, so ist

(1) $\boxed{\int f(x+c)\,dx = F(x+c),\ c \in \mathbb{R}.}$ Begründung: Setze $s(x) = x + c$, dann ist

$$\int \underbrace{f(s(x))}_{f(x+c)} \cdot \underbrace{s'(x)}_{1}\,dx = F(s(x)) = F(x+c).$$

(2) $\boxed{\int f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\,F(cx),\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.}$ Begründung: Setze $s(x) = cx$, dann ist

$$\int \underbrace{f(s(x))}_{f(cx)} \cdot \underbrace{s'(x)}_{c}\,dx = F(s(x)) = F(cx),$$

nun teile durch c.

In der Praxis hat man meist ein Integral $\int h(x)\,dx$ auszuwerten, bei dem $h(x)$ einen Ausdruck $s(x)$ »enthält«. Um die Substitutionsregel anzuwenden, versucht man, Funktionen f und s so zu finden, dass:

1. $h(x) = f(s(x)) \cdot s'(x)$ gilt, und
2. das Integral $F(y) = \int f(y)\,dy$ ausgewertet werden kann.

Wir verwenden die Variable x für Elemente von I und die Variable y für Elemente von I'. Nach dem Satz ist dann $\int h(x)\,dx = F(s(x))$. Dies lässt sich besser merken, wenn man formal wie folgt vorgeht:

Verfahren (für die Integration mittels Substitution):

Aufgabe: Bestimme $\boldsymbol{I = \int h(x)\, dx}$ mittels der Substitution $y = s(x)$.

1. Schritt: Leite $y = s(x)$ ab und löse $\frac{dy}{dx} = s'(x)$ formal nach dx auf: $\boldsymbol{dx = \frac{dy}{s'(x)}}$

2. Schritt: Schreibe $h(x)\, dx = h(x)\, \frac{dy}{s'(x)} = \frac{h(x)}{s'(x)}\, dy$ und eliminiere x vollständig mttels $y = s(x)$, also $x = s^{-1}(y)$. Dies führt auf eine Gleichung $\boldsymbol{h(x)\, dx = f(y)\, dy}$, wobei $f(y) = \frac{h(s^{-1}(y))}{s'(s^{-1}(y))}$.

3. Schritt: Evaluiere $F(y) = \int f(y)\, dy$.

4. Schritt: Rücksubstituiere $F(y) = F(s(x))$.

Resultat: $\boldsymbol{I = F(s(x))}$. ...Am besten sehen Sie sich jetzt erst eins der Beispiele unten an!

Rechtfertigung des Verfahrens: Wende Satz 13.4.2 auf f an. Wegen

$$f(y) = f(s(x)) = \frac{h(x)}{s'(x)} \quad \text{ist} \quad \int h(x)\, dx = \int f(s(x)) \cdot s'(x)\, dx = F(s(x))\,.$$

Damit dieses Verfahren funktioniert, muss

- ▷ f wie in Schritt 2 gefunden werden können. Die angegebene Gleichung für f setzt voraus, dass s' nicht verschwindet (denn es steht im Nenner), und dass s invertierbar ist (damit s^{-1} existiert).

  In manchen Fällen (siehe Beispiele 1 und 2 unten) kürzt sich genügend viel weg und f lässt sich auch ohne explizite Invertierung von s bestimmen, dann braucht man diese Bedingungen nicht. Denn nach der Rechtfertigung kommt es nur darauf an, dass die Beziehung $f(s(x))\, s'(x) = h(x)$ gilt.
- ▷ das Integral $\int f(y)\, dy$ ausgewertet werden können.

Beispiele:

(1) Aufgabe: Bestimme $I = \int x \cdot \sin(x^2)\, dx$. Lösung: Substituiere $y = x^2$.

Aus $\frac{dy}{dx} = 2x$ folgt $dx = \frac{dy}{2x}$, somit $x \sin(x^2)\, dx = x \sin(y)\, \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \sin y\, dy$, also

$$I = \frac{1}{2} \int \sin y\, dy = -\frac{1}{2} \cos y = \boldsymbol{-\frac{1}{2} \cos (x^2)}\,.$$

(2) Aufgabe: Bestimme $I = \int x^3 \sin(x^2 - 1)\, dx$. Lösung: Substituiere $y = x^2 - 1$.

Aus $\frac{dy}{dx} = 2x$ folgt $dx = \frac{dy}{2x}$, somit

$$\begin{aligned} x^3 \sin(x^2-1)\, dx &= x^3 \sin(x^2-1)\, \frac{dy}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\, x^2 \sin(x^2-1)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\, (y+1) \sin y\, dy\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (y+1) \sin y\, dy = \frac{1}{2} \int y \sin y + \frac{1}{2} \int \sin y\, dy \\ &= \frac{1}{2}\, (-y \cos y + \sin y - \cos y) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\, \left(-x^2 \cos (x^2-1) + \sin (x^2-1)\right)}\,. \end{aligned}$$

Empfohlen: Gegenprobe!

(3) Aufgabe: Bestimme $I = \int \sin(x^2)\, dx$. Lösungsversuch: Substituiere $y = x^2$.

Aus $\frac{dy}{dx} = 2x$ folgt $dx = \frac{dy}{2x}$, somit $\sin(x^2)\, dx = \sin y \frac{dy}{2x} = \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\, dy$.

Damit die Funktion $x \mapsto y = x^2$ invertierbar ist, müssen wir hier auf eins der Intervalle $\{x : x > 0\}$ oder $\{x : x < 0\}$ einschränken. Wir wählten $x > 0$ und haben daher x durch die positive Wurzel $\sqrt{y}$ ersetzt. Also

$$I = \int \frac{\sin y}{2\sqrt{y}\, dy}$$

Dies können wir leider genausowenig auswerten wie das ursprüngliche Integral!

Wenn nichts anderes hilft (wie im letzten Beispiel), kann man noch versuchen, den Integranden als Potenzreihe zu schreiben und diese Term für Term zu integrieren. Der Einfachheit halber untersuchen wir dies nur für Potenzreihen um Null:

13.4.3 Satz

Hat die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ den Konvergenzradius $R > 0$,

dann hat die Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ebenfalls den Konvergenzradius R

und ist eine Stammfunktion für f.

Mit anderen Worten, Potenzreihen dürfen gliedweise integriert werden.

Beweis: Dies ergibt sich leicht aus der Verträglichkeit des (bestimmten) Integrals mit gleichmäßiger Konvergenz: Sei $0 \le b < R$. Nach Satz 10.4.4(1) konvergiert die Folge der Partialsummen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ auf $[0, b]$ gleichmäßig gegen f. Nach Satz 13.2.7 gilt also

$$\int_0^b s_n(t)\, dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^b f(t)\, dt\,.$$

Da $\int_0^b s_n(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{b^{k+1}}{k+1}$ gilt, ist dies gleichbedeutend mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{b^{k+1}}{k+1} = \int_0^b f(t)\, dt$.

Dies zeigt man analog für b mit $-R < b < 0$. Schreibt man nun b statt x, so heißt dies, dass die Potenzreihe $F(x)$ für $|x| < R$ konvergiert (also ihr Konvergenzradius mindestens gleich R ist). Nach dem Hauptsatz (Teil 1) definiert $x \mapsto \int_0^x f$, und damit F, eine Stammfunktion für f.

Bleibt nur noch die – weniger wichtige – Kleinigkeit zu zeigen, dass der Konvergenzradius beim Integrieren nicht vergrößert wird. Dies folgt leicht aus dem Beweis von Satz 11.1.10 unten. □

Beispiel: Um $\int \sin(x^2)\, dx$ zu bestimmen, verwenden wir die Taylorreihe von sin,

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\,.$$

Dies ergibt $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \cdots$ mit Konvergenzradius ∞, also

$$\int \sin(x^2)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \cdots.$$

Jetzt können wir endlich den analogen Satz für die Ableitung beweisen:

Beweis (von Satz 11.1.10): Zu $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x| < R$ wähle s mit $|x| < s < R$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius R hat, konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{n-1}$. Wegen $\frac{|x|}{s} < 1$ konvergiert $n\left(\frac{|x|}{s}\right)^{n-1}$ für $n \to \infty$ gegen null, ist also beschränkt. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n s^{n-1} \cdot n \left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} \right)$$

Wir haben damit gezeigt, dass der Konvergenzradius von $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$ mindestens gleich R ist. Wegen $|n a_n| \geq |a_n|$ ist er auch höchstens gleich R. Nach Satz 13.4.3 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ eine Stammfunktion für g. Damit ist auch $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ eine Stammfunktion für g, also $f' = g$, was zu zeigen war. □

Bemerkung (zum Beweis): Ableiten ist mit gleichmäßer Konvergenz *nicht* verträglich! D. h., aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ folgt *nicht* die Konvergenz von f_n' gegen f' (für differenzierbare Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, und f). Beispiel: $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $f(x) = 0$.

Daher ist der Satz 11.1.10 über die Ableitung einer Potenzreihe schwieriger zu beweisen als der Satz über das Integral einer Potenzreihe. Unser Trick war die Verwendung des Hauptsatzes zur Zurückführung der Ableitungs-Aussage auf die entsprechende Integrations-Aussage.

Man kann Satz 11.1.10 auch ohne den Umweg über das Integral beweisen, muss sich aber dann etwas anderes einfallen lassen, siehe z. B. Königsberger, Kapitel 9.5.

Es gibt noch viele weitere Tricks und Verfahren, wie man bestimmte Klassen von Integralen in geschlossener Form berechnen kann. Ich möchte nur ein weiteres Beispiel angeben, das noch einmal die Nützlichkeit der komplexen Zahlen selbst bei reellen Problemen zeigt.

Beispiel: Aufgabe: Berechne $\int e^x \cos x \, dx$.

Lösung: Verwende die Eulersche Formel:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \text{ also} \\ \cos x &= \operatorname{Re} e^{ix}, \text{ also } (e^x \text{ reell}): \\ e^x \cos x &= \operatorname{Re}(e^x \cdot e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x}) \end{aligned}$$

Damit folgt:
(Fragezeichen unten erläutert)

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x} \right) dx \overset{?}{=} \operatorname{Re}\left(\int e^{(1+i)x} \, dx \right) \overset{?}{=} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i} \cdot e^{(1+i)x} \right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \cdot e^x \cdot (\cos x + i \sin x) \right) = \frac{1}{2} e^x \operatorname{Re}\left((1-i) \cdot (\cos x + i \sin x) \right) \\ &= \frac{1}{2} e^x \operatorname{Re}\left(\cos x + \sin x + i(-\cos x + \sin x) \right) = \boldsymbol{\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)}. \end{aligned}$$

Bemerkung (Integrale komplexwertiger Funktionen): Hier wurde die Funktion $e^{(1+i)x}$ integriert. Diese ist komplexwertig, aber bisher haben wir das Integral nur für reellwertige Funktionen definiert.

Die Definition und Herleitung der Eigenschaften bestimmter Integrale überträgt sich wortwörtlich auf den komplexwertigen Fall (einzig die Monotonie macht hier keinen Sinn, sie wurde auch bisher nicht verwendet). Der Hauptsatz gilt auch weiterhin, mit demselben Beweis (hier zahlt es sich aus, die Intuition des Bildes in Formeln übersetzt zu haben, denn das Bild ist bloß reell).

Insbesondere gilt $\int u + iv = \int u + i \int v$ für beliebige stetige Funktionen u, v. Ist f komplexwertige Funktion und $f = u + iv$ ihre Zerlegung in Real- und Imaginärteil, so folgt

$$\operatorname{Re} \int f = \int \operatorname{Re} f ,$$

denn beides ist gleich $\int u$. Damit ist das erste Fragezeichen im Beispiel ok. Weiterhin gilt $\frac{d}{dx} e^{cx} = c \cdot e^{cx}$ auch für komplexes c und damit

$$\int e^{cx} = \frac{1}{c} e^{cx} \quad \text{für } c \in \mathbb{C}, c \neq 0 .$$

Dies rechtfertigt das zweite Fragezeichen.

Beachte: Die Variable x (also der Definitionsbereich von f) muss weiterhin reell sein, damit das Integral definiert ist. Es gibt auch einen Integralbegriff für Funktionen auf $\mathbb{C}$ (sogar zwei davon: Flächen- und Wegintegrale), hier muss man sich aber viele neue Gedanken machen. Dies ist eins der Hauptthemen der Funktionentheorie (Analysis IV).

13.5 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir $\int_a^b f$ nur unter der Voraussetzung definiert, dass f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert und (stückweise) stetig ist (bzw. Regelfunktion, was nur unwesentlich allgemeiner ist). In vielen Fällen ist es nützlich, auch Integrale wie

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

zu betrachten, wo der Integrand an einem Endpunkt (oder beiden) des Integrationsintervalls nicht definiert ist, und dort auch nicht stetig fortgesetzt werden kann. Diese Beispiele beschreiben »unendliche«, genauer unbeschränkte Flächen. Kann der Flächeninhalt trotzdem endlich sein?

Ähnlich wie bei Reihen, wo die unendliche Summe als Grenzwert endlicher Summen definiert wurde, liegt es nahe, solche Integrale als Grenzwerte von Integralen über kleinere abgeschlossene Intervalle, auf denen der Integrand definiert ist, zu definieren.
Wie bei Reihen kann dieser Grenzwert existieren oder nicht, daher gibt es konvergente und divergente Integrale.

13.5.1 Definition

Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ (also $-\infty \le a < b \le \infty$), und sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Wir nennen $\int_a^b f$ ein **uneigentliches Integral.** Es **konvergiert,** falls die folgenden Grenzwerte existieren, die dann seinen Wert definieren:

(a) Falls f bei a definiert und stetig ist, sei $$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f(x)\, dx$$

(b) Falls f bei b definiert und stetig ist, sei $$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(x)\, dx$$

(c) Im Allgemeinen: Wähle $c \in (a, b)$ und definiere: $$\int_a^b f(x)\, dx := \underbrace{\int_a^c f(x)\, dx}_{\text{def. in (b)}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\, dx}_{\text{def. in (a)}}$$

Für Teil (c) ist nachzuprüfen, dass $\int_a^b f$ unabhängig von der Wahl des Unterteilungspunktes c ist (Übung).

Diese Definition ist konsistent mit der Definition »eigentlicher« Integrale, da im Fall, dass f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist, die Gleichungen in (a) und (b) gelten – jetzt nicht als Definitionen gesehen. (Übung! Vergleiche Hauptsatz, Teil 1.)

Beispiele:

(1) *Dieses Beispiel sollten Sie gut kennen! Es kommt in vielen Zusammenhängen vor.*

Sei $s \in \mathbb{R}$. Untersuche $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta x^{-s}\,dx$.

Erster Fall, $s \neq 1$: $\displaystyle\int_1^\beta x^{-s}\,dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\bigg|_1^\beta = \frac{1}{1-s}\left(\beta^{1-s} - 1^{1-s}\right)$.

Zweiter Fall, $s = 1$: $\displaystyle\int_1^\beta x^{-1}\,dx = \log x\big|_1^\beta = \log\beta - \log 1 = \log\beta$.

Wegen $\displaystyle\lim_{\beta\to\infty} \beta^{1-s} = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1-s<0 \ \text{(also } s>1) \\ \infty & \text{falls } 1-s>0 \end{cases}$ und $\log\beta \xrightarrow{\beta\to\infty} \infty$ folgt:

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \text{ konvergiert} \quad\Leftrightarrow\quad s>1}$$

Offenbar ist es hier irrelevant, dass das Integral bei 1 beginnt. Jede andere positive Zahl tut's auch. Ähnlich zeigt man:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx \text{ konvergiert} \quad\Leftrightarrow\quad s<1}$$

Hieraus ergibt sich sofort, dass $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ für alle $s \in \mathbb{R}$ divergiert.

(2) Für $c>0$ ist $\displaystyle\int_0^\infty e^{-cx}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-cx}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{-c}\,e^{-cx}\big|_0^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{-c}\left(e^{-c\beta}-1\right) = \frac{1}{c}$.

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c} \quad (c>0)}$$

Dies gilt auch für $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} c > 0$, mit demselben Beweis.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\left[\arctan x\big|_0^\beta\right] = \lim_{\beta\to\infty}(\arctan\beta - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$.

Wegen Symmetrie hat $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}$ denselben Wert, also folgt: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi}$

In mancher Hinsicht ähneln uneigentliche Integrale den unendlichen Reihen.

13.5.2 Satz (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale)

Seien $-\infty \le a < b \le \infty$, und $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls

▷ $|\,f(x)\,| \le g(x)$ für alle $x \in (a,b)$, und

▷ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konvergiert,

so konvergiert auch $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Insbesondere: Falls $\displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Analog zu Reihen nennt man $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **absolut konvergent,** wenn $\displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ konvergiert.

Beweis: Analog zu Reihen (Cauchy-Kriterium). □

Beispiele:

(1) Dass wir das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ explizit berechnen konnten war ein glücklicher Zufall. Seine Konvergenz hätten wir auch wie folgt einsehen können:

Motiviert durch $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ (für alle x), sowie durch die Konvergenz des Integrals von $\frac{1}{x^2}$ über das Intervall $[1,\infty)$ (und analog über $(-\infty,-1]$), schreiben wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Das erste und das dritte Integral konvergiert nach dem Majorantenkriterium, und das mittlere konvergiert, da $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[-1,1]$ stetig ist.

(2) Konvergiert $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$? Beachte zunächst, dass der Integrand wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ stetig nach $x = 0$ forgesetzt werden kann (durch den Wert 1). Daher befinden wir uns in Fall (a) der Definition.

Für die Konvergenzeigenschaften können wir stattdessen das Integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ untersuchen. Das macht die folgenden Rechnungen etwas einfacher.

1. Versuch: Wegen $|\sin x| \leq 1$ ist $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$. Das Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ divergiert aber, daher gibt dies keine Information über $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass sogar $\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ selbst divergiert.

2. Versuch: Wir verwenden direkt die Definition der Konvergenz. Dann integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v}\, \underbrace{\sin x}_{u'}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \left[\frac{1}{x}\cdot(-\cos x)\Big|_1^{\beta} - \int_1^{\beta} \left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos x)\,dx \right] \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta}\,(-\cos\beta) + \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\cos x\,dx = \cos 1 - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\cos x\,dx\,.\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral $\lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergiert wegen $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ nach dem Majorantenkriterium, und weil $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert.

Bemerkung: Was ist hier passiert? Es lohnt sich, dies etwas genauer zu verstehen. Diese Art von Argumentation wird uns später (bei Fourierreihen) wiederbegegnen.

Intuitiv:

▷ Das Integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergiert nicht absolut, da die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ für $x \to \infty$ im Betrag nicht schnell genug gegen null strebt.

▷ Das Integral konvergiert aber, da sich die positiven und negativen Anteile ausreichend wegheben (sie wechseln einander für wachsendes x ab).

Dies ist ganz ähnlich zur alternierenden Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Umsetzung der Intuition: Die partielle Integration ist ein exzellentes Hilfsmittel, um dieses Phänomen des »Weghebens« exakt zu analysieren. Wie kommt es, dass $\frac{\cos x}{x^2}$ für $x \to \infty$ schneller abfällt als $\frac{\sin x}{x}$? Zwei Dinge spielen zusammen:

1. $\frac{-1}{x^2}$, die Ableitung von $\frac{1}{x}$, fällt schneller ab als $\frac{1}{x}$ selbst. Dies ist das typische Verhalten für rationale Funktion; es drückt unter anderem aus, dass diese nicht oszillieren.
2. $-\cos x$, die Stammfunktion von $\sin x$, ist beschränkt. Dies ist Ausdruck des »Weghebens« positiver und negativer Teile.

Solche Phänomene des »Weghebens« stecken im Kern hinter einigen der schwierigsten Problemen der Mathematik (etwa der schon früher erwähnten Lindelöf-Hypothese).

Mit Hilfe unbestimmter Integrale erhalten wir ein weiteres nützliches Kriterium für die Konvergenz von Reihen.

13.5.3 Satz (Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen)

Ist $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, monoton fallend und nicht-negativ, dann gilt:

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ konvergiert.

Beispiel: Sei $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Man wende das Integralkriterium auf die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^s}$ an und verwende die schon bewiesene Konvergenzaussage über ihr Integral.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ konvergiert} \;\Leftrightarrow\; s > 1}$$

Die Fälle $s = 1$ und $s = 2$ kannten wir schon.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Monotonie gilt $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ für $k \leq x \leq k+1$.
Durch Integrieren folgt

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\, dx \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\, dx = f(k+1).$$

Addiert man dies für $k = 1, \ldots, n$, so erhält man, mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(n)$ und $t_n = \int_1^n f(x)\, dx$,

$$s_n \geq t_{n+1} \geq s_{n+1} - f(1).$$

Daraus folgt: (s_n) ist genau dann beschränkt, wenn (t_n) beschränkt ist. Wegen $f \geq 0$ gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ist genau dann konvergent, wenn (s_n) beschränkt ist. Analog: $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ ist genau dann konvergent, wenn (t_n) beschränkt ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Aus dem Beweis erhält man sogar eine etwas genauere Aussage:

13.5.4 Satz

Ist $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend, $f \geq 0$ und f stetig, dann konvergiert

$$a_n = \int_1^{n+1} f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Beweis: Die Ungleichungen im vorigen Beweis zeigen $a_n - a_{n-1} = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n) \leq 0$, also ist (a_n) monoton fallend, und $a_n = t_{n+1} - (s_{n+1} - f(n+1)) \geq -f(1) + f(n+1) \geq -f(1)$, also ist (a_n) nach unten beschränkt – somit konvergiert (a_n). □

Beispiele:

(1) Wie schnell divergiert die harmonische Reihe? Wir wissen, dass $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$ gegen unendlich geht. Wie schnell? Antwort: Logarithmisch, in folgendem sehr präzisen Sinn:

$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right) =: \gamma}$ existiert. Beweis: Wende den Satz mit $f(x) = \frac{1}{x}$ an.

Es ist $-a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$. Da $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log x\big|_1^n = \log n - \log 1 = \log n$, ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n = -a_{n-1} + \frac{1}{n}$. Da (a_n) und $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergieren, folgt die Behauptung.

Die Zahl γ heißt **Euler-Mascheroni-Konstante.** Es ist unbekannt, ob γ rational ist!

(2) $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}}$ divergiert. Denn $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ (für $x \geq 2$) ist monoton fallend (sowohl x als auch $\log x$ wachsen monoton), und mit der Subsitution $y = \log x$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, also $dx = x\,dy$. Somit ist $\frac{1}{x \log x}\,dx = \frac{1}{y}\,dy$, und daher

$$\int \frac{1}{x \log x}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = \log y = \log\log x\,,$$

also

$$\int_2^\beta \frac{1}{x \log x}\,dx = \log\log x\big|_2^\beta = \log\log\beta - \log\log 2 \xrightarrow{\beta\to\infty} \infty\,.$$

Die Divergenz ist doppeltlogarithmisch, also extrem langsam. Ähnlich zeigt man (Übung), dass $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ für $s > 1$ konvergiert.

Wie stehts mit $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$?

Index

Abbildung, 18
Ableitung, 91
  höhere, 98
  Kettenregel, 95, 95
  Potenzreihe, 97
  Rechenregel x^n, 94
  Rechenregeln, 93
  Umkehrfunktion, 96, 96
absolut konvergent, 55, 56
Absolutbetrag, 35
abzählbar, 20, 21
Additionssatz, 24
Additionstheoreme, 116
allgemeine Vereinigung, 17
allgemeiner Durchschnitt, 17
Allquantor, 16
Alternierende Reihe, 54
Anordnungen, 25
Anordnungsaxiome, 8
Archimedisches Prinzip, 30
Arcustangens, 118
Assoziativität, 6
asymptotisch gleich, 43
Aussage, 15
Aussageform, 16

beschränkt, 38, 86
bestimmt divergent, 41
Betrag, 35
Betrag (komplex), 73
Biimplikation, 15
bijektiv, 18
Binomialkoeffizient, 24, 24, 26, 42
binomische Reihe, 107
Binomischer Lehrsatz, 26
Bolzano-Weierstrass, 46

Cauchy-Folge, 47, 47
Cauchy-Folge (komplex), 74, 75
Cauchy-Kriterium, 52
Cauchy-Produkt, 58
Cosinus, 112, 113, 115
Cotangens, 117

De Morgan Gesetze, 15
Definitionsbereich, 18
Dichtheit, 30
Die geometrische Reihe, 49
Die harmonische Reihe, 50
Differenzierbarkeit, 91
  lokale Eigenschaft, 92
Differenzmenge, 17
disjunkte Vereinigung, 17
Disjunktion, 15
Distributivgesetz, 6
Doppelreihen, 56
Doppelreihensatz, 57
Dreiecksungleichung, 35

endlich, 20
Euler Formel, 113
Existenzquantor, 16
Extremum, 99

Fakultät, 24
Fibonaccifolge, 35
Fixpunkt, 86, 86
Folge, 20
freie Variable, 16
Funktion, 18

ganze Zahlen, 13
gebundene Variable, 16
geordnetes Paar, 17
gleichmächtig, 20
Graph, 18
Grenzwert

einer Reihe, 49
einer Folge, 38
einseitiger, 83, 83
uneigentlicher, 84
Grenzwertregeln, 39, 84

Häufungspunkt, 45, 45, 46, 47
kleinster/größter, 46, 47
Häufungspunkt (Menge), 81, 83
höchstens abzählbar, 20, 20
Halbschranke, 36
Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung, 125
Heaviside-Funktion, 77

Identitätsabbildung, 19
Identitätssatz für Potenzreihen, 108
imaginäre Einheit, 72, 72
Imaginärteil, 72
Implikation, 15
indirekter Beweis, 15
induktiv, 10
Infimum, 28, 30
injektiv, 18
Integral, 121, 122
(un)bestimmtes, 126
uneigentlich, 135
Integralkriterium (Reihe), 138
Integration
absolut konvergent, 137
Majorantenkrit., 136
partielle, 129
substitution, 131
Intervall, 18, 87
inverse Abbildung, 19
inverses Element, 6, 6, 7

Körper, 6
Körperaxiome, 5
Kommutativität, 6
komplex konjugiert, 73
komplexe Zahlen, 71, 72, 116
Komposition, 19, 79
Ableitung, 95
Konjunktion, 15
konkav, 108, 109
Kontraposition, 15

Konvergenz
-radius, 59, 59, 60, 133
Folge, 35, 38, 38, 38, 44, 47
gleichmäßig, 89
komplexe Folge, 74, 74
punktweise, 89, 89
Reihe, 49, 50–52
konvex, 108, 109
Kurvendiskussion, 105

Landau Symbol, 92
leere Menge, 17
Leibniz - Kriterium, 54
Leitkoeffizient, 42

Mächtigkeit, 20
Majoranten - Kriterium, 52
Maximum, 28, 28
Funktionen, 99, 105
Menge, 17, 23
Minimum, 28
Funktionen, 99, 105
Mittelwertsatz, 100
allgemeiner, 101
Monotonie, 44, 101

natürliche Zahlen, 10
Negation, 15
neutrales Element, 6
Nullfolge, 36, 37

Partialsumme, 49, 51
Partialsumme (Konv.-krit.), 52
Polarkoordinaten, 116
Polynom, 42, 85
Potenzen, 11, 32, 33
Potenzmenge, 17, 21, 23
Potenzreihe, 59, 60, 133
Ableitung, 97
Potenzreihe (komplex), 75
Produktmenge, 17

Quantor, 16, 37
Quotientenkriterium, 53

rationale Zahlen, 13, 27, 30
Realteil, 72

reelle Zahlen, 5, 22, 30
    erweiterte, 42
Regelfunktion, 121, 121
Reihe, 49
Reihenglieder, 49
Reihensumme, 49

Sandwichlemma, 40
Sattelpunkt, 100, 105
Satz vom Maximum und Minimum, 86
Satz von de Moivre, 116
Satz von Rolle, 100
Satz von Taylor, 104
Schnittmenge, 17
Schranke, 28, 38
Sinus, 112, 113, 115
Stammfunktion, 124, 125
stationäre Punkt, 100
stetig differenzierbar, 128
Stetigkeit, 77, 80, 81, 87
    ε-δ-Charakterisierung, 79
    differenzierbar, 94
    gleichmäßig, 123
    Kompositionsregel, 79
    lokale Eigenschaft, 78
    Rechenregeln, 78
    stückweise, 122, 122
Supremum, 28, 30
Supremumsaxiom, 30
surjektiv, 18

Tangens, 117
Tangente, 91
Tautologie, 15
Taylorpolynom, 103
    Fehlerabschätzung, 104
Taylorreihe, 106, 106
    binomische Reihe, 107
    Sinus & Cosinus, 113
Teilfolge, 45
Teilmenge, 17, 25
Transitivität, 8
Treppenfunktion, 119, 120
Trichotomie, 8

Umkehrabbildung, 19
Umkehrfunktion, 96
    Ableitung, 96
Umordnung, 56
unendlich, 20
unendlich (Grenzwert), 40
unendliche Reihe, 49
Ungleichung vom arithmet./quadrat. Mittel, 108

Vereinigung, 20
Vereinigungsmenge, 17
Verträglichkeit mit Add./Mult., 8
vollständige Induktion, 10
Vollstaendigkeitsaxiom, 30

Weierstrass-Kriterium, 90
Wertevorrat, 16, 18
Wurzelkriterium, 53
Wurzeln, 31, 32, 33

Zwischenwertsatz, 85