Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Optimierung und Stochastik

Minimalpunkttheoreme in uniformen Räumen und verwandte Aussagen

Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Diplommathematiker

Andreas Löhne
geb. am 15. Oktober 1972
in Querfurt

Betreuung:
Prof. Dr. Chr. Tammer
Dr. A. Hamel

eingereicht am:
30. Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Ekeland'sche Variationsprinzip gilt als eine der bedeutendsten Entdeckungen der neueren nichtlinearen Funktionalanalysis. Das Prinzip wurde erstmals im Jahre 1972 von Ekeland [8] veröffentlicht. Mittlerweile gibt zahlreiche Anwendungen auf viele Gebiete der Analysis. Es gibt auch eine Reihe äquivalenter Aussagen, die zum Teil gleichzeitig und unabhängig entdeckt wurden. Dazu gehören zum Beispiel der Tropfensatz von Daneš und der Fixpunktsatz von Kirk-Caristi.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Varianten des Prinzips. Das Ziel ist dabei, zwischen verschiedenartigen Formulierungen Gemeinsamkeiten oder Unterschiede aufzudecken, Äquivalenzen oder Abhängigkeiten zu zeigen, Formulierungen zu vereinheitlichen und alle Aussagen möglichst allgemein zu beweisen, um damit das Wesen des Ganzen zu beleuchten.

Das 1. Kapitel *„Uniforme Räume"* schafft die Grundlagen für Verallgemeinerungen bezüglich der dem Ekeland'schen Variationsprinzip zugrunde liegenden Räume. Im Jahre 1996 stellte Fang [10] eine Variante des Ekeland'schen Prinzips in einer von ihm eingeführten Klasse topologischer Räume, den sogenannten topologischen Räumen vom Typ $\mathcal{F}$, vor. Als Hauptresultat des ersten Abschnittes werden wir zeigen, dass es sich bei diesen Räumen um uniforme Räume handelt. Wir erhalten damit eine neue Charakterisierung uniformer Räume.

Der zweite Abschnitt des Kapitels 1 beschäftigt sich mit einer wichtigen Klasse uniformer Räume, den linearen topologischen Räumen. Fang [10] zeigte, dass lineare topologische Räume vom Typ $\mathcal{F}$ sind, was nach den Resultaten des ersten Abschnittes bedeutet, dass lineare topologische Räume uniformisierbar sind. Letzteres ist allerdings schon mindestens seit den sechziger Jahren bekannt (vgl. z.B. Köthe [22]). Darüberhinaus wurde eine Charakterisierung der linearen topologischen Räume durch *Familien von Quasinormen* bereits um 1939 durch Hyers [17] durchgeführt.

Auch im dritten Abschnitt des Kapitels 1 geht es um lineare topologische Räume. Wir untersuchen gewisse Teilräume von linearen topologischen Räumen und geben Bedingungen dafür an, dass diese Teilräume Banachräume sind. Außerdem wird untersucht, welche topologischen Eigenschaften sich auf diesen Banachraum übertragen lassen. Mit Hilfe analoger Aussagen für lokalkonvexe Räume wurde von A. Hamel in [16] nachgewiesen, dass bestimmte dem Ekeland'schen Prinzip verwandte Aussagen in lokalkonvexen Räumen zu den entsprechenden Banachraumvarianten äquivalent sind. Mit Hilfe der Resultate dieses Abschnittes werden wir im 3. Kapitel Äquivalenzaussagen zwischen Banachraumformulierungen und Formulierungen in linearen topologischen Räumen entsprechender Aussagen nachweisen.

Im vierten Abschnitt des Kapitels 1 werden topologische Räume, deren Topologie durch eine *kegelwertige Metrik* erzeugt wird, behandelt. In der Literatur findet man zu diesen Räumen nur recht spärliche Aussagen. Als Hauptresultat dieses Abschnittes wird gezeigt, dass es sich hierbei um uniforme Räume handelt. Mit Hilfe dieser Aussage können wir später einen Vergleich verschiedener vektorwertiger Minimalpunkttheoreme bezüglich der zugrunde liegenden Räume vornehmen. Schließlich geben wir in diesem Abschnitt noch Kriterien zur Metrisierbarkeit und zur Separiertheit dieser Räume an.

Das 2. Kapitel „*Minimalpunkttheoreme*“ beschäftigt sich mit vektorwertigen Minimalpunkttheoremen in sehr allgemeinen Produkträumen. Bei Minimalpunkttheoremen handelt es sich um Aussagen zur Existenz minimaler Punkte. Produktraum heißt hier, dass der zugrunde gelegte Raum aus zwei Komponenten besteht. Bei der ersten Komponente werden topologische und bei der zweiten Komponente lineare Eigenschaften im Vordergrund stehen.

Das Phelps'sche Lemma, insbesondere in der Fassung von [27, Lemma 3.12] kann als erstes Minimalpunkttheorem angesehen werden. Dies gilt auch für die Lemmata 1.1 und 1.2 in [26], die untereinander und zum Ekeland'schen Prinzip äquivalent sind. In [27] wird dabei bereits ein Produktraum $X \times \mathbb{R}$ betrachtet, wobei X ein Banachraum ist und $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen sind.

Von A. Göpfert und Chr. Tammer wurde in [12] erstmals ein vektorwertiges Minimalpunkttheorem betrachtet, das heißt, eine Aussage im Produktraum $X \times Y$, wobei X und Y Banachräume sind. In den Arbeiten von Göpfert, Tammer und Zălinescu [13], [14] werden verschiedene allgemeine Minimalpunkttheoreme bewiesen, wobei nun X ein vollständiger metrischer Raum und Y ein separierter lokalkonvexer Raum ist. Diese Arbeiten bilden den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen.

Eine weitere Verallgemeinerung eines solchen Minimalpunkttheorems bezüglich des zugrunde gelegten Raumes stellt einen Schwerpunkt des 2. Kapitels dar. Wir beweisen das Theorem für den Fall, dass X ein folgenvollständiger separierter uniformer Raum ist. Wir können die Aussagen zumindest formal auf den Fall erweitern, dass Y ein separierter linearer topologischer Raum ist. Wir diskutieren, inwiefern dies unter den anderen gestellten Voraussetzungen sinnvoll ist.

Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die Untersuchung der Beweismethode. Wir werden ein auf den Arbeiten von Göpfert, Tammer und Zălinescu [13] basierendes Minimalpunkttheorem mit dem Prinzip von Brézis und Browder beweisen[1]. Das hat den Vorteil, dass es genügt, die Voraussetzungen bezüglich Folgen zu stellen[2]. Bei Varianten, die auf dem Zorn'schen Lemma basieren, sind die entsprechenden Voraussetzungen für Netze zu stellen. Dieser Unterschied taucht aber erst auf, wenn die zugrunde gelegten Räume allgemein genug sind.

Von Chen, Huang und Hou [4] wurde eine Variante des Ekeland'schen Variationsprinzips für mengenwertige Abbildungen bewiesen. Die Beweisführung und die Voraussetzungen sind dabei an die Arbeiten von Nemeth [23] angelehnt. Wir geben hier eine Variante des Ekeland'schen Variationsprinzips für mengenwertige Abbildungen an, die auf den Beweismethoden und Voraussetzungen von Göpfert, Tammer und Zălinescu [13] und der vorliegenden Arbeit aufbaut. Im Gegensatz zu dem relativ komplizierten Beweis der Variante von Chen, Huang und Hou [4] folgt unsere Version recht einfach aus dem Minimalpunkttheorem. Darüberhinaus werden wir zeigen, dass es sich hierbei sogar um eine zum Minimalpunkttheorem äquivalente Aussage handelt. Als weitere äquivalente Formulierung des Minimalpunkttheorems geben wir mengenwertige Varianten des Minimalitätsprinzips von Takahashi und des Fixpunktsatzes von Kirk-Caristi an.

Im vorletzten Abschnitt des 2. Kapitels betrachten wir zwei Folgerungen aus

[1] Eigentlich wird das entsprechende Minimalpunkttheorem in [13] auch schon mit diesem Prinzip bewiesen. Die Beweistechnik des Prinzips wird im Beweis des Minimalpunkttheorems verwendet.

[2] Auch in [13] werden die Voraussetzungen nur für Folgen gestellt.

dem Minimalpunkttheorem. Auf recht einfache Weise folgt eine vektorwertige Variante des Ekeland'schen Prinzips. Außerdem werden wir zeigen, dass das Phelps'sche Lemma aus dem Minimalpunkttheorem folgt. Wir stellen dabei die Forderung, nur die lineare Komponente des Produktraumes zu verwenden, um die Qualität der Aussagen des Minimalpunkttheorems bezüglich dieser Komponente zu prüfen. Es war allerdings ein erheblicher Aufwand nötig, um das Phelps'sche Lemma in dieser Weise zu beweisen.

Schließlich vergleichen wir im letzten Abschnitt des Kapitels unsere Voraussetzungen mit entsprechenden Voraussetzungen aus anderen Arbeiten.

Im 3. Kapitel *„Das Ekeland'sche Prinzip in linearen topologischen Räumen"* beschäftigen wir uns Varianten des Ekeland'schen Variationsprinzips, die an die Linearität des zugrunde liegenden Raumes gebunden sind. Dazu gehören z.B. der Tropfensatz von Daneš und das Lemma von Phelps. Bisher wurden diese Sätze im lokalkonvexen Raum bewiesen (vgl. [16]). Wir zeigen, dass die beiden Sätze auch in linearen topologischen Räumen gelten. Auch hier wird als Beweismittel das Prinzip von Brézis und Browder verwendet. Darüberhinaus werden wir noch einen zweiten Beweis der beiden Aussagen angeben, der die entsprechende Banachraumvariante verwendet. Das bedeutet, die Varianten des Lemmas von Phelps und des Tropfensatzes von Daneš in linearen topologischen Räumen sind äquivalent zu den entsprechenden Banachraumvarianten.

Begriffe und Bezeichnungen

Es sollen hier einige Begriffe definiert werden, die im Folgenden verwendet werden. Die Notwendigkeit hierfür ergibt sich in erster Linie dadurch, dass diese Begriffe in der Literatur nicht immer eindeutig verwendet werden.

Das Symbol $\subset$ wird für die Inklusion von Mengen verwendet. Gilt für zwei Mengen $A \subset B$, so ist auch die Gleichheit der Mengen zugelassen. Die reellen Zahlen werden wie üblich mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnen wir die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Die Verwendung der Relationszeichen $<, >, \leq$ und $\geq$ (ohne eine Indizierung) impliziert im Folgenden immer einen Sachverhalt bezüglich reeller Zahlen. Zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zählen wir nicht die 0. Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Es sei E ein linearer Raum. Eine nichtleere Teilmenge $K \subset E$ heißt *Kegel*, falls $\alpha K \subset K$ für alle $0 \leq \alpha < \infty$ gilt. Ein Kegel K ist *spitz*, wenn $K \cap (-K) = \{0\}$ gilt. Wir sprechen von einem *eigentlichen* Kegel K, wenn $K \neq E$ ist.

Sei X eine Menge. Eine Relation R in X ist eine Menge von geordneten Paaren (x, u), wobei $x, u \in X$ sind. Statt $(x, u) \in R$ schreiben wir auch $x\,R\,u$. In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene *Relationen* betrachtet, die sich bezüglich der folgenden Eigenschaften klassifizieren lassen. Eine Relation R in X heißt *reflexiv*, wenn $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$ gilt. Die Relation R heißt *transitiv*, wenn für $x_1, x_2, x_3 \in X$ aus $(x_1, x_2), (x_2, x_3) \in R$ stets $(x_1, x_3) \in R$ folgt. Die Relation R heißt *antisymmetrisch*, wenn für $x_1, x_2 \in X$ aus $(x_1, x_2), (x_2, x_1) \in R$ folgt, dass $x_1 = x_2$ ist. Wir nennen eine reflexive und transitive Relation R in X eine *Quasiordnung* auf X. Ist R zusätzlich noch antisymmetrisch, so sprechen wir von einer *Halbordnung* auf X.

Sei nun (X, R) eine quasigeordnete (halbgeordnete) Menge, das heißt X ist eine Menge und R ist eine Quasiordnung (Halbordnung) auf X. Ein Element $\bar{a} \in A \subset X$ heißt R-*minimal* (kurz: minimal) in A, falls aus $a \, R \, \bar{a}$ für $a \in A$ stets $a = \bar{a}$ folgt.

Weitere Bezeichnungen werden in der üblichen Weise verwendet. Für Begriffe aus dem Gebiet der Allgemeinen Topologie werden vorwiegend die Definitionen von Köthe [22] verwendet. Einige für die vorliegende Arbeit besonders wichtige Definitionen sind an entsprechender Stelle angegeben.

Kapitel 1

Uniforme Räume

In den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde von Alexandroff und Urysohn das Problem der Metrisierbarkeit topologischer Räume untersucht. Es zeigte sich, dass dabei eine gewisse *uniforme Struktur* der Räume die entscheidende Rolle spielt, die letztlich zum Begriff des uniformen Raumes führte, der von A. Weil um 1937 eingeführt wurde. Grob formuliert, ist die Lösung des Metrisierungsproblems die Aussage, dass ein topologischer Raum genau dann durch eine *Familie von Pseudometriken* erzeugt werden kann, wenn er ein uniformer Raum ist.

1.1 Eine neue Charakterisierung uniformer Räume

Im Jahre 1996 wurde von Fang [10] eine Klasse von topologischen Räumen, die sogenannten topologischen Räume vom Typ $\mathcal{F}$, eingeführt. Diese lassen sich, wie Fang gezeigt hat, durch *Familien von Quasimetriken* erzeugen, die im Gegensatz zu Pseudometriken nur eine abgeschwächte Form der Dreiecksungleichung erfüllen, und daher, allgemeiner als die uniformen Räume zu sein, scheinen. Der Versuch diese Räume in die Systematik bekannter topologischer Räume einzuordnen, führte zu unserer neuen Charakterisierung der uniformen Räume, die zeigt, dass topologische Räume vom Typ $\mathcal{F}$ nichts anderes als separierte uniforme Räume sind.

Um eine lückenlose Beweisführung dieses Resultats zu gewährleisten, sollen nun zunächst einige Definitionen bekannter topologischer Begriffe angegeben werden. Diese wurden im Wesentlichen aus [22] entnommen.

Definition 1.1 *Eine halbgeordnete Menge* $(\Lambda, \prec)$ *heißt gerichtet, wenn zu zwei Elementen* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ *stets ein* $\mu \in \Lambda$ *existiert mit* $\lambda_1 \prec \mu$ *und* $\lambda_2 \prec \mu$.

Ein wichtiges Beispiel für eine gerichtete Menge ist die Umgebungsbasis eines Punktes eines topologischen Raumes. Dieses Mengensystem ist bezüglich der inversen Mengeninklusion $\supset$ gerichtet. Auf das Engste verwandt mit dem Begriff eines gerichteten Mengensystems ist der Begriff des Filters.

Definition 1.2 *Eine nichtleere Klasse* $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ *von Teilmengen einer Menge* M *heißt ein Filter auf* M*, wenn gilt:*

(F1) Jede F_α *umfassende Teilmenge von* M *gehört zu* $\mathfrak{F}$*,*

(F2) Der Durchschnitt endlich vieler F_α gehört zu $\mathfrak{F}$,

(F3) Die leere Menge gehört nicht zu $\mathfrak{F}$.

Oft ist es bequemer, anstelle eines Filters $\mathfrak{F}$ nur eine bestimmte Teilklasse von $\mathfrak{F}$ zu betrachten.

Definition 1.3 *Eine nichtleere Teilklasse $\mathfrak{B}$ eines Filters $\mathfrak{F}$ auf M heißt eine Basis des Filters $\mathfrak{F}$, wenn sie den Bedingungen*

(B1) Der Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathfrak{B}$ umfasst eine Menge aus $\mathfrak{B}$,

(B2) Die leere Menge gehört nicht zu $\mathfrak{B}$,

genügt und $\mathfrak{F}$ aus allen Teilmengen besteht, die eine Menge aus $\mathfrak{B}$ umfassen.

Ein System $\mathfrak{B}$ von Teilmengen einer Menge M, das (B1) und (B2) erfüllt, erzeugt durch Hinzunahme aller ein Element aus $\mathfrak{B}$ umfassenden Mengen einen Filter und heißt deshalb *Filterbasis*.

Wir kommen nun zur Definition der *uniformen Räume*. Sei X eine Menge. Wir betrachten auf X ein System $\mathfrak{N}$ von Teilmengen N der Menge $X \times X := \{(x, y) : x, y \in X\}$. Für $N \subset X \times X$ setzen wir

$$N^{-1} := \{(y, x) : \ (x, y) \in N\}$$

und

$$N \circ N := \ \{(x, y) \in X \times X : \ \exists z \in X : \ (x, z), (z, y) \in N\}.$$

Die Menge

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X\}$$

heißt *Diagonale*.

Definition 1.4 *Eine Menge X heißt* uniformer Raum*, wenn auf $X \times X$ ein Filter $\mathfrak{N}$ gegeben ist mit den Eigenschaften:*

(N1) $\forall N \in \mathfrak{N} : \ \Delta \subset N$,

(N2) $N \in \mathfrak{N} \ \Rightarrow \ N^{-1} \in \mathfrak{N}$,

(N3) $\forall N \in \mathfrak{N} \ \exists M \in \mathfrak{N} : \ M \circ M \subset N$.

Man sagt, $\mathfrak{N}$ erklärt auf X eine uniforme Struktur.

Durch die Systeme

$$\mathfrak{U}(x) := \{U_N(x) : \ N \in \mathfrak{N}\}$$

mit

$$U_N(x) := \{y \in X : \ (x, y) \in N\}$$

sind, wie man leicht verifiziert, Umgebungsfilter der Punkte $x \in X$ gegeben. Das heißt, damit ist eine Topologie τ auf X erklärt. Die Topologie τ wird *Topologie des uniformen Raumes X* genannt. Die Topologie τ ist aber bereits durch Filterbasen von den $\mathfrak{U}(x)$ bestimmt. Solche Umgebungsbasen erhält man auch, wenn man in der obigen Weise statt von $\mathfrak{N}$ von einer Basis $\mathfrak{B}$ der uniformen Struktur $\mathfrak{N}$ ausgeht.

Proposition 1.1 *Die Topologie eines uniformen Raumes ist genau dann separiert, wenn die Bedingung*

(N4) $\bigcap_{N\in\mathfrak{N}} N = \Delta$

erfüllt ist.

Beweis: Siehe [22, S.32]. ■

Wir wollen nun eine weitere bekannte Charakterisierung von uniformen Räumen vornehmen, die aus der Lösung des oben genannten Metrisierungsproblems hervorgegangen ist. Die Bezeichnungsweise ist hierbei so gewählt, dass man möglichst gut die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu unserer neuen Charakterisierung erkennt, die daran anschließend dargestellt ist. Die folgende Definition einer *Pseudometrik* wurde aus [21] entnommen.

Definition 1.5 *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $p:\ X\times X\to[0,\infty)$ heißt Pseudometrik auf X, wenn für alle $x,y,z\in X$ die Bedingungen*

(P1) $p(x,x)=0$,

(P2) $p(x,y)=p(y,x)$,

(P3) $p(x,y)\leq p(x,z)+p(z,y)$

erfüllt sind.

Durch eine Pseudometrik wird bekanntlich ([21]) ein im Allgemeinen nicht separierter uniformer Raum erzeugt. Aber ein uniformer Raum ist im Allgemeinen nicht pseudometrisierbar. Deshalb betrachten wir nun spezielle Systeme von Pseudometriken.

Definition 1.6 *Es seien X eine nichtleere Menge und Λ eine gerichtete Menge. Unter einer Familie von Pseudometriken versteht man ein System $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Pseudometriken $p_\lambda:\ X\times X\to[0,\infty)$, für das die Bedingung*

(P4) $\lambda\prec\mu\ \Rightarrow\forall x,y\in X:\ p_\lambda(x,y)\leq p_\mu(x,y)$

erfüllt ist. Gilt zusätzlich die Bedingung

(P5) $(\forall\lambda\in\Lambda:\ p_\lambda(x,y)=0)\ \Rightarrow\ x=y$,

so sagen wir, die Familie von Pseudometriken ist separierend.

Es ist zu bemerken, dass in [21] für eine Familie von Pseudometriken das Axiom (P4) nicht gefordert wird. Das Axiom (P4) garantiert, dass aus einer Familie von Pseudometriken unmittelbar, das heißt, wie im folgenden Beweis, eine Basis des uniformen Raumes entsteht. Ohne (P4) erhält man zunächst nur eine Subbasis des Raumes (vgl. [21]). Somit haben wir in der folgenden Proposition noch eine Aussage bezüglich (P4) zu beweisen. Die hier geleistete Beweisarbeit können wir dafür aber im Theorem 1.3, dem Hauptresultat dieses Abschnittes, wieder einsparen.

Proposition 1.2 *Ein topologischer Raum* (X, τ) *ist genau dann ein (separierter) uniformer Raum, wenn seine Topologie* τ *durch eine (separierende) Familie von Pseudometriken erzeugt werden kann.*

Beweis: Sei $(X, \mathfrak{N})$ ein uniformer Raum mit der uniformen Struktur $\mathfrak{N}$ und sei τ die Topologie des uniformen Raumes $(X, \mathfrak{N})$. Dann wird nach [21, S.188, Th.15] die uniforme Struktur durch ein System $\{p_\iota\}_{\iota \in I}$ von Pseudometriken p_ι erzeugt, was mit der in [21] verwendeten Terminologie heißt, dass die Mengen

$$N(\iota, t) := \{(x, y) : \; p_\iota(x, y) < t\}$$

für $\iota \in I$ (I beliebige Indexmenge) und $t > 0$ eine Subbasis von $\mathfrak{N}$ bilden.

Wir zeigen, dass durch Hinzunahme aller Pseudometriken p, die aus punktweiser Maximumbildung endlich vieler Pseudometriken $\{p_\iota\}_{\iota \in I}$ entstehen, die gleiche uniforme Struktur $\mathfrak{N}$ erzeugt wird. Denn seien n Elemente $N(\iota_1, t), ..., N(\iota_n, t) \in \mathfrak{N}$ gegeben, dann ist nach (F2) auch der Durchschnitt dieser Elemente aus $\mathfrak{N}$, und das heißt, die Menge $\{(x, y) : \; \max\{p_{\iota_1}(x, y), ..., p_{\iota_n}(x, y)\} < t\}$ ist aus $\mathfrak{N}$. Wir erhalten damit ein neues System $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Pseudometriken, wobei $(\Lambda, \prec)$ mit

$$\lambda \prec \mu \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in X : \; p_\lambda(x, y) \leq p_\mu(x, y),$$

eine gerichtete Menge darstellt. Wir haben damit ein System, das zusätzlich (P4) erfüllt, also eine Familie von Pseudometriken, die $\mathfrak{N}$ erzeugt.

Setzen wir nun noch die Separiertheit des Raumes voraus, das heißt, (N4) gilt, so folgt daraus, dass auch (P5) für unsere Familie von Pseudometriken erfüllt ist. Wir haben damit also gezeigt, dass die uniforme Struktur $\mathfrak{N}$ durch eine separierende Familie von Pseudometriken erzeugt wird.

Die umgekehrte Richtung ergibt sich sofort als Spezialfall des unten folgenden Theorems 1.3. ∎

Wir wollen nun eine neue Charakterisierung uniformer Räume unter Verwendung der von Fang [10] eingeführten *Familien von Quasimetriken* vorstellen. Wir definieren zunächst eine eine *k-Quasimetrik* um die Analogie zum linearen Fall hervorzuheben. In [22] findet man eine entsprechende Definition einer *(k-)Quasinorm.*

Definition 1.7 *Es seien* X *eine nichtleere Menge und* $k \geq 1$ *eine Konstante. Eine Funktion* $q : \; X \times X \to [0, \infty)$ *heißt* k-Quasimetrik *auf* X*, wenn für alle* $x, y, z \in X$ *die Bedingungen*

(Q1) $q(x, x) = 0$,

(Q2) $q(x, y) = q(y, x)$,

(Q3') $q(x, y) \leq k\,(q(x, z) + q(z, y))$

erfüllt sind.

In Analogie zu den Familien von Pseudometriken betrachten wir *Familien von Quasimetriken.*

Definition 1.8 *Es seien X eine nichtleere Menge und $(\Lambda, \prec)$ eine gerichtete Menge. Unter einer Familie von Quasimetriken versteht man ein System $\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Quasimetriken $q : X \times X \to [0, \infty)$, für das die Bedingungen*

(Q1) $\forall\lambda \in \Lambda : q_\lambda(x, x) = 0,$

(Q2) $\forall\lambda \in \Lambda : q_\lambda(x, y) = q_\lambda(y, x),$

(Q3) $\forall\lambda \in \Lambda\ \exists\mu \in \Lambda$ *mit* $\lambda \prec \mu$: $\forall x, y, z \in X$: $q_\lambda(x, y) \le q_\mu(x, z) + q_\mu(z, y),$

(Q4) $\lambda \prec \mu \ \Rightarrow \forall x, y \in X: \ q_\lambda(x, y) \le q_\mu(x, y)$

erfüllt sind. Gilt zusätzlich die Bedingung

(Q5) $(\forall\lambda \in \Lambda : \ q_\lambda(x, y) = 0) \ \Rightarrow \ x = y,$

so sagen wir die Familie von Quasimetriken ist separierend.

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnittes, das die Beziehung zwischen separierten uniformen Räumen und den von Fang [10] eingeführten topologischen Räumen vom Typ $\mathcal{F}$ klärt: Es handelt sich dabei um dieselbe Raumklasse.

Theorem 1.3 *Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann ein (separierter) uniformer Raum, wenn seine Topologie τ durch eine (separierende) Familie von Quasimetriken erzeugt werden kann.*

Beweis: Es sei ein topologischer Raum (X, τ) gegeben, wobei τ durch eine Familie $\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Quasimetriken erzeugt wird. Das heißt, τ ist durch die Umgebungsbasen

$$\mathfrak{U}(x) := \{U_x(\lambda, t) : \ \lambda \in \Lambda, t > 0\}$$

mit

$$U_x(\lambda, t) := \{y \in X : q_\lambda(x, y) < t\}$$

gegeben. Wir zeigen, dass das System

$$\mathfrak{B} := \{N(\lambda, t);\ \lambda \in \Lambda, t > 0\}$$

mit

$$N(\lambda, t) := \{(x, y) \in X \times X : \ q_\lambda(x, y) < t\}$$

eine Filterbasis darstellt. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ und $t_1, t_2 > 0$ beliebig gegeben. Weil Λ gerichtet ist, existiert ein $\mu \in \Lambda$ mit $\lambda_1 \prec \mu$ und $\lambda_2 \prec \mu$. Mit $t := \min\{t_1, t_2\}$ zeigen wir, dass

$$N(\mu, t) \subset N(\lambda_1, t_1) \cap N(\lambda_2, t_2)$$

und somit (B1) erfüllt ist. Denn sei $(\bar{x}, \bar{y}) \in N(\mu, t)$, das heißt, $q_\mu(\bar{x}, \bar{y}) < t$, so folgt

$$q_{\lambda_i}(\bar{x}, \bar{y}) \overset{(Q4)}{\le} q_\mu(\bar{x}, \bar{y}) < t \le t_i \ \ (i = 1, 2)\ ,$$

das heißt,

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in N(\lambda_1, t_1) \cap N(\lambda_2, t_2).$$

Es gilt auch (B2), das heißt, $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, weil die Diagonale in jedem $N(\lambda, t)$ enthalten ist. Sei nun $\mathfrak{N}$ der von $\mathfrak{B}$ erzeugte Filter. Wir wollen zeigen, dass für $\mathfrak{N}$ die Axiome

(N1) bis (N4) erfüllt sind. Offensichtlich folgt (N1) aus (Q1) und (N2) aus (Q2). Um (N3) zu zeigen, sei $N \in \mathfrak{N}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ und ein $t > 0$, so dass $N(\lambda, t) \in \mathfrak{B}$ und $N(\lambda, t) \subset N$. Für $M := N(\mu, t/2)$ mit $\mu \succ \lambda$ nach (Q3) gilt $M \circ M \subset N$, denn sei $(\bar{x}, \bar{y}) \in M \circ M$, das heißt,

$$\exists z \in X: \; q_\mu(\bar{x}, z) < \frac{t}{2}, \;\; q_\mu(z, \bar{y}) < \frac{t}{2},$$

so folgt

$$q_\lambda(\bar{x}, \bar{y}) \overset{(Q3)}{\leq} q_\mu(\bar{x}, z) + q_\mu(z, \bar{y}) < t,$$

das heißt, $(\bar{x}, \bar{y}) \in N(\lambda, t) \subset N$. Wir haben also mit $\mathfrak{N}$ eine uniforme Struktur auf X gegeben. Die Topologie des uniformen Raumes $(X, \mathfrak{N})$ ist nach der Bemerkung zur Definition 1.4 bereits durch die Filterbasis $\mathfrak{B}$ gegeben. Die Systeme

$$\mathfrak{U}(x) := \{U_{N(\lambda,t)}(x) : \; N(\lambda, t) \in \mathfrak{B}\}$$

mit

$$U_{N(\lambda,t)}(x) = \{y \in X : \; (x, y) \in N(\lambda, t)\} = \{y \in X : \; q_\lambda(x, y) < t\}$$

erzeugen also gerade die Topologie τ. Ist die Familie $\{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Quasimetriken zusätzlich separierend, so folgt auch (N4) und nach Proposition 1.1 ist auch die Topologie τ separiert.

Die umgekehrte Aussage folgt unmittelbar aus Proposition 1.2, da eine Familie von Pseudometriken insbesondere eine Familie von Quasimetriken ist. ■

Wir haben somit gezeigt, dass ein topologischer Raum vom Typ $\mathcal{F}$, das heißt, ein topologischer Raum, dessen Topologie durch eine separierende Familie von Quasimetriken erzeugt werden kann, gerade ein separierter uniformer Raum ist.

Wir wollen noch eine Bezeichnungsweise vereinbaren, wie sie in den folgenden Abschnitten verwendet werden soll. Wir bezeichnen uniforme Räume mit $(X, \mathfrak{N})$, wobei $\mathfrak{N}$ eine uniforme Struktur ist, mit $\big(X, \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\big)$, wobei $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Pseudometriken ist, oder mit $\big(X, \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\big)$, wobei $\{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Quasimetriken ist.

Es soll nun die Konvergenz eines Netzes (zur Definition siehe [21]) und die Eigenschaft, Cauchynetz zu sein, in uniformen Räumen charakterisiert werden. Es ist hier zu beachten, dass man sowohl ein $\varepsilon > 0$ als auch ein $\lambda \in \Lambda$ vorgeben muss. Wählt man in der folgenden Proposition als gerichtete Indexmenge Γ speziell die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, so erhält man die entsprechenden Aussagen für Folgen.

Proposition 1.4 *Es seien $\big(X, \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\big)$ ein uniformer Raum und $(\Gamma, \prec)$ eine gerichtete Menge. Dann gilt:*

(i) Ein Netz $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ist genau dann konvergent gegen $x \in X$, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ und $\lambda \in \Lambda$ ein $\gamma_0 \in \Gamma$ gibt, so dass $q_\lambda(x, x_\gamma) < \varepsilon$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \succ \gamma_0$.

(ii) Ein Netz $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ist genau dann Cauchynetz, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ und $\lambda \in \Lambda$ ein $\gamma_0 \in \Gamma$ gibt, so dass $q_\lambda(x_\gamma, x_\beta) < \varepsilon$ für alle $\gamma, \beta \in \Gamma$ mit $\gamma, \beta \succ \gamma_0$.

Beweis: Dies folgt aus den entsprechenden Begriffen im allgemeinen topologischen Raum (vgl. [21]) und der Charakterisierung der Topologie durch die Familie von Quasimetriken. ■

In uniformen Räumen, die abzählbare Umgebungsbasen besitzen (und damit pseudometrisierbar sind), können topologische Eigenschaften wie Abgeschlossenheit oder Stetigkeit sowohl mit (den durch die Topologie gegebenen) offenen Mengen als auch äquivalent durch Folgen definiert werden. Gibt es allerdings keine abzählbaren Umgebungsbasen, so sind Netze anstelle von Folgen zu betrachten. Zum Beispiel heißt eine Menge A eines topologischen Raumes abgeschlossen, wenn A Komplement einer offenen Menge ist. Die Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn sie die Grenzwerte aller Netze aus A enthält. Fordern wir hingegen nur, dass A die Grenzwerte aller Folgen aus A enthält, so sagen wir, A ist *folgenabgeschlossen* oder *sequentiell abgeschlossen*. Auf analoge Weise unterscheidet man zwischen Vollständigkeit und Folgenvollständigkeit und zwischen Stetigkeit und Folgenstetigkeit.

1.2 Lineare topologische Räume

Eine wichtige Klasse uniformer Räume ist die der linearen topologischen Räume. Wir wollen die Resultate des vorigen Abschnittes auf diese Räume anwenden.

Die folgende Definition eines linearen topologischen Raumes stammt aus [22, S.149]. Man sagt, eine Teilmenge U eines linearen Raumes X ist *ausgeglichen* (engl. absorbing), wenn zu jedem $x \in X$ ein $\sigma > 0$ existiert, so dass $x \in \sigma U$ ist. Wenn $[-1, 1] \cdot U \subset U$ gilt, so heißt die Teilmenge U des linearen Raumes X *kreisförmig* (engl. balanced).

Definition 1.9 *Auf einem reellen linearen Raum $(X, +, \cdot)$ sei eine Filterbasis $\mathfrak{U} = \{U\}$ aus ausgeglichenen kreisförmigen Mengen U gegeben und zu jedem U existiere ein $V \in \mathfrak{U}$ mit*

$$V + V \subset U. \tag{1.1}$$

Dann heißt (X, τ) mit der durch

$$U(x) := x + \alpha \cdot U, \quad U \in \mathfrak{U}, \quad \alpha > 0$$

erklärten Topologie linearer topologischer Raum mit $\mathfrak{U}$ als Nullumgebungsbasis.

Proposition 1.5 *Ein linearer topologischer Raum (X, τ) mit der die Topologie τ erzeugenden Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ ist genau dann separiert, wenn gilt*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{0\}. \tag{1.2}$$

Beweis: Nach Definition (z.B in [22, S.4]) ist X separiert, wenn es für beliebige $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt, so dass $x - y \notin U$. Dies ist offensichtlich äquivalent zu (1.2). ■

In [22, S.150] wird gezeigt, dass auf einem linearen topologischen Raum (X, τ) durch $\mathfrak{N} := \{N_U\}$ mit

$$N_U := \{(x, y) \in X \times X : \ y - x \in U\}$$

eine uniforme Struktur erklärt ist, die die Topologie τ erzeugt. Das bedeutet nach Theorem 1.3, dass die Topologie durch eine Familie von Quasimetriken gegeben werden kann. Wir können aber wegen der zusätzlichen Struktur, die wir im Falle eines linearen topologischen Raumes gegeben haben, noch weitere Aussagen zur Charakterisierung dieser Räume machen. Lineare topologische Räume wurden bereits um 1939 durch Hyers [17] in der folgenden Weise charakterisiert, ohne dabei aber einen Zusammenhang zu uniformen Räumen herzustellen.

Definition 1.10 *Es seien $(X, +, \ \cdot\ )$ ein reeller linearer Raum und $k \geq 1$ eine Konstante. Eine Funktion $\|.\| : X \to [0, \infty)$ heißt* k-Quasinorm[1] *auf X, wenn für alle $x, y \in X$ die Bedingungen*

(QN1) $\|0\| = 0$,

(QN2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ \|\alpha\, x\| = |\alpha| \ \|x\|$,

(QN3') $\|x + y\| \leq k\, (\|x\| + \|y\|)$

erfüllt sind.

Nach der obigen Verfahrensweise definieren wir nun *Familien von Quasinormen.*

Definition 1.11 *Es seien $(X, +, \ \cdot\ )$ ein reeller linearer Raum und $(\Lambda, \prec)$ eine gerichtete Menge. Unter einer* Familie von Quasinormen auf X *versteht man ein System $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Quasinormen $\|.\| : X \to [0, \infty)$ auf X, für das die Bedingungen*

(QN1) $\forall \lambda \in \Lambda : \ \|0\|_\lambda = 0$,

(QN2) $\forall \lambda \in \Lambda, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \ \|\alpha\, x\|_\lambda = |\alpha| \ \|x\|_\lambda$,

(QN3) $\forall \lambda \in \Lambda \ \exists \mu \in \Lambda$ *mit* $\lambda \prec \mu : \ \forall x, y \in X : \ \|x + y\|_\lambda \ \leq \ \|x\|_\mu + \|y\|_\mu$,

(QN4) $\lambda \prec \mu \ \Rightarrow \forall x \in X : \ \|x\|_\lambda \ \leq \ \|x\|_\mu$

erfüllt sind. Gilt zusätzlich die Bedingung

(QN5) $(\forall \lambda \in \Lambda : \ \|x\|_\lambda = 0) \ \Rightarrow \ x = 0$,

so sagen wir, die Familie von Quasinormen ist separierend.

Es gilt das folgende Resultat von Hyers [17].

Theorem 1.6 *Ein linearer Raum $(X, +, \cdot)$ ist bezüglich einer Topologie τ auf X genau dann ein (separierter) linearer topologischer Raum, wenn die Topologie τ durch eine (separierende) Familie von Quasinormen auf X erzeugt werden kann.*

Beweis: Sei (X, τ) ein linearer topologischer Raum mit der Topologie τ, und $\mathfrak{U}$ sei eine Nullumgebungsbasis von (X, τ). Dann ist $\mathfrak{U}$ bezüglich $\supset$ eine gerichtete Menge. Wir können also schreiben $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, wobei $(\Lambda, \prec)$ vermöge der Definition

$$\lambda \prec \mu \ \Leftrightarrow \ U_\lambda \supset U_\mu$$

[1] Hyers [17] verwendet die Bezeichnung Pseudonorm. Diese Bezeichnung wird aber oft im Zusammenhang mit der Separiertheit des Raumes verwendet (vgl. auch die Definition der Pseudometrik [Def.1.5 S.11]).

eine gerichtete Menge ist. Da die U_λ ausgeglichen sind, das heißt, zu jedem $x \in X$ existiert ein $\sigma > 0$ mit $x \in \sigma\, U_\lambda$, können wir für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine Funktion $\|.\|_\lambda : X \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$\|x\|_\lambda := \inf\{t > 0 :\ x \in t\, U_\lambda\}. \tag{1.3}$$

Wir zeigen, dass das System $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Quasinormen auf X darstellt. Natürlich ist $0 \in U_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, woraus (QN1) folgt. Da die U_λ kreisförmig sind, das heißt, $[-1,1] \cdot U_\lambda \subset U_\lambda$, folgt

$$\begin{aligned} \|\alpha\, x\|_\lambda &= \inf\{t > 0 :\ \alpha\, x \in t\, U_\lambda\} \\ &= \inf\{t > 0 :\ |\alpha|\, x \in t\, U_\lambda\} \\ &= \inf\{|\alpha| s > 0 :\ x \in s\, U_\lambda\} = |\alpha|\ \|x\|_\lambda\,, \end{aligned}$$

das heißt, (QN2) ist erfüllt. Sei $U = U_\lambda \in \mathfrak{U}$ beliebig gegeben. Dann gibt es nach der Definition eines linearen topologischen Raumes ein $V \in \mathfrak{U}$ mit $V + V \subset U$. Insbesondere ist $V \subset U$, das heißt, wir können schreiben $V = U_\mu$ mit $\lambda \prec \mu$. Wir zeigen, dass (QN3) gilt. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wählen wir $t_1, t_2 > 0$ mit

$$t_1 < \|x\|_\mu + \frac{\varepsilon}{2}\,,\ x \in t_1\, U_\mu \ \text{ und }\ t_2 < \|y\|_\mu + \frac{\varepsilon}{2}\,,\ y \in t_2\, U_\mu. \tag{1.4}$$

Damit gilt

$$x + y \in t_1\, U_\mu + t_2\, U_\mu \subset (t_1 + t_2)\, U_\mu + (t_1 + t_2)\, U_\mu \overset{(1.1)}{\subset} (t_1 + t_2)\, U_\lambda \tag{1.5}$$

und aus (1.4) und (1.5) folgt

$$\|x + y\|_\lambda \le t_1 + t_2 < \|x\|_\mu + \|y\|_\mu + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist (QN3) erfüllt. (QN4) folgt sofort aus der obigen Wahl der gerichteten Menge $(\Lambda, \prec)$.

Sei nun X separiert, das heißt, es gilt

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{0\}.$$

Aus $\|x\|_\lambda = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$ folgt

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Also muss $x = 0$ sein, das heißt, die Familie der Quasinormen ist separierend. Natürlich wird durch $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ die Topologie τ erzeugt.

Sei nun umgekehrt ein linearer Raum X und eine Familie $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Quasinormen auf X gegeben. Wir setzen

$$U(\lambda, t) := \{x \in X :\ \|x\|_\lambda < t\}$$

und zeigen, dass mit

$$\mathfrak{U} := \{U(\lambda, t) :\ \lambda \in \Lambda,\ t > 0\}$$

eine Nullumgebungsbasis aus ausgeglichenen kreisförmigen Umgebungen $U(\lambda,t)$ auf X gegeben ist. Wegen (QN1) gilt $0 \in U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Mit (QN2) folgt die Kreisförmigkeit aller $U \in \mathfrak{U}$. Nach der Definition von $\mathfrak{U}$ sind die $U \in \mathfrak{U}$ ausgeglichen. Es sei $U = U(\lambda,t) \in \mathfrak{U}$ beliebig gegeben. Wir zeigen, dass mit $\mu \succ \lambda$ aus (QN3) und $V := U(\mu, t/2)$ die Inklusion $V + V \subset U$ gilt, denn seien $x, y \in V$, das heißt, $\|x\|_\mu < t/2$ und $\|y\|_\mu < t/2$, so folgt mit (QN3)

$$\|x+y\|_\lambda \leq \|x\|_\mu + \|y\|_\mu < t,$$

also ist $x + y \in U$. Wegen (QN4) ist $\mathfrak{U}$ eine Filterbasis. Somit ist X ein linearer topologischer Raum.

Setzen wir eine separierende Familie $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Quasinormen voraus, das heißt, es ist zusätzlich (QN5) erfüllt, so gilt

$$\bigcap_{U\in\mathfrak{U}} U \overset{Def.}{=} \bigcap_{\lambda\in\Lambda,\, t>0} U(\lambda,t) = \{x \in X :\ \forall\lambda \in \Lambda :\ \|x\|_\lambda = 0\} \overset{(QN5)}{=} \{0\}.$$

X ist also in diesem Fall ein separierter linearer topologischer Raum. ■

Wir bezeichnen im Folgenden einen linearen topologischen Raum mit $(X, \mathfrak{U})$, wobei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis ist, oder mit $\big(X, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\big)$, wobei $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Quasinormen ist.

Beschränkte Teilmengen eines linearen topologischen Raumes werden bekanntlich ([22]) folgendermaßen definiert.

Definition 1.12 *Es sei $(X, \mathfrak{U})$ ein linearer topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt beschränkt, wenn es zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $\sigma > 0$ gibt, so dass $B \subset \sigma U$.*

Wir wollen nun beschränkte Mengen eines linearen topologischen Raumes mit Hilfe von Quasinormen charakterisieren.

Satz 1.7 *Es sei $\big(X, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\big)$ ein linearer topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn gilt:*

$$\forall\lambda \in \Lambda\ \exists c_\lambda > 0 :\ \forall b \in B :\ \|b\|_\lambda \leq c_\lambda.$$

Beweis: Sei B beschränkt nach Definition 1.12. Dann gibt es zu $U(\lambda, 1) = \{x \in X :\ \|x\|_\lambda < 1\} \in \mathfrak{U}$ ein $\sigma > 0$ mit $B \subset \sigma\, U(\lambda, 1)$, das heißt, $\|b\|_\lambda \leq \sigma =: c_\lambda$ für alle $b \in B$.

Sei umgekehrt $U(\lambda,t) \in \mathfrak{U}$ beliebig gegeben und für beliebiges $b \in B$ gelte $\|b\|_\lambda \leq c_\lambda$, so folgt $t\, b \in c_\lambda\, U(\lambda,t)$ und somit ist $B \subset \sigma\, U(\lambda,t)$ mit $\sigma := c_\lambda/t$. ■

Wir wollen noch ein weiteres nützliches Kriterium zur Beschränktheit von Teilmengen eines linearen topologischen Raumes angeben.

Korollar 1.8 *Es sei $\big(X, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\big)$ ein linearer topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn gilt:*

$$\forall\lambda \in \Lambda :\ \sup_{a,b\in B} \|b-a\|_\lambda < \infty. \tag{1.6}$$

Beweis: Es sei (1.6) erfüllt. Mit (QN3) folgt für beliebiges $\lambda \in \Lambda$ und für ein $\bar{a} \in B$

$$\sup_{b\in B} \|b\|_\lambda \leq \sup_{b\in B} \|b-\bar{a}\|_\mu + \|\bar{a}\|_\mu \leq \sup_{a,b\in B} \|b-a\|_\mu + \|\bar{a}\|_\mu < \infty.$$

Es existiert also zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $c_\lambda > 0$ mit $\|b\|_\lambda \leq c_\lambda$ für alle $b \in B$. Sei umgekehrt B beschränkt nach Satz 1.7. Dann gilt

$$\sup_{a,b\in B} \|b-a\|_\lambda \leq \sup_{a\in B} \|a\|_\mu + \sup_{b\in B} \|b\|_\mu \leq c_\mu + c_\mu < \infty$$

für alle $\lambda \in \Lambda$, das heißt, (1.6) ist erfüllt. ∎

Wir wollen hier noch ein Beispiel für einen linearen topologischen Raum, der nicht lokalkonvex ist, angeben. Das Beispiel wurde aus [22, S.161] entnommen und stammt von M. M. Day [7].

Beispiel 1.1 *Es sei L^p der Raum aller auf $[a,b]$ erklärten messbaren reellwertigen Funktionen $f(t)$ mit*

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty,$$

wobei $0 < p < 1$ ist und wie üblich äquivalente Funktionen identifiziert werden. Durch die Umgebungen

$$U_\varepsilon := \left\{ f \in L^p : \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon \right\}$$

wird, wie in [22] gezeigt wird, ein separierter linearer topologischer Raum erzeugt, der nicht lokalkonvex ist. Der Raum L^p hat die folgenden Eigenschaften (vgl. auch [28, S.125 Aufg.3b]):

(LP1) Jedes lineare stetige Funktional verschwindet identisch.

(LP2) Die einzige konvexe Menge mit nichtleerem Inneren ist der gesamte Raum.

Diese Eigenschaften des Raumes L^p mit $p \in (0,1)$ sollen später zur Diskussion von Voraussetzungen, die wir für Aussagen in linearen topologischen Räumen stellen werden, herangezogen werden.

1.3 Normierte Teilräume linearer topologischer Räume

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen ein linearer Teilraum eines linearen topologischen Raumes einen normierten Raum oder sogar einen Banachraum bildet und in welchem Maße sich topologische Eigenschaften übertragen lassen. In [16] wurden mit analogen Aussagen für lokalkonvexe Räume Varianten des Ekeland'schen Prinzips für lokalkonvexe Räume unter Nutzung der entsprechenden Banachraumvariante bewiesen. Einige der im Folgenden bewiesenen Aussagen findet man in allgemeinerem Zusammenhang und teilweise unter Verwendung anderer Begriffe auch in [22].

Definition 1.13 *Es seien E ein reeller linearer Raum und $T \subset E$ eine Teilmenge von E. Ein Punkt $t \in T$ heißt* algebraisch innerer *Punkt von T bezüglich E falls gilt:*

$$\forall x \in E \; \exists \alpha > 0 : \; t + [0, \alpha] \cdot x \subset T.$$

Proposition 1.9 *Es seien E ein linearer Raum und $T \subset E$ eine ausgeglichene, kreisförmige Teilmenge. Dann ist 0 algebraisch innerer Punkt von T (bezüglich E).*

Beweis: Weil T ausgeglichen ist, existiert zu jedem $x \in E$ ein $\sigma > 0$, so dass $x \in \sigma T$. Mit $\alpha := 1/\sigma$ folgt $\alpha \, x \in T$. Wegen der Kreisförmigkeit von T gilt $[-1, 1] \cdot \alpha \cdot x \subset T$ und daraus folgt insbesondere, dass $[0, \alpha] \cdot x \subset T$ gilt. ■

Sei T eine Teilmenge eines linearen Raumes E. Die Menge aller endlichen Linearkombinationen aus Elementen von T heißt *lineare Hülle* von T und wird mit $\operatorname{lin} T$ bezeichnet. Es ist bekannt, dass $\operatorname{lin} T$ ein linearer Teilraum von E ist. Eine konvexe und kreisförmige Teilmenge eines linearen Raumes heißt *absolutkonvex*.

Proposition 1.10 *Es seien E ein linearer Raum und $T \subset E$ eine absolutkonvexe Teilmenge. Dann ist 0 algebraisch innerer Punkt von T bezüglich* $\operatorname{lin} T$.

Beweis: Wegen Proposition 1.9 bleibt lediglich zu zeigen, dass T ausgeglichen ist im linearen Teilraum $\operatorname{lin} T$. Sei also $x \in \operatorname{lin} T$ beliebig gegeben. Dann ist $x = \sum_{i=1}^{n} \rho_i t_i$ mit $\rho_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t_i \in T$ für $i = 1, ..., n$. Wegen der Kreisförmigkeit von T können wir x auch darstellen als $x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i s_i$ mit $\sigma_i > 0$ und $s_i \in T$ für $i = 1, ..., n$. Wir setzen $\sigma := \sum_{j=1}^{n} \sigma_j > 0$. Damit folgt unter Ausnutzung der Konvexität von T, dass gilt:

$$\frac{1}{\sigma} x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{\sigma} s_i \in T.$$

Somit ist T ausgeglichen in $\operatorname{lin} T$. Die Eigenschaft der Kreisförmigkeit gilt naürlich auch auf dem Teilraum $\operatorname{lin} T$ von E. Die Anwendung von Proposition 1.9 auf den linearen Raum $\operatorname{lin} T$ liefert die Behauptung. ■

Wir führen für eine Teilmenge T eines linearen Raumes E durch

$$\mu_T(x) := \inf\{\sigma > 0 : \; x \in \sigma \, T\}$$

das *Minkowski-Funktional* bezüglich T ein.

Proposition 1.11 *Es seien X ein separierter linearer topologischer Raum und $T \subset X$ eine absolutkonvexe beschränkte Teilmenge. Dann ist durch das Minkowskifunktional μ_T eine Norm auf dem linearen Teilraum* $\operatorname{lin} T$ *gegeben.*

Beweis: Wegen Proposition 1.10 ist $\{\sigma > 0 : \; x \in \sigma \, T\} \neq \emptyset$ für alle $x \in \operatorname{lin} T$. Das bedeutet $\mu_T : \; \operatorname{lin} T \to [0, \infty)$. Offenbar ist μ_T positiv homogen, das heißt, es gilt $\mu_T(\alpha \, x) = \alpha \, \mu_T(x)$ für alle $x \in \operatorname{lin} T$ und für alle $\alpha \geq 0$. Wegen der Kreisförmigkeit der Menge T gilt dann auch $\mu_T(\alpha \, x) = |\alpha| \, \mu_T(x)$ für alle $x \in \operatorname{lin} T$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Aus der Konvexität von T folgt, dass μ_T konvex ist und unter Verwendung der positiven Homogenität von μ_T folgt die Gültigkeit der Dreiecksungleichung. Es bleibt zu zeigen, dass aus $\mu_T(x) = 0$ folgt, dass $x = 0$ ist. Sei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis von X. Weil T beschränkt ist, existiert zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $\sigma > 0$, so dass $1/\sigma\, T \subset U$. Wegen $\mu_T(x) = 0$ folgt für beliebiges $\sigma > 0$, dass $x \in 1/\sigma\, T$. Damit ist $x \in U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Da X separiert ist, folgt $x = 0$. ∎

Wenn die Voraussetzungen von Proposition 1.11 erfüllt sind, bezeichnen wir im Folgenden den normierten Raum $(\operatorname{lin} T, \mu_T)$ mit $(X_T, \|.\|_T)$ oder kurz mit X_T. Um bestimmte topologische Begriffe entweder dem separierten linearen topologischen Raum X oder dem normierten Raum X_T zuordnen zu können, bezeichnen wir die Topologie von X mit χ und die Topologie von X_T mit τ. Wir unterscheiden dann zum Beispiel zwischen χ-Konvergenz und τ-Konvergenz oder zwischen χ-Cauchyfolgen und τ-Cauchyfolgen.

Proposition 1.12 *Es seien X ein separierter linearer topologischer Raum und $T \subset X$ eine χ-folgenvollständige absolutkonvexe χ-beschränkte Teilmenge. Dann ist $(X_T, \|.\|_T)$ ein Banachraum.*

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass der nach Prop. 1.11 normierte Raum $(X_T, \|.\|_T)$ τ-vollständig ist. Sei also $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_T$ eine τ-Cauchyfolge. Dann ist wegen

$$| \, \|x_n\|_T - \|x_m\|_T | \leq \|x_n - x_m\|_T$$

auch $\{\|x_n\|_T\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent gegen eine Zahl $\alpha \geq 0$. Wir betrachten nun die Folge $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_T$ definiert durch

$$t_n := \begin{cases} \frac{x_n}{2\|x_n\|_T} & \text{, falls} \quad \|x_n\|_T \geq \frac{1}{2} \\[2ex] x_n & \text{, falls} \quad \|x_n\|_T < \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Nach Definition der Norm $\|.\|_T$ ist $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. Wir zeigen nun, dass gilt:

$$\|t_n - t_m\|_T \leq 2\,\|x_n - x_m\|_T\,. \tag{1.7}$$

Dazu unterscheiden wir drei Fälle.

(1) Für $\|x_n\|_T, \|x_m\|_T < 1/2$ ist die Aussage trivial.

(2) Für $\|x_n\|_T \geq 1/2$ und $\|x_m\|_T < 1/2$ gilt:

$$\begin{aligned} \|t_n - t_m\|_T &\leq \left\| \frac{x_n}{2\,\|x_n\|_T} - x_n \right\|_T + \|x_n - x_m\|_T \\ &= |\tfrac{1}{2} - \|x_n\|_T| + \|x_n - x_m\|_T \\ &\leq | \, \|x_m\|_T - \|x_n\|_T| + \|x_n - x_m\|_T \\ &\leq 2\,\|x_n - x_m\|_T\,. \end{aligned}$$

(3) Für $\|x_n\|_T, \|x_m\|_T \geq 1/2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|t_n - t_m\|_T &\leq \tfrac{1}{2}\left(\left\|\tfrac{x_n}{\|x_n\|_T} - \tfrac{x_n}{\|x_m\|_T}\right\|_T + \left\|\tfrac{x_n}{\|x_m\|_T} - \tfrac{x_m}{\|x_m\|_T}\right\|_T\right) \\
&= \tfrac{1}{2\,\|x_m\|_T}\left(\|x_m\|_T - \|x_n\|_T + \|x_n - x_m\|_T\right) \\
&\leq \tfrac{1}{2\,\|x_m\|_T}\, 2\,\|x_n - x_m\|_T \\
&\leq 2\,\|x_n - x_m\|_T\,.
\end{aligned}$$

Aus (1.7) folgt, dass $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ eine τ-Cauchyfolge ist.

Wir zeigen nun, dass $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ auch eine χ-Cauchyfolge ist. Sei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis von X. Wegen der χ-Beschränktheit von T gibt es zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $\sigma > 0$, so dass für $\varepsilon := 1/\sigma$ gilt $\varepsilon T \subset U$. Weil $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ eine τ-Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem solchen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $t_n - t_m \in \varepsilon T$ ist für $n, m \geq n_0$. Also gibt es zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $t_n - t_m \in U$ ist für $n, m \geq n_0$, dass heißt, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ ist χ-Cauchyfolge. Weil T nach Voraussetzung χ-folgenvollständig ist, konvergiert die Folge $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Topologie χ gegen ein Element $\bar{t} \in T$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Weil $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ eine τ-Cauchyfolge ist, gilt $t_n - t_m \in \varepsilon T$. Der Grenzübergang $m \to \infty$ (in der Topologie χ) liefert $t_n - \bar{t} \in \varepsilon T$. Folglich konvergiert die Folge $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich der Topologie τ gegen $\bar{t} \in T$. Im letzten Schritt ist zu zeigen, dass $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich τ gegen ein $\bar{x} \in X_T$ konvergiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|x_n - \alpha\bar{t}\,\|_T &\leq \|x_n - \|x_n\|_T\,\bar{t}\,\|_T + \|\,\|x_n\|_T\,\bar{t} - \alpha\bar{t}\,\|_T \\
&= \|x_n\|_T\,\|t_n - \bar{t}\,\|_T + |\,\|x_n\|_T - \alpha\,|\;\|\bar{t}\|_T\,.
\end{aligned}$$

Da beide Summanden des letzten Terms gegen 0 konvergieren, erhalten wir die gewünschte Konvergenzeigenschaft, das heißt, $x_n \xrightarrow{\tau} \alpha\,\bar{t} =: \bar{x} \in X_T$. Somit ist $(X_T, \|.\|_T)$ ein Banachraum. ■

Proposition 1.13 *Es seien X ein separierter linearer topologischer Raum und $T \subset X$ eine χ-folgenvollständige absolutkonvexe χ-beschränkte Teilmenge. Dann folgt aus der χ-Folgenabgeschlossenheit von $A \subset X$ die τ-Abgeschlossenheit von $A \cap X_T$.*

Beweis: Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X_T \cap A$ eine τ-konvergente Folge. Dann ist zunächst klar, dass der Grenzwert $\bar{x}$ dieser Folge in X_T liegt. In Proposition 1.12 haben wir gezeigt, dass eine τ-Cauchyfolge auch χ-Cauchyfolge ist. Analog folgt, dass unsere τ-konvergente Folge auch χ-konvergent ist, und zwar gegen den gleichen Grenzwert $\bar{x}$. Aufgrund der χ-Folgenabgeschlossenheit von A liegt somit $\bar{x} \in A$. Also ist $X_T \cap A$ τ-abgeschlossen. ■

Eine analoge Aussage für die Eigenschaft der Beschränktheit konnten wir nicht zeigen. Aber in Abschnitt 2.7 [Lemma 2.17] werden wir zeigen, dass unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen aus der χ-Beschränktheit einer Menge $A \subset X$ die τ-Beschränktheit der Menge $A \cap X_T$ folgt. Dies werden sehr einschränkende Voraussetzungen sein, die aber für unsere Zwecke ausreichend sind.

Wir wollen nun noch eine Bemerkung zu konvexen Mengen in linearen topologischen Räumen machen. Die *konvexe Hülle* $\operatorname{co} A$ einer Menge A ist definiert als Durchschnitt aller konvexen Mengen, die A enthalten und ist damit konvex. Man sagt auch, die konvexe Hülle von A ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält. Da man in einem lokalkonvexen Raum konvexe Umgebungen hat, folgt leicht, dass die konvexe Hülle einer beschränkten Menge wieder beschränkt ist. Das gilt im Allgemeinen nicht im linearen topologischen Raum.

Beispiel 1.2 *Wir betrachten den Raum L^p mit $p \in (0,1)$ aus Beispiel 1.1. Nach [22, S.163] ist dieser Raum* lokalbeschränkt*, das heißt, es existiert eine beschränkte Umgebung von Null und somit eine beschränkte offene Menge. Nach (LP2) ist die konvexe Hülle dieser beschränkten offenen Menge der gesamte Raum L^p, das heißt, die konvexe Hülle ist nicht beschränkt.*

Für unsere Zwecke genügt aber eine schwächere Aussage.

Satz 1.14 *In einem linearen topologischen Raum X ist die konvexe Hülle der Vereinigung endlich vieler konvexer beschränkter Mengen beschränkt.*

Beweis: Der Satz ist bewiesen, wenn die Aussage für die Vereinigung von zwei konvexen beschränkten Mengen A und B gezeigt wird. Sei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis von X. Da die Elemente $U \in \mathfrak{U}$ kreisförmig sind, erhalten wir, dass die kreisförmige Hülle $\operatorname{kr} M := [-1,1] \cdot M$ einer beschränkten Menge M wieder beschränkt ist. Insbesondere sind die Mengen $[0,1] \cdot A$, $[0,1] \cdot B$ beschränkt.

Die konvexe Hülle einer Menge M kann bekanntlich auch als Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus M interpretiert werden. Da A und B konvex sind, können die Elemente x von $\operatorname{co}(A \cup B)$ dargestellt werden durch $x = \gamma\, a + (1-\gamma)\, b$ mit $a \in A$, $b \in B$ und $\gamma \in [0,1]$. Das bedeutet, $\operatorname{co}(A \cup B) \subset [0,1]\, A + [0,1]\, B$.

Wir zeigen nun, dass $\operatorname{co}(A \cup B)$ beschränkt ist. Sei dazu $U \in \mathfrak{U}$ beliebig vorgegeben. Nach (1.1) gibt es ein $V \in \mathfrak{U}$ mit $V + V \subset U$. Zu diesem V gibt es wegen der Beschränktheit von $[0,1]\, A$ und $[0,1]\, B$ positive Zahlen $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, so dass $[0,1]\, A \subset \sigma_1 V$ und $[0,1]\, B \subset \sigma_2 V$. Für $\sigma := \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ folgt, $\operatorname{co}(A \cup B) \subset [0,1]\, A + [0,1]\, B \subset \sigma V + \sigma V \subset \sigma U$. Das heißt, $\operatorname{co}(A \cup B)$ ist beschränkt. ■

Korollar 1.15 *In einem linearen topologischen Raum X ist die absolutkonvexe Hülle der Vereinigung endlich vieler konvexer beschränkter Mengen beschränkt.*

Beweis: Nach [22, S.177 (2)] ist die absolutkonvexe Hülle die konvexe Hülle der kreisförmigen Hülle. Die kreisförmige Hülle einer Menge M kann geschrieben werden als:

$$\operatorname{kr} M = [0,1]\, M \cup [0,1]\, (-M) = \operatorname{co}(M \cup \{0\}) \cup \operatorname{co}(-M \cup \{0\}).$$

Satz 1.14 liefert die Behauptung. ■

1.4 Kegelwertige Metriken

Nemeth formulierte in [23] ein vektorwertiges Ekeland'sches Variationsprinzip in Räumen, deren Topologie durch eine sogenannte *kegelwertige Metrik* erzeugt wird. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass es sich bei diesen Räumen um uniforme Räume handelt. Anschließend werden wir Kriterien zur Metrisierbarkeit und zur Separiertheit dieser Räume angeben. Sofern uns bekannt ist, handelt es sich bei den Aussagen dieses Abschnittes um neue Resultate.

Es sei E ein linearer Raum und $K \subset E$ bezeichne einen konvexen spitzen Kegel in E. Dann ist durch

$$y_1 \leq_K y_2 \;\Leftrightarrow\; y_2 - y_1 \in K$$

eine Halbordnung $\leq_K$ in E gegeben, das heißt, die Relation $\leq_K$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, und für alle $y, y_1, y_2 \in E$ und alle $\gamma \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} y_1 \leq_K y_2 \quad &\Rightarrow \quad y_1 + y \leq_K y_2 + y\,, \\ y_1 \leq_K y_2 \quad &\Rightarrow \quad \gamma y_1 \leq_K \gamma y_2\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Mit Hilfe dieser Halbordnung führen wir nun kegelwertige Metriken ein.

Definition 1.14 *Es seien E ein linearer Raum, $K \subset E$ ein nichtleerer konvexer spitzer Kegel und X eine Menge. Eine Abbildung $r\,:\, X \times X \to K$ heißt K-Metrik, wenn für alle $x, y, z \in X$ die Bedingungen*

(CM1) $r(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

(CM2) $r(x, y) = r(y, x)$,

(CM3) $r(x, y) \leq_K r(x, z) + r(z, y)$

erfüllt sind.

Zusätzlich zur Ordnungsstruktur wollen wir nun eine topologische Struktur voraussetzen und betrachten deshalb einen linearen topologischen Raum Y. Eine wichtige Klasse von konvexen Kegeln in linearen topologischen Räumen ist die Klasse der normalen Kegel. Die Eigenschaft eines Kegels K, normal zu sein, beschreibt einen Zusammenhang der topologischen Struktur des linearen topologischen Raumes Y mit der durch K erzeugten Ordnungsstruktur auf Y. Die hier gewählte Definition eines normalen Kegels vergleiche man auch mit äquivalenten Charakterisierungen (vgl. [18, S.5 Th. 2.1]).

Definition 1.15 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum und $K \subset Y$ ein nichtleerer konvexer spitzer Kegel. K heißt* normal, *wenn eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ für Y existiert, so dass für beliebiges $U \in \mathfrak{U}$ aus $0 \leq_K x \leq_K y \in U$ stets $x \in U$ folgt.*

Sei nun $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis des linearen topologischen Raumes Y. Wir definieren in $X \times X$ die Mengen

$$N_U := \{(x, y) \in X \times X \,:\, r(x, y) \in U\}, \tag{1.9}$$

wobei $U \in \mathfrak{U}$ ist.

Satz 1.16 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein nichtleerer konvexer normaler Kegel, X eine Menge und $r : X \times X \to K$ eine K-Metrik auf X. Dann ist durch $\mathfrak{B} := \{N_U : U \in \mathfrak{U}\}$ die Basis einer uniformen Struktur $\mathfrak{N}$ auf $X \times X$ gegeben.*

Beweis: $\mathfrak{B}$ ist eine Filterbasis auf X, denn seien $N_U, N_V \in \mathfrak{B}$ gegeben, so gibt es, da die Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ von Y eine Filterbasis auf Y ist, zu $U, V \in \mathfrak{U}$ ein $W \in \mathfrak{U}$ mit $W \subset U \cap V$. Es ist $N_W \in \mathfrak{B}$, und es gilt $N_W \subset N_U \cap N_V$. Wegen $0 \in U$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ und (CM1) gilt (N1) aus Definition 1.4. Um (N2) zu zeigen sei $N \in \mathfrak{N}$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein Basiselement $N_U \in \mathfrak{B}$ mit $N_U \subset N$. Wegen (CM2) und (1.9) ist $N_U^{-1} \in \mathfrak{B}$ und folglich $N^{-1} \in \mathfrak{N}$. Wir zeigen schließlich, dass auch (N3) erfüllt ist. Sei dazu $N \in \mathfrak{N}$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein $N_U \in \mathfrak{B}$ mit $N_U \subset N$. Zu dem zugehörigen $U \in \mathfrak{U}$ gibt es ein $V \in \mathfrak{U}$ mit $V + V \subset \mathfrak{U}$. Wir setzen $M := N_V$ und zeigen, dass $M \circ M \subset N$. Sei also $(x, y) \in M \circ M$, das heißt, es gibt ein $z \in X$, so dass $r(x, z) \in V$ und $r(z, y) \in V$. Es ist also $r(x, z) + r(z, y) \subset V + V \subset U$. Da K normal ist und wegen (CM3) folgt $r(x, y) \in U$, das heißt, $(x, y) \in N_U \subset N$. ∎

Satz 1.16 gibt Anlass zu folgender Definition (vgl. [4]).

Definition 1.16 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein nichtleerer konvexer normaler Kegel, X eine Menge und $r : X \times X \to K$ eine K-Metrik auf X. Dann heißt (X, r) K-metrischer Raum.*

Als Hauptresultat dieses Abschnittes haben wir also gezeigt, dass jeder K-metrische Raum ein uniformer Raum ist. Somit kann die Topologie eines K-metrischen Raumes, wie in Abschnitt 1.1 gezeigt wurde, durch eine Familie von Quasimetriken und sogar durch eine Familie von Pseudometriken erzeugt werden. Wir wollen nun die Metrisierbarkeit eines K-metrischen Raumes untersuchen.

Satz 1.17 *Es sei (X, r) ein K-metrischer Raum, wobei der lineare topologische Raum Y durch eine Familie $\{\|.\|_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Quasinormen erzeugt wird. Falls die Menge*

$$\bar{\Lambda} := \left\{ \lambda \in \Lambda : \sup_{y \in K} \|y\|_\lambda > 0 \right\}$$

abzählbar ist, so ist (X, r) metrisierbar.

Beweis: Sei also $\bar{\Lambda}$ abzählbar. Wir zeigen, dass die Basis $\mathfrak{B}$ der zugehörigen uniformen Struktur $\mathfrak{N}$ nur abzählbar viele Elemente enthält. Durch

$$\mathfrak{U} := \{U(\lambda, 1/n) : \lambda \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$$

mit

$$U(\lambda, 1/n) := \{y \in Y : \|y\|_\lambda < 1/n\}$$

ist eine Nullumgebungsbasis des linearen topologischen Raumes Y gegeben. Die Basis $\mathfrak{B}$ der uniformen Struktur $\mathfrak{N}$ besteht also aus den Elementen

$$N_{\lambda,1/n} = \{(x, v) \in X \times X : \|r(x, v)\|_\lambda < 1/n\},$$

wobei $\lambda \in \Lambda$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Für jedes $\lambda \in \Lambda \setminus \bar{\Lambda}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $N_{\lambda,1/n} = X \times X$. Diese Elemente brauchen also nicht berücksichtigt werden. Die uniforme Struktur $\mathfrak{N}$ wird also bereits durch

$$\mathfrak{B} = \left\{N_{\lambda,1/n} : \lambda \in \bar{\Lambda}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

erzeugt. Für den uniformen Raum (X,r) ist somit das erste Abzählbarkeitsaxiom (siehe [22]) erfüllt, das heißt, (X,r) ist metrisierbar. ■

Wir wollen noch ein weiteres schwächeres Kriterium für die Metrisierbarkeit eines linearen topologischen Raumes Y angeben. Dieses Kriterium soll unabhängig von der Wahl des Kegels K sein. Wir fordern, dass für den Raum Y das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist. Das ist genau dann der Fall, wenn Y metrisierbar ist, das heißt, die Topologie wird durch eine einzige Metrik erzeugt. Solche Räume werden manchmal auch als Frèchet-Räume bezeichnet. Zusätzlich wird für einen Frèchet-Raum allerdings die Vollständigkeit, teilweise noch die Konvexität der Elemente der Nullumgebungsbasis gefordert. Dennoch muss ein Frèchet-Raum kein Banachraum sein. Man vergleiche hierzu auch die Ausführungen in Köthe [22]. Man beachte weiterhin, dass eine die Topologie erzeugende Metrik d auf einem linearen topologischen Raum immer translationsinvariant gewählt werden kann. Es genügt somit eine Abbildung $h : Y \to \mathbb{R}_+$ mit $h(y) := d(y, 0)$ zu betrachten.

Korollar 1.18 *Es sei (X, r) ein K-metrischer Raum, wobei der lineare topologische Raum Y durch eine Metrik $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$ erzeugt wird. Dann ist (X, r) metrisierbar und die Abbildung $h \circ r : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit $h : Y \to \mathbb{R}_+$, $h(y) := d(y, 0)$ ist eine Metrik, die die Topologie des K-metrischen Raumes erzeugt.*

Beweis: Wir gehen wie im Beweis des Satzes 1.17 vor. Es ist hier

$$\mathfrak{U} := \{U(1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

mit

$$U(1/n) := \{y \in Y : d(y, 0) < 1/n\}$$

eine Nullumgebungsbasis des linearen topologischen Raumes Y. Die Basis $\mathfrak{B}$ der uniformen Struktur $\mathfrak{N}$ besteht also aus den Elementen

$$N_{1/n} = \{(x, v) \in X \times X : h \circ r(x, v) < 1/n\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Die Behauptungen des Korollars sind nun offensichtlich. ■

Schließlich wollen wir noch zwei Kriterien für die Separiertheit eines K-metrischen Raumes angeben.

Satz 1.19 *Es seien (X, r) ein K-metrischer Raum und $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis des zugehörigen linearen topologischen Raumes Y. Falls gilt*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U \cap K = \{0\},$$

so ist (X,r) separiert.

Beweis: Es seien $\mathfrak{N}$ die uniforme Struktur von (X, r) und $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{N}$. Dann gilt:

$$\bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = \bigcap_{N_U \in \mathfrak{B}} N_U = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} N_U = \{(x, v) \in X \times X : r(x, v) \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U \cap K\} = \Delta.$$

Proposition 1.1 liefert die Behauptung. ■

Korollar 1.20 *Es seien (X, r) ein K-metrischer Raum und Y der zugehörige lineare topologischen Raum. Falls Y separiert ist, so ist auch (X, r) separiert.*

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Proposition 1.5 und Satz 1.19. ■

Kapitel 2

Minimalpunkttheoreme

Minimalpunkttheoreme sind Aussagen, die in enger Beziehung zum Ekeland'schen Variationsprinzip [9] stehen. Es handelt sich um Aussagen zur Existenz minimaler Punkte in einem Produktraum, der aus zwei Komponenten besteht. Solche Aussagen wurden zuerst von Phelps [27] betrachtet, wobei dort ein Produktraum $X \times \mathbb{R}$ (X Banachraum) zugrunde gelegt wurde. In den Arbeiten von Göpfert und Tammer [12] (1995) und Göpfert, Tammer und Zălinescu [13] (1999), [14] (2000) wurde die reelle Komponente des zugrunde liegenden Produktraumes durch einen allgemeineren Vektorraum ersetzt. Als Folgerung erhält man aus diesen allgemeineren Minimalpunkttheoremen sogenannte vektorwertige Varianten des Ekeland'schen Prinzips. Das bedeutet, dass dabei anstelle von reellwertigen Funktionen vektorwertige Funktionen betrachtet werden. Unabhängig davon wurde im Jahre 2000 von Chen, Huang und Hou [4] eine Variante des Ekeland'schen Prinzips für mengenwertige Abbildungen bewiesen.

Wir werden zunächst das Minimalpunkttheorem aus [13] unter Nutzung der Ergebnisse des vorigen Kapitels bezüglich der zugrunde liegenden Räume verallgemeinern. Anschließend geben wir eine den hier gestellten Voraussetzungen entsprechende Variante des Ekeland'schen Prinzips für mengenwertige Abbildungen an und zeigen, dass diese Aussage äquivalent zum Minimalpunkttheorem ist. Wir geben zwei weitere äquivalente Formulierungen an und zeigen, dass eine vektorwertige Variante des Ekeland'schen Prinzips auf einfache Weise folgt.

Da die Voraussetzungen des Minimalpunkttheorems sehr allgemein sind, geben wir noch einige hinreichende Bedingungen an. Es handelt sich dabei um stärkere Voraussetzungen, die für die meisten Anwendungen aber noch erfüllbar sind.

Ein weiterer Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Analyse der Beweistechnik. Wir werden unser Minimalpunkttheorem mit dem Prinzip von Brézis und Browder beweisen. Die Beweistechnik dieses Prinzips wird auch im Beweis des Minimalpunkttheorems in [13] verwendet. Im Unterschied dazu werden Minimalpunkttheoreme oder Varianten des Ekeland'schen Prinzips sonst mit dem Zorn'schen Lemma bewiesen. Ein Beweis mit dem Prinzip von Brézis und Browder hat den Vorteil, dass sich die Voraussetzungen auf Folgen beziehen, wobei man bei Beweisen, die das Zorn'sche Lemma oder dazu äquivalente Aussagen verwenden, die analogen Voraussetzungen für Netze machen muss. Da das Zorn'sche Lemma dem Auswahlaxiom äquivalent ist, kann es darüberhinaus auch als prinzipielle Frage betrachtet werden, ob oder wann dieses Axiom für die Aussagen, die hier gemacht werden, benötigt wird.

Um dem Wesen vektorwertiger Aussagen auf die Spur zu kommen, wollen wir eine Art "mathematisches Experiment" durchführen. Wir setzen im Minimalpunkttheorem alle Aussagen bezüglich der ersten (topologisch dominierten) Komponente des Produktraumes außer Kraft und versuchen ein klassisches Resultat, das Phelps'sche Lemma, unter alleiniger Verwendung der zweiten (linear dominierten) Komponente abzuleiten. Unter erheblichem Aufwand ist das sogar für eine Variante des Phelps'schen Lemmas in linearen topologischen Räumen (vgl. die Äquivalenzaussagen in Kapitel 3) gelungen. Dabei ist vor allem zu bemerken, dass sich dieser Beweis von einem direkten Beweis dahingehend unterscheidet, dass kein allgemeines Prinzip wie das von Brézis und Browder oder das Zorn'sche Lemma[1]verwendet wird. Es scheint also, dass die "Substanz" des Prinzips von Brézis und Browder auch in diese Raumkomponente übergeht.

An den Schluss des Kapitels stellen wir einen kurzen Vergleich unserer Voraussetzungen mit denen aus anderen Arbeiten.

2.1 Das Prinzip von Brézis und Browder

Das Prinzip von Brézis und Browder liefert Aussagen über die Existenz minimaler Punkte in quasigeordneten Mengen (vgl. Bemerkung nach Beweis von Prop. 2.1). Die hier wiedergegebene Variante entspricht im Wesentlichen [2, Corollary 1].

Proposition 2.1 *E seien* $(W, \preceq)$ *eine quasigeordnete Menge (das heißt, reflexiv und transitiv) und* $\phi : W \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, so dass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:*

(A1) ϕ *ist nach unten beschränkt.*

(A2) Aus $w_1 \preceq w_2$, $w_1 \neq w_2$ *folgt* $\phi(w_1) < \phi(w_2)$.

(A3) Für jede $\preceq$*-fallende Folge* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ *existiert ein* $w \in W$, *so dass* $w \preceq w_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es zu jedem $w_0 \in W$ *ein* $\bar{w} \in W$, *so dass gilt:*

(i) $\bar{w} \preceq w_0$,

(ii) $\bar{w}$ *ist minimal in W.*

Beweis: Sei $\rho(w) := \inf\{\phi(u) : u \in W, u \preceq w\}$. Dann kann man induktiv eine Folge $\{w_n\} \subset W$ definieren, so dass $w_1 := w_0$, $w_{n+1} \preceq w_n$ und $\phi(w_{n+1}) \leq \rho(w_n) + \frac{1}{n}$ gilt. Wegen (A3) existiert ein $\bar{w} \in W$, so dass $\bar{w} \preceq w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Natürlich ist für $\bar{w}$ die erste Aussage erfüllt, d. h. $\bar{w} \preceq w_0$. Wir zeigen, dass $\bar{w}$ auch minimal ist. Sei dazu $\hat{w} \preceq \bar{w}$ ($\preceq w_{n+1} \preceq w_n$). Aus (A2) und der Transitivität der Relation folgt $\rho(w_n) \leq \phi(\hat{w}) \leq \phi(\bar{w}) \leq \phi(w_{n+1}) \leq \rho(w_n) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\hat{w} \preceq \bar{w}$ und $\phi(\hat{w}) = \phi(\bar{w})$ und nochmals (A2) angewendet, folgt $\hat{w} = \bar{w}$. ■

[1]Eigentlich wird das Zorn'sche Lemma doch verwendet, und zwar in Form eines Trennungssatzes. Diese Anwendung des Zorn'schen Lemmas bezieht sich aber auf eine völlig andere Ordnungsrelation (vgl. Beweis des Satzes von Hahn-Banach).

Man beachte, dass die Antisymmetrie der Relation nur deshalb nicht explizit vorausgesetzt werden muss, weil diese bereits aus (A2) folgt. Denn seien $w_1, w_2 \in W$ mit $w_1 \preceq w_2$ und $w_2 \preceq w_1$ gegeben, und nehmen wir an, dass $w_1 \neq w_2$. Dann folgt mit (A2), dass $\phi(w_1) < \phi(w_2)$, aber auch $\phi(w_1) > \phi(w_2)$ gilt. Dies ist ein Widerspruch. Es muss somit $w_1 = w_2$ sein, das heißt, die Relation $\preceq$ ist antisymmetrisch. Es liegt also eine Halbordnung vor.

Die Voraussetzungen und die Aussagen des Prinzips von Brézis und Browder haben eine typische Struktur, die wir teilweise im Minimalpunkttheorem wiedererkennen werden. (A1) ist eine Beschränktheitsvoraussetzung an die Funktion ϕ. Mit (A2) fordern wir eine Art strenge Monotonie der Funktion ϕ. Die dritte Voraussetzung erinnert an eine Voraussetzung des Zorn'schen Lemmas. Es wird in (A3) die Existenz von unteren Schranken vorausgesetzt. Im Gegensatz zum Zorn'schen Lemma betrachtet man hier aber nicht beliebige Ketten (das heißt vollständig geordnete Mengen), sondern nur solche, die aus abzählbar vielen Elementen bestehen.

Auch die Aussagen von Proposition 2.1 haben eine typische Struktur. Die erste Aussage (i) ist eine Dominanzaussage und die zweite Aussage (ii) ist eine Extremalitätsaussage. Genau die gleiche Struktur werden wir bei den Aussagen des Minimalpunkttheorems wiederfinden.

Weiterhin ist zu bemerken, dass das Prinzip von Brézis und Browder Aussagen über sehr allgemeine Mengen liefert. Im Gegensatz dazu stellt (A3) eine sehr starke Voraussetzung dar. Bei einem Minimalpunkttheorem ist der Schwerpunkt dahingehend verlagert, dass wir wesentlich speziellere Mengen zugrunde legen, dafür aber die Voraussetzung (A3) erheblich abschwächen können.

2.2 Eine Skalarisierungsmethode

Bei einigen Minimalpunkttheoremen, wie zum Beispiel bei denen von Göpfert, Tammer und Zălinescu in [14, Th.8] oder in [13] wird eine Skalarisierungsmethode als ein entscheidendes Beweismittel verwendet. Mit Hilfe eines Skalarisierungsfunktionals wird ein Problem in einem linearen Raum (zum Beispiel in einem linearen topologischen Raum) auf ein Problem in den reellen Zahlen reduziert.

Es sei Y ein linearer topologischer Raum und $K \subset Y$ ein konvexer spitzer Kegel. Wie schon im Abschnitt 1.4 dargelegt, ist durch K eine Halbordnung in Y gegeben. Um die gewünschte Monotonieeigenschaft des Skalarisierungsfunktionals, nämlich eine Art strenge Monotonie, zu erhalten, stellen wir wie in [13] die folgende Voraussetzung:

(M2) Es existiert ein konvexer eigentlicher Kegel $C \subset Y$, so dass gilt:

$$K \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} C.$$

Der Beweis des folgenden Lemmas ist im Wesentlichen aus [14] und [13] entnommen. Dort wurde allerdings ein lokalkonvexer Raum vorausgesetzt. Der Beweis im linearen topologischen Raum verläuft jedoch völlig analog. Ähnliche Aussagen für den Fall eines linearen topologischen Raumes findet man in allgemeinerer Form auch in [11].

Eine interessante (noch offene) Frage ist, ob in einem linearen topologischen Raum, der nicht lokalkonvex ist, überhaupt die Existenz eines eigentlichen konvexen

Kegels C mit nichtleerem Inneren, möglich ist. Das Beispiel der L^p-Räume mit $p \in (0,1)$ zeigt, dass die Existenz im Allgemeinen nicht gegeben ist, denn wie in Beispiel 1.1 im Abschnitt 1.2 bemerkt wird, ist die einzige konvexe Menge mit nichtleerem Inneren in diesem Raum der gesamte Raum selbst. Das heißt, in L^p mit $p \in (0,1)$ kann die Bedingung (M2) für einen nichttrivialen Kegel K nie erfüllt sein.

Lemma 2.2 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) gilt und $k^0 \in K \setminus \{0\}$. Für das Funktional $z : Y \to \mathbb{R}$, definiert durch $z(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - \operatorname{cl} C\}$, wobei C der Kegel aus (M2) ist, gilt:*

(i) z ist sublinear,

(ii) $y_1 \leq_K y_2$, $y_1 \neq y_2 \;\Rightarrow\; z(y_1) < z(y_2)$,

(iii) $\forall y \in Y,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}:\ z(y + \alpha k^0) = z(y) + \alpha$,

(iv) Ist für $Y_0 \subset Y$ und ein $\tilde{y} \in Y$ die Bedingung $Y_0 \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset$ erfüllt, so ist z auf Y_0 von unten beschränkt.

Beweis: (im Wesentlichen aus [14, Lemma 7] und [13, Beweis von Theorem 1]). Für $y \in Y$ sei $\Gamma_y := \{t \in \mathbb{R} \mid y \in tk^0 - \operatorname{cl} C\}$. Wir zeigen, dass $\Gamma_y \neq \emptyset$. Es ist $k^0 \in \operatorname{int} C$. Das heißt, 0 ist innerer Punkt von $-k^0 + \operatorname{int} C$. Sei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis von Y. Dann gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$, so dass $U \subset -k^0 + \operatorname{int} C$. Der Punkt y ist natürlich beschränkt, das heisst, es gibt ein $\sigma > 0$, so dass

$$y \in \sigma U \subset \sigma\left(-k^0 + \operatorname{int} C\right) \subset \sigma(-k^0) + \operatorname{int} C.$$

Weil U kreisförmig ist, folgt $y \in \sigma k^0 - \operatorname{int} C \subset \sigma k^0 - \operatorname{cl} C$, das heißt, $\sigma \in \Gamma_y$.

Es existiert also ein $t_y \in \mathbb{R}$, so dass Γ_y ein Intervall der Form $\Gamma_y = [t_y, \infty)$ ist, denn sei $t \in \Gamma_y$ und $t' > t$, so gilt

$$y \in tk^0 - \operatorname{cl} C = t'k^0 - [(t'-t)k^0 + \operatorname{cl} C] \subset t'k^0 - \operatorname{cl} C,$$

das heißt, $t' \in \Gamma_y$ und wäre andererseits Γ_y nicht nach unten beschränkt, so folgte mit

$$(\forall n \in \mathbb{N}:\ -n \in \Gamma_y) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}:\ -k^0 - \frac{y}{n} \in \operatorname{cl} C\right) \Rightarrow\ -k^0 \in \operatorname{cl} C$$

ein Widerspruch. Außerdem gilt für $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_y$ mit $t_n \to \inf \Gamma_y =: t_y$

$$t_n k^0 - y \in \operatorname{cl} C \;\Rightarrow\; t_y k^0 - y \in \operatorname{cl} C,$$

das heißt, es ist letztlich noch $t_y \in \Gamma_y$. Es folgt

$$z(y) \leq t \;\Leftrightarrow\; t \in \Gamma_y \;\Leftrightarrow\; y \in tk^0 - \operatorname{cl} C. \tag{2.1}$$

Mit dem linearen und stetigen Operator $T : Y \times \mathbb{R} \to Y$, $T(y,t) := tk^0 - y$ lässt sich der Epigraph von z wegen (2.1) gerade schreiben als $\operatorname{epi}(z) = T^{-1}(K)$. Es folgt, dass $\operatorname{epi}(z)$ ein abgeschlossener konvexer Kegel und damit z ein eigentliches unterhalbstetiges und konvexes Funktional ist. Insbesondere erhalten wir daraus die Aussage (i).

Sei nun $y_1 \leq_K y_2$, $y_1 \neq y_2$. Dann gilt
$$y_2 \in z(y_2)k^0 - \operatorname{cl} C.$$
Mit (M2) folgt
$$y_1 \in y_2 - K \setminus \{0\} \subset y_2 - \operatorname{int} C$$
und weil natürlich $\operatorname{cl} C + \operatorname{int} C \subset \operatorname{int} C$ ist, gilt
$$y_1 \in z(y_2)k^0 - (\operatorname{cl} C + \operatorname{int} C) \subset z(y_2)k^0 - \operatorname{int} C.$$
Folglich existiert ein $\delta > 0$, so dass
$$y_1 \in (z(y_2) - \delta)k^0 - \operatorname{int} C \subset (z(y_2) - \delta)k^0 - \operatorname{cl} C,$$
also ist $z(y_1) \leq z(y_2) - \delta$ und somit $z(y_1) < z(y_2)$, das heißt, die Aussage (ii) ist bewiesen.

Um (iii) zu zeigen, sei bemerkt, dass
$$t \in \Gamma_{y+\alpha k^0} \;\Leftrightarrow\; y + \alpha k^0 \in tk^0 - \operatorname{cl} C \;\Leftrightarrow\; y \in (t-\alpha)k^0 - \operatorname{cl} C \;\Leftrightarrow\; t - \alpha \in \Gamma_y$$
und somit $\Gamma_{y+\alpha k^0} = \alpha + \Gamma_y$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Sei $y \in Y_0$ beliebig gegeben. Angenommen, es gilt $z(y - \tilde{y}) < 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $y - \tilde{y} \in -\delta k^0 - \operatorname{cl} C$. Daraus folgt mit
$$y \in \tilde{y} - (\delta k^0 + \operatorname{cl} C) \subset \tilde{y} - (\operatorname{int} C + \operatorname{cl} C) \subset \tilde{y} - \operatorname{int} C$$
ein Widerspruch zu $Y_0 \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset$. Also ist $z(y - \tilde{y}) \geq 0$. Wegen (i) ist $0 \leq z(y - \tilde{y}) \leq z(y) + z(-\tilde{y})$ und somit $-z(-\tilde{y}) \leq z(y)$ für alle $y \in Y_0$, und die Aussage (iv) ist damit bewiesen. ■

Bemerkung: Die Voraussetzung (M2) wurde im Beweis von Lemma 2.2 nur für die Aussagen (ii) und (iv) benötigt. Für (iv) wäre auch eine schwächere Voraussetzung (vgl. [11, Th.2.2]) möglich.

2.3 Eine Ordnungsrelation im Produktraum

Bei den Untersuchungen in den folgenden Abschnitten wird das Minimalpunkttheorem von Göpfert, Tammer und Zălinescu aus [13] einen wesentlichen Ausgangspunkt darstellen. Es handelt sich dabei um Aussagen über die Existenz minimaler Punkte einer gewissen Teilmenge eines Produktraumes $X \times Y$, wobei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und Y ein separierter lokalkonvexer Raum ist. Durch einen konvexen spitzen Kegel $K \subset Y$ ist dann eine Halbordnung in Y gegeben. Unter Verwendung eines Elementes $k^0 \in K \setminus \{0\}$ erhält man die folgende Halbordnung im Produktraum $X \times Y$:
$$(x_1, y_1) \preceq_{k^0} (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; y_1 + k^0 d(x_1, x_2) \leq_K y_2.$$
Wir wollen nun den metrischen Raum (X, d) durch einen separierten uniformen Raum $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$ ersetzen, und zeigen, dass dann auf analoge Weise eine Halbordnung in $X \times Y$ definiert ist. Im Gegensatz zum Raum X spielen die topologischen Eigenschaften des Raumes Y hier keine Rolle. Es genügt also für Y einen linearen Raum vorauszusetzen.

Lemma 2.3 *Es seien* $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ *ein separierter uniformer Raum,* Y *ein linearer Raum und* $K \subset Y$ *ein konvexer spitzer Kegel. Dann ist mit einem Element* $k^0 \in K \setminus \{0\}$ *durch*

$$(x_1, y_1) \preceq_{k^0} (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow \forall\lambda \in \Lambda : \; y_1 + k^0 q_\lambda(x_1, x_2) \leq_K y_2 \tag{2.2}$$

eine Halbordnung im Produktraum $X \times Y$ *gegeben, das heißt, die Relation* $\preceq_{k^0}$ *ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.*

Beweis: Wir setzen $W := X \times Y$ und $w_i := (x_i, y_i)$ mit $x_i \in X$ und $y_i \in Y$, $i = 1, 2, 3$. Die Reflexivität folgt aus (Q1) [Def.1.8].

Seien $w_1, w_2, w_3 \in W$ mit $w_1 \preceq_{k^0} w_2$ und $w_2 \preceq_{k^0} w_3$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} y_1 + k^0 q_\alpha(x_1, x_2) \leq_K y_2 & \text{und} \\ y_2 + k^0 q_\alpha(x_2, x_3) \leq_K y_3 & \end{array}$$

für alle $\alpha \in \Lambda$ und wegen (1.8) [S.24] und der Transitivität der Relation $\leq_K$ folgt

$$y_1 + k^0 \left(q_\alpha\left(x_1, x_2\right) + q_\alpha\left(x_2, x_3\right)\right) \leq_K y_3 \tag{2.3}$$

für alle $\alpha \in \Lambda$. Nach (Q3) [Def.1.8] gibt es zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $\mu \in \Lambda$ mit $\lambda \prec \mu$, so dass $q_\lambda(x_1, x_3) \leq q_\mu(x_1, x_2) + q_\mu(x_2, x_3)$. Weil für alle diese $\mu \in \Lambda$ die Beziehung (2.3) gilt, folgt

$$y_1 + k^0 q_\lambda(x_1, x_3) \leq_K y_3$$

für alle $\lambda \in \Lambda$, das heißt, $w_1 \preceq_{k^0} w_3$.

Seien nun $w_1, w_2 \in X$ mit $w_1 \preceq_{k^0} w_2$ und $w_2 \preceq_{k^0} w_1$. Wegen der Antisymmetrie der Relation $\leq_K$ folgt $y_1 = y_2$ und daraus folgt wiederum, dass $k^0 q_\lambda(x_1, x_2) \in -K$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Somit ist $q_\lambda(x_1, x_2) = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und mit (Q5) [Def.1.8] folgt $x_1 = x_2$, das heißt, es ist $w_1 = w_2$. ■

2.4 Eine vektorwertige Variante des Prinzips von Brézis und Browder

Mit Hilfe des Skalarisierungsfunktionals $z : Y \to \mathbb{R}$ aus Lemma 2.2 kann nun auf einfache Weise eine vektorwertige Variante des Prinzips von Brézis und Browder angegeben werden. Man beachte, dass diese sich nur bezüglich der ersten beiden Voraussetzungen von Proposition 2.1 unterscheidet. Die typische Struktur bleibt jedoch erhalten, das heißt, in der folgenden Proposition 2.4 ist (A1) wieder eine Beschränktheitsvoraussetzung für eine nun vektorwertige Funktion Φ und mit (A2) wird wieder eine Art strenge Monotonie für diese Funktion vorausgesetzt. Auch stellt diese Variante keine Verallgemeinerung des Prinzips dar, sondern ist lediglich eine äquivalente Aussage, die nach dem Kriterium, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem Prinzip von Brézis und Browder und dem nachfolgenden Minimalpunkttheorem hervorzuheben, formuliert wurde.

Proposition 2.4 *Es seien* Y *ein linearer topologischer Raum,* $K \subset Y$ *ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) [S.31] gilt,* $(W, \preceq)$ *eine quasigeordnete Menge (das heißt reflexiv und transitiv) und* $\Phi : W \to Y$ *eine Funktion, so dass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:*

(A1) Es existiert ein $\tilde{y} \in Y$, so dass $\Phi(W) \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset$, wobei C der Kegel aus (M2) ist.

(A2) Aus $w_1 \preceq w_2$, $w_1 \neq w_2$ folgt $\Phi(w_1) \leq_{K\setminus\{0\}} \Phi(w_2)$.

(A3) Für jede $\preceq$-fallende Folge $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ existiert ein $w \in W$, so dass $w \preceq w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es zu jedem $w_0 \in W$ ein $\bar{w} \in W$, so dass gilt:

(i) $\bar{w} \preceq w_0$,

(ii) $\bar{w}$ ist minimal in W.

Beweis: Wir setzen $\phi : W \to \mathbb{R}$, $\phi := z \circ \Phi$, wobei z das Skalarisierungsfunktional aus Lemma 2.2 ist. Aus (A1) folgt mit Aussage (iv) von Lemma 2.2 die Voraussetzung (A1) von Proposition 2.1, und aus (A2) folgt mit Aussage (ii) von Lemma 2.2 die Voraussetzung (A2) von Proposition 2.1. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Proposition 2.1. ■

Wir haben also die vektorwertige Variante mit Hilfe der Skalarisierungsmethode aus dem gewöhnlichen Prinzip von Brézis und Browder hergeleitet. Umgekehrt folgt aus der vektorwertigen Variante, indem wir speziell $Y = \mathbb{R}$ setzen, natürlich wieder die gewöhnliche, reellwertige Variante. Die Bemerkung zur Antisymmetrie im Anschluss an den Beweis von Proposition 2.1 gilt hier entsprechend.

2.5 Ein Minimalpunkttheorem

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels, einem Minimalpunkttheorem im Produktraum $X \times Y$, wobei X ein separierter folgenvollständiger (vgl. S.15) uniformer Raum und Y ein separierter linearer topologischer Raum ist. Wie schon im Abschnitt 2.3 erwähnt, stellt den Ausgangspunkt der Untersuchungen ein Minimalpunkttheorem von Göpfert, Tammer und Zălinescu [13] dar, in dem X ein vollständiger metrischer Raum ist. Es ist bekannt, dass ein metrischer Raum stets separiert ist, und dass im metrischen Raum nicht zwischen Vollständigkeit und Folgenvollständigkeit unterschieden werden muss.

Was die Verallgemeinerung des Raumes Y betrifft, der in [13] ein separierter lokalkonvexer Raum ist, haben wir bereits in Abschnitt 2.2 bemerkt, dass für lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind, möglicherweise die Voraussetzung (M2) [S.31] nicht erfüllbar sein könnte.

Die für das Minimalpunkttheorem relevante Ordnungsrelation wurde bereits im Abschnitt 2.3 eingeführt. Wir werden das Minimalpunkttheorems mit dem Prinzip von Brézis und Browder und der Skalarisierungsmethode aus Lemma 2.2 beweisen. Im Beweis des Minimalpunkttheorems von Göpfert, Tammer und Zălinescu in [13] wird auch die Beweistechnik des Prinzips von Brézis und Browder, nämlich die induktive Konstruktion einer Folge, verwendet. Das heißt, es wird auch dort nicht das Zorn'sche Lemma benutzt.

Wir setzen im Folgenden $W := X \times Y$. Für ein Element $w \in W$ bezeichnen wir mit w_X die X-Komponente und mit w_Y die Y-Komponente von w, das heißt, es ist $w = (w_X, w_Y) = (P_X w, P_Y w)$, wobei $P_X : W \to X$ und $P_Y : W \to Y$ die entsprechenden Projektionsoperatoren sind.

Minimalpunkttheorem 2.5 *Es seien $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger uniformer Raum, Y ein separierter linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) [S.31] erfüllt ist, und $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Für eine Teilmenge $A \subset W$ seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(M1) Es existiert ein $\tilde{y} \in Y$, so dass $P_Y A \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset$ ist, wobei C der Kegel aus (M2) ist.

(M3) Für jede $\preceq_{k^0}$-fallende Folge $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $P_X w_n \to x \in X$ existiert ein $w \in A$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $w \preceq_{k^0} w_n$ ist.

Dann gibt es zu jedem $w_0 \in A$ ein $\bar{w} \in A$, so dass gilt:

(i) $\bar{w} \preceq_{k^0} w_0$,

(ii) $\bar{w}$ ist $\preceq_{k^0}$-minimal in A (vgl. S.7).

Beweis: $(A, \preceq_{k^0})$ ist nach Lemma 2.3 eine halbgeordnete Menge. Wir setzen

$$\Phi : A \to Y, \;\; \Phi(w) = P_Y w$$

und zeigen, dass Proposition 2.4 anwendbar ist. (A1) aus Proposition 2.4 ist wegen (M1) erfüllt.

Sei $w_1 \preceq_{k^0} w_2$ und $w_1 \neq w_2$. Falls $P_X w_1 \neq P_X w_2$, so gibt es wegen (Q5) [Def.1.8] ein $\mu \in \Lambda$, so dass $q_\mu(P_X w_1, P_X w_2) > 0$ und somit gilt

$$P_Y w_2 - P_Y w_1 \in \left\{q_\mu(P_X w_1, P_X w_2)k^0\right\} + K \subset (K \setminus \{0\}) + K \subset K \setminus \{0\}.$$

Im Falle $P_X w_1 = P_X w_2$ ist $P_Y w_1 \neq P_Y w_2$ und deshalb gilt ebenfalls $P_Y w_2 - P_Y w_1 \in K \setminus \{0\}$. Es ist also $\Phi(w_1) \leq_{K\setminus\{0\}} \Phi(w_2)$, das heißt, (A2) aus Proposition 2.4 ist erfüllt.

Wir zeigen nun, dass für eine beliebige $\preceq_{k^0}$-fallende Folge $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ stets

$$P_X w_n \to x \in X \tag{2.4}$$

gilt. Seien $\varepsilon > 0$ und $\lambda \in \Lambda$ beliebig vorgegeben. Aufgrund der Monotonie der Folge $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ die Ungleichung

$$P_Y w_m + k^0 q_\lambda(P_X w_m, P_X w_n) \leq_K P_Y w_n$$

erfüllt. Daraus folgt mit Lemma 2.2

$$z(P_Y w_m) + q_\lambda(P_X w_m, P_X w_n) \overset{(iii)}{=} z(P_Y w_m + k^0\, q_\lambda(P_X w_m, P_X w_n)) \overset{(ii)}{\leq} z(P_Y w_n).$$

Die Folge $\{z(P_Y w_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist wegen Lemma 2.2 (ii) monoton fallend und wegen Lemma 2.2 (iv) beschränkt, somit also konvergent. Das heißt, es existiert ein $N_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N_0(\varepsilon, \lambda)$ gilt

$$q_\lambda(P_X w_m, P_X w_n) \leq z(P_Y w_n) - z(P_Y w_m) < \varepsilon.$$

Die Folge $\{P_X w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge, und wegen der vorausgesetzten Folgenvollständigkeit von X ist $\{P_X w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in X, das heißt, (2.4) gilt. Somit ist wegen (M3) auch die Voraussetzung (A3) von Proposition 2.4 erfüllt, und Proposition 2.4 liefert die Behauptung. ■

Wir wollen noch einige Bemerkungen zur Struktur der Voraussetzungen und Aussagen machen. Die erste Voraussetzung ist wie beim Prinzip von Brézis und Browder eine Beschränktheitsvoraussetzung. Da man hier aber für die Funktion Φ speziell den Projektionsoperator P_Y gewählt hat, handelt es sich um eine Beschränktheitsvoraussetzung an die Menge $P_Y A \subset Y$. Eine Monotonievoraussetzung taucht hier nicht auf, da sich die strenge Monotonie in der vektorwertigen Fassung des Prinzips von Brézis und Browder aufgrund der speziellen Wahl $\Phi = P_Y$ von selbst ergibt. Man beachte, dass die Monotonieeigenschaft (ii) des Skalarisierungsfunktionals z aus Lemma 2.2 bereits im Beweis der vektorwertigen Fassung des Prinzips von Brézis und Browder verwendet wurde.

Die Voraussetzung (M3) wurde in Bezug auf die dritte Voraussetzung des Prinzips von Brézis und Browder deutlich abgeschwächt. Die Existenzforderung bezieht sich nicht mehr auf alle $\preceq_{k^0}$-fallenden Folgen, sondern nur noch auf solche, die eine bestimmte topologische Eigenschaft, nämlich die Konvergenz der X-Komponente in X, haben. Diese Abschwächung ist möglich, da wir andererseits durch die Wahl spezieller Mengen bzw. Räume mehr Struktur voraussetzen als in dem sehr allgemeinen Prinzip von Brézis und Browder. Die Relation ist nun nicht mehr eine beliebige Quasiordnung auf einer Menge, sondern sie ist an die topologische Struktur des Raumes X und an die lineare Struktur des Raumes Y gebunden.

Die Aussagen bestehen in völliger Analogie zum Prinzip von Brézis und Browder wieder aus einer Dominanz- und einer Extremalitätsaussage.

Es sei noch bemerkt, dass die Voraussetzung (M3) schwächer als die entsprechende Voraussetzung (H1) in [13] ist. Dort wird zusätzlich $P_X w = x$ gefordert.

Wir wollen nun hinreichende Bedingungen für das Erfülltsein der Voraussetzung (M3) des Minimalpunkttheorems angeben. Dazu betrachten wir die folgenden Voraussetzungen:

(M4) Für jede Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, für die $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in X$ konvergiert und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\leq_K$-fallend ist, existiert ein $y \in Y$, so dass $(x, y) \in A$ und $y \leq_K y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

(M5) Für alle $y \in K$ sind die Mengen $K \cap (y - \mathbb{R}_+ k^0)$ folgenabgeschlossen.

(M6) Für die Familie $\{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Quasimetriken, die die Topologie von X erzeugt und zur Definition der Ordnungsrelation $\preceq_{k^0}$ verwendet wird, sind die Elemente q_λ folgenstetig (vgl. S.15) in der zweiten Variablen, das heißt, aus $x_n \to x \in X$ für $n \to \infty$ folgt:

$$\forall u \in X,\, \forall \lambda \in \Lambda : \; q_\lambda(u, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} q_\lambda(u, x).$$

Die Voraussetzung (M4) entspricht der Voraussetzung (H2) in [13] und die Voraussetzung (M5) wurde ebenfalls aus [13] übernommen. In [13] sind (M4) und (M5) bereits hinreichend für das Erfülltsein der (M3) entsprechenden Voraussetzung .

Das ist hier nicht der Fall. Wir benötigen außerdem noch die Voraussetzung (M6). Diese (Folgen-) Stetigkeitsaussage ist im Falle eines metrischen Raumes automatisch erfüllt. Wird unser uniformer Raum durch eine Familie von Quasimetriken erzeugt, so müssen diese nicht stetig sein. Wir haben allerdings in Abschnitt 1.1 gezeigt, dass die Topologie eines uniformen Raumes immer auch durch Familien von Pseudometriken erzeugt werden kann. Diese sind (sogar gleichmäßig) stetig (vgl. [21, S.188, Th.15]). Das bedeutet, dass (M6) keine Einschränkung bezüglich der Wahl des Raumes X darstellt. Es scheint jedoch, dass (M6) die Wahl möglicher Ordnungsrelationen einschränkt.

Satz 2.6 *Wenn die Bedingungen (M4), (M5) und (M6) gelten, so ist die Voraussetzung (M3) im Minimalpunkttheorem 2.5 erfüllt.*

Beweis: Sei $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset A$ eine $\preceq_{k^0}$-fallende Folge in A mit $P_X w_n \to x \in X$. Wir setzen $x_n := P_X w_n$ und $y_n := P_Y w_n$. Dann ist die Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich $\leq_K$-fallend. Nach Voraussetzung (M4) existiert ein $y \in Y$, so dass $(x, y) \in A$ und $y \leq_K y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es folgt:

$$\forall \lambda \in \Lambda\ \forall n, p \in \mathbb{N} :\ y + k^0\, q_\lambda(x_n, x_{n+p}) \leq_K y_{n+p} + k^0\, q_\lambda(x_n, x_{n+p}) \leq_K y_n.$$

Mit (M6) und (M5) folgt für $w := (x, y)$, dass $w \preceq_{k^0} w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, das heißt, (M3) ist erfüllt. ■

Im Folgenden werden noch einige Aussagen bewiesen, die nützlich sind, um weitere hinreichende Bedingungen zum Minimalpunkttheorem anzugeben. In Abbildung 2.1 sind die entsprechenden Zusammenhänge in einer Übersicht dargestellt.

Satz 2.7 *Es seien X ein separierter uniformer Raum, Y ein separierter linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein folgenabgeschlossener konvexer spitzer Kegel und $A \subset X \times Y$ eine folgenabgeschlossene Menge. Wenn jede $\leq_K$-fallende Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $A_Y^0 := P_Y A \cap (y_0 - K)$ konvergent ist, so ist (M4) erfüllt.*

Beweis: Es sei eine Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset A$ gegeben, so dass $x_n \to x \in X$ konvergiert und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $\leq_K$-fallende Folge ist. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $y \in Y$. Wegen der vorausgesetzten Folgenabgeschlossenheit von A ist $(x, y) \in A$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Die Mengen $A_Y^n := P_Y A \cap (y_n - K)$ sind folgenabgeschlossen. Das bedeutet, dass $y \in A_Y^n$ ist, und somit gilt $y \leq_K y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Die grundlegende Beweisidee des folgenden wichtigen Lemmas stammt aus [18, S.15, Th.2.19]. Wir legen jedoch allgemeinere Räume und allgemeinere Kegel zugrunde. Wir betrachten eine konvexe beschränkte Menge B und den durch B erzeugten Kegel K, das heißt, $K := \mathbb{R}_+ B$. In [18] wird zusätzlich gefordert, dass B eine Basis des Kegels K ist. Das bedeutet, dass jedes Element des Kegels auf eindeutige Weise als positives Vielfaches eines Elementes aus B dargestellt werden kann. Außerdem setzen wir statt $0 \notin \operatorname{cl} B$ die Bedingung (2.5) voraus. In Lemma 2.9 werden wir zeigen, dass diese Voraussetzung der Bedingung $0 \notin \operatorname{cl_s} B$ entspricht und somit schwächer ist.

Lemma 2.8 *Es seien* $\left(Y, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ *ein linearer topologischer Raum und* $B \subset Y$ *eine nichtleere beschränkte konvexe Menge, so dass gilt*

$$\forall \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B : \exists\delta > 0,\ \exists\mu \in \Lambda : \forall n \in \mathbb{N} : \|b_n\|_\mu \geq \delta. \tag{2.5}$$

K sei der durch B erzeugte Kegel, das heißt, $K := \mathbb{R}_+ B$. Außerdem sei $M \subset Y$ eine Menge, so dass $M^0 := M \cap (y_0 - K)$ für ein $y_0 \in M$ topologisch beschränkt ist. Dann ist jede $\leq_K$-fallende Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M^0$ eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis von Y. Wir geben ein $U \in \mathfrak{U}$ beliebig vor. Da B beschränkt ist, gibt es ein $\sigma > 0$, so dass $B \subset \sigma U$. Die Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M^0$ ist nach Voraussetzung beschränkt. Wir setzen $v_n := y_0 - y_n$. Dann ist $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Weil $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\leq_K$-fallende Folge ist, gilt $v_{n+1} - v_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sogar $v_{n+1} - v_n \in K \setminus \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Wir finden also eine Darstellung $v_{n+1} - v_n = \tau_n \beta_n$ mit $\tau_n > 0$ und $\beta_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir verwenden nun die so definierten Folgen $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ zur Definition weiterer Folgen.

Es seien $t_1 > 0$ und $b_1 \in B$ gegeben, so dass $v_1 = t_1 b_1$ ist. Man kann nun induktiv mit

$$t_{n+1} := t_n + \tau_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \left(\frac{t_n}{t_n + \tau_n} b_n + \frac{\tau_n}{t_n + \tau_n} \beta_n\right).$$

Folgen $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ definieren. Durch vollständige Induktion erhält man die Beziehung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n = t_n b_n. \tag{2.6}$$

Wir setzen:

$$\tau_{m,n} := t_m - t_n \quad \text{und} \quad \beta_{m,n} := \frac{v_m - v_n}{\tau_{m,n}}. \tag{2.7}$$

Wir zeigen nun durch Induktion, dass $\beta_{m,n} \in B$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gegeben. Für $m = n + 1$ ist die Behauptung, wie oben gezeigt wurde, erfüllt. Für $m > n$ sei nun $\beta_{m,n} \in B$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\beta_{m+1,n} &= \frac{v_{m+1} - v_n}{\tau_{m+1,n}} \\
&= \frac{v_{m+1} - v_m + v_m - v_n}{\tau_{m+1,m} + \tau_{m,n}} \\
&= \frac{\tau_{m+1,m}}{\tau_{m+1,m} + \tau_{m,n}} \frac{v_{m+1} - v_m}{\tau_{m+1,m}} + \frac{\tau_{m,n}}{\tau_{m+1,m} + \tau_{m,n}} \frac{v_m - v_n}{\tau_{m,n}} \\
&= \frac{\tau_{m+1,m}}{\tau_{m+1,m} + \tau_{m,n}} \beta_m + \frac{\tau_{m,n}}{\tau_{m+1,m} + \tau_{m,n}} \beta_{m,n} \quad \in \quad B.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m > n : \ \beta_{m,n} \in B. \tag{2.8}$$

Nach Korollar 1.8 ist $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, das heißt nach Satz 1.7, dass insbesondere eine Konstante $c_\mu \geq 0$ existiert, so dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \|v_n\|_\mu \leq c_\mu,$$

wobei $\mu \in \Lambda$ durch (2.5) bestimmt ist. Es gilt somit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; t_n \overset{(2.6)}{=} \frac{\|v_n\|_\mu}{\|b_n\|_\mu} \leq \frac{c_\mu}{\delta},$$

das heißt, die Folge $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Wir setzen

$$s := \sup\{t_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \tag{2.9}$$

und betrachten ein $n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$ (man beachte $\sigma = \sigma(U)$) mit

$$t_{n_0} \geq s - 1/\sigma.$$

Da die Folge $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ nach Definition monoton wachsend ist, folgt daraus für $n \geq n_0$ die Beziehung

$$t_n \geq s - 1/\sigma. \tag{2.10}$$

Für $m > n \geq n_0$ gilt:

$$\begin{array}{rcccl} y_n - y_m & = & v_m - v_n & \overset{(2.7)}{=} & \tau_{m,n}\beta_{m,n} \\ & \overset{(2.7)}{=} & (t_m - t_n)\beta_{m,n} & \overset{(2.9)}{\leq} & (s - t_n)\,\beta_{m,n} \\ & \overset{(2.10)}{\leq} & \left(s - \left(s - \frac{1}{\sigma}\right)\right)\beta_{m,n} & = & \frac{1}{\sigma}\beta_{m,n} \overset{(2.8)}{\in} \frac{1}{\sigma}B \subset U. \end{array}$$

Das heißt, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. ■

Wir geben nun eine zur Separationsbedingung (2.5) in Lemma 2.8 äquivalente Aussage an. Mit $\mathrm{cl_s}\, M$ bezeichnen wir im Folgenden den sequentiellen Abschluss einer Menge M, das heißt, den Abschluss bezüglich Folgen (vgl. S.15).

Lemma 2.9 *Es seien $\left(Y, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ ein separierter linearer topologischer Raum und $B \subset Y$ eine nichtleere beschränkte konvexe Menge. Die Separationsbedingung (2.5) ist genau dann erfüllt, wenn gilt:*

$$0 \notin \mathrm{cl_s}\, B.$$

Beweis: Angenommen, (2.5) gilt nicht, das heißt,

$$\exists\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B : \forall\ \delta > 0,\ \forall \lambda \in \Lambda : \exists n \in \mathbb{N} : \|b_n\|_\lambda < \delta.$$

Dann ist damit eine Teilfolge $\left\{b_{n(\lambda,\delta)}\right\}_{\delta>0,\lambda\in\Lambda}$ gegeben, die gegen Null konvergiert. Das heißt, $0 \in \mathrm{cl_s}\, B$ im Widerspruch zur Voraussetzung $0 \notin \mathrm{cl_s}\, B$. Es gilt also (2.5). Sei nun umgekehrt (2.5) erfüllt. Angenommen, es ist $0 \in \mathrm{cl_s}\, B$. Dann gibt es eine Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, die gegen 0 konvergiert. Das ist offensichtlich ein Widerspruch zu (2.5). Somit ist die Annahme falsch, das heißt, $0 \notin \mathrm{cl_s}\, B$. ■

In Abbildung 2.1 sind die eben bewiesenen Aussagen in einer Übersicht dargestellt. Wir beginnen dabei oben mit der stärksten hier betrachteten Voraussetzung. Nach unten werden die Voraussetzungen schwächer.

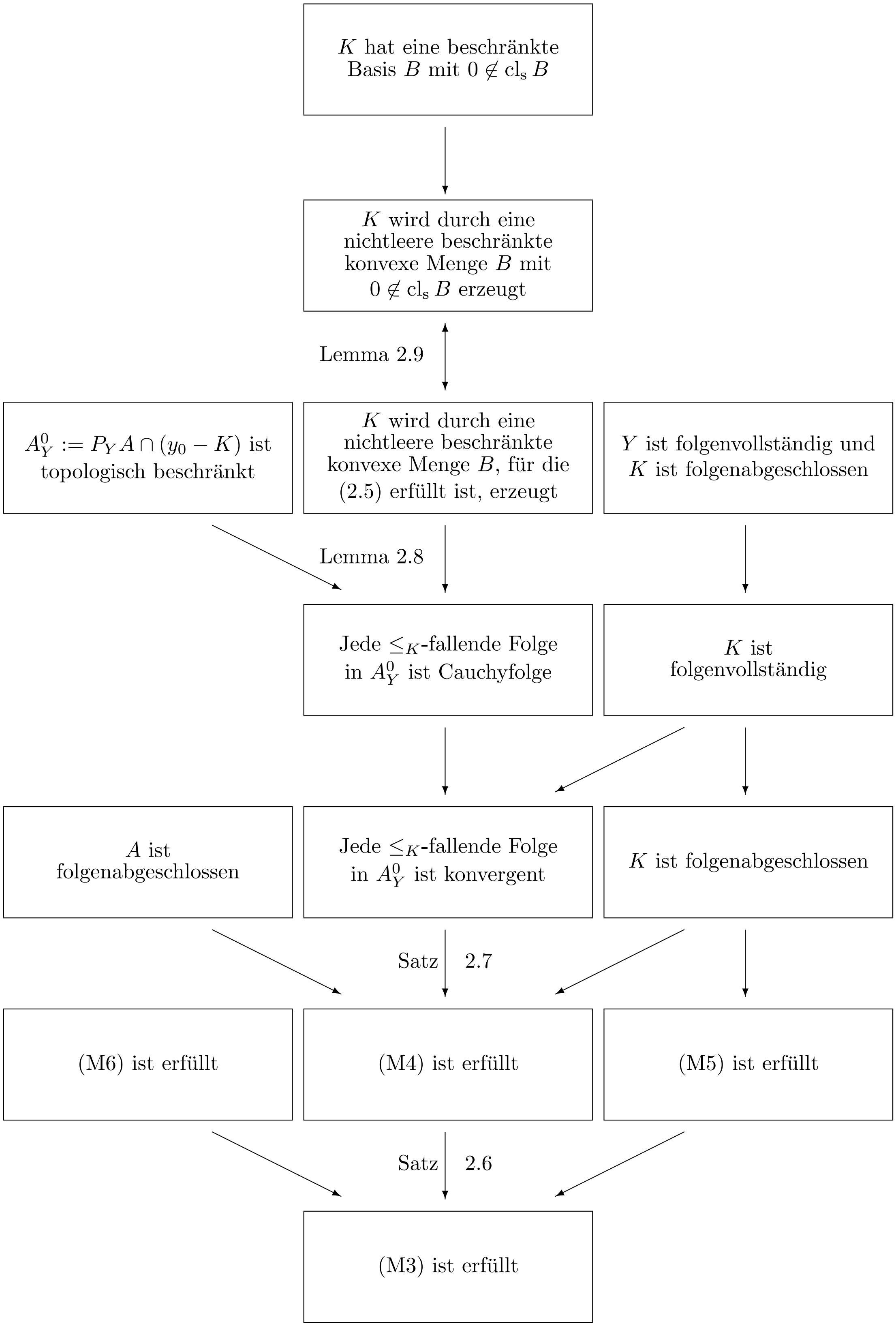

Abbildung 2.1: Übersicht hinreichender Voraussetzungen

Wir wollen schließlich noch hinreichende Bedingungen für das Erfülltsein der Beschränktheitsvoraussetzung (M1) angeben. In Abbildung 2.2 sind diese Bedingungen in einer Übersicht dargestellt. Wir beginnen mit einer Aussage über den Kegel C aus der Bedingung (M2).

Proposition 2.10 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum und $C \subset Y$ ein eigentlicher (d.h. $C \neq Y$) konvexer Kegel. Dann ist*

$$C^\circ := \{0\} \cup \operatorname{int} C$$

ein (konvexer) spitzer Kegel.

Beweis: Angenommen, es ist

$$\operatorname{int} C \cap (-\operatorname{int} C) \neq \emptyset.$$

Dann existiert ein $c_0 \in Y$, so dass gilt $c_0, -c_0 \in \operatorname{int} C$. Natürlich ist $\operatorname{int} C$ konvex. Daraus folgt $0 \in \operatorname{int} C$. Das bedeutet, es gibt ein Element $U \in \mathfrak{U}$ der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ des linearen topologischen Raumes Y, so dass $U \subset \operatorname{int} C$. Da U ausgeglichen ist, gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $\sigma > 0$, so dass $y \in \sigma U$. Da $\operatorname{int} C$ ein Kegel ist, folgt $\operatorname{int} C = Y$ und somit $C = Y$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass C eigentlicher Kegel ist. Es gilt also $\operatorname{int} C \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset$ und daraus folgt $C^\circ \cap (-C^\circ) = \{0\}$, das heißt, C° ist spitz. ∎

Korollar 2.11 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum und $C \subset Y$ ein eigentlicher (d.h. $C \neq Y$) konvexer Kegel. Wenn für eine Menge $A_Y \subset Y$ die Beziehung*

(M7) $\exists\, \tilde{y} \in Y : A_Y \subset \tilde{y} + C^\circ$

gilt, so ist für $A_Y = P_Y A$ die Voraussetzung (M1) im Minimalpunkttheorem 2.5 erfüllt.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Proposition 2.10. ∎

Proposition 2.12 *Es seien Y ein linearer topologischer Raum und $C \subset Y$ ein Kegel mit nichtleerem Inneren. Wenn die Menge $A_Y \subset Y$ topologisch beschränkt ist, so ist (M7) erfüllt.*

Beweis: Sei $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungsbasis von Y und sei y ein innerer Punkt von C. Dann gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$, so dass $y + U \subset \operatorname{int} C$ ist. Weil A_Y beschränkt ist, gibt es zu U ein $\sigma > 0$, so dass $A_Y \subset \sigma U \subset \sigma (\operatorname{int} C - y) \subset \operatorname{int} C - \sigma y$. Für $\tilde{y} := -\sigma y$ gilt somit $A_Y \subset \tilde{y} + \operatorname{int} C \subset \tilde{y} + C^\circ$. ∎

Bemerkung: Die topologische Beschränktheit der Menge A stellt eine sehr starke Voraussetzung dar, die schon bei einfachen Beispielen nicht erfüllt ist. Oft reicht es in diesen Fällen jedoch aus, das Minimalpunkttheorem auf eine geeignete topologisch beschränkte Teilmenge von A anzuwenden. Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang Mengen der Gestalt $A^0 := \{(x, y) \in A : (x, y) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)\}$, wobei der Punkt (x_0, y_0) beliebig vorgegeben ist.

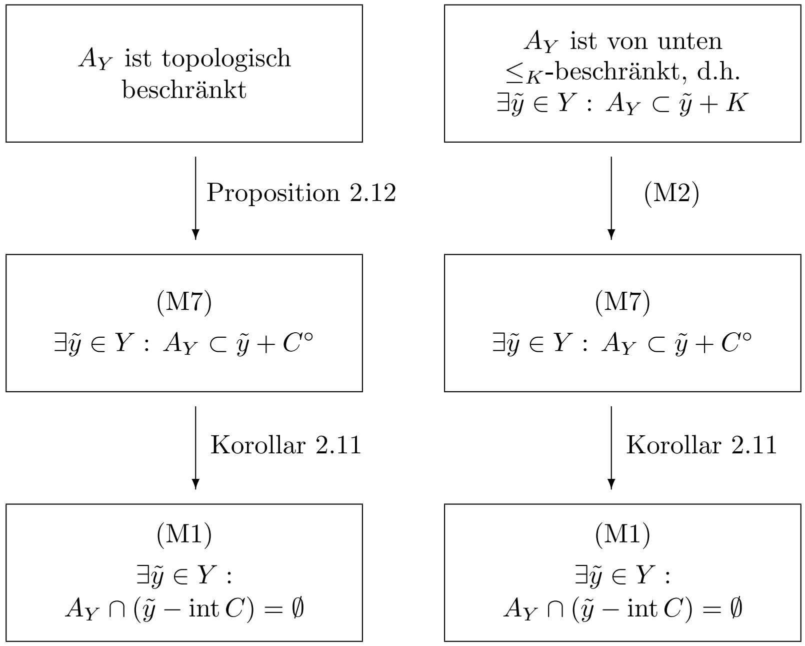

Abbildung 2.2: Übersicht hinreichender Beschränktheitsvoraussetzungen

2.6 Aussagen für mengenwertige Abbildungen

In diesem Abschnitt sollen zunächst drei Aussagen über mengenwertige Abbildungen aus dem Minimalpunkttheorem 2.5 abgeleitet werden. Anschließend werden wir zeigen, dass diese Aussagen sogar äquivalent zum Minimalpunkttheorem sind.

Das Ekeland'sche Variationsprinzip

In diesem Abschnitt werden wir eine Variante des Ekeland'schen Prinzips für mengenwertige Abbildungen angeben. Durch Chen, Huang und Hou [4] wurde ebenfalls eine solche Aussage für mengenwertige Abbildungen bewiesen. Diese Arbeit baut jedoch teilweise auf anderen Voraussetzungen auf und verwendet andere Beweismethoden (siehe Abschnitt 2.8). Außerdem ist der Beweis recht lang. Die hier vorgestellte Variante folgt jedoch relativ einfach aus dem Minimalpunkttheorem 2.5.

Es sei wieder $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger uniformer Raum und Y ein separierter linearer topologischer Raum. Mit F bezeichnen wir eine mengenwertige Abbildung $F : X \to 2^Y$. Die Menge $\operatorname{dom} F := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ heißt der *effektive Definitionsbereich* von F und $\operatorname{gr} F := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ ist der *Graph* von F.

Theorem 2.13 *Es seien $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger uniformer Raum, Y ein separierter linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) erfüllt ist, und $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Für die mengenwertige Abbildung $F : X \to 2^Y$ seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(A1) Es existiert ein $\tilde{y} \in Y$, so dass für alle $x \in X$ und für den Kegel C aus

Voraussetzung (M2) gilt:

$$F(x) \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset.$$

(A2) *Für jede $\preceq_{k^0}$-fallende Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset grF$ mit $x_n \to x \in X$ existiert ein Punkt $(x, y) \in \operatorname{gr} F$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $(x, y) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)$ ist.*

Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$ einen Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gr} F$, so dass $\bar{y}$ $\leq_K$-minimal in $F(\bar{x})$ ist und dass gilt:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda :\ y_0 - \bar{y} - k^0\, q_\lambda(\bar{x}, x_0) \in K,$

(ii) $\forall x \in \operatorname{dom} F \backslash \{\bar{x}\}\ \exists \mu \in \Lambda :\ (F(x) - \bar{y} + k^0 q_\mu(x, \bar{x})) \cap -K = \emptyset.$

Beweis: Wir wenden das Minimalpunkttheorem 2.5 auf die Menge $A := \operatorname{gr} F$ an. Man überzeugt sich leicht davon, dass die hier gestellten Voraussetzungen zu denen des Minimalpunkttheorems äquivalent sind. Dann gibt es also zu jedem $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$ ein $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gr} F$, so dass $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$ ist (das heißt gerade, dass (i) gilt), und $(\bar{x}, \bar{y})$ ist $\preceq_{k^0}$-minimal in $\operatorname{gr} F$.

Angenommen, (ii) gilt nicht, dass heißt,

$$\exists \hat{x} \in \operatorname{dom} F \backslash \{\bar{x}\}\ \forall \lambda \in \Lambda :\ \big(F(\hat{x}) - \bar{y} + k^0 q_\lambda(\hat{x}, \bar{x})\big) \cap -K \neq \emptyset.$$

Also gibt es ein $(\hat{x}, \hat{y}) \in \operatorname{gr} F$ mit $\hat{x} \neq \bar{x}$, so dass

$$\forall \lambda \in \Lambda :\ \hat{y} - \bar{y} + k^0 q_\lambda(\hat{x}, \bar{x}) \in -K.$$

Das bedeutet, dass $(\hat{x}, \hat{y}) \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})$ mit $\hat{x} \neq \bar{x}$ ist. Dies steht im Widerspruch zur $\preceq_{k^0}$-Minimalität von $(\bar{x}, \bar{y})$ in $\operatorname{gr} F$. Also gilt (ii).

Um zu zeigen, dass $\bar{y}$ $\leq_K$-minimal in $F(\bar{x})$ ist, sei $\hat{y} \leq_K \bar{y}$ für $\hat{y}, \bar{y} \in F(\bar{x})$. Es gilt somit $(\bar{x}, \hat{y}) \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})$ und wegen der $\preceq_{k^0}$-Minimalität von $(\bar{x}, \bar{y})$ folgt $\hat{y} = \bar{y}$, das heißt, $\bar{y}$ ist $\leq_K$-minimal in $F(\bar{x})$. ■

Im Spezialfall, dass F eine (vektorwertige) Funktion ist, ergibt sich sich eine Variante eines vektorwertigen Ekeland'schen Variationsprinzips, wie sie zum Beispiel in [14] bewiesen wurde. Natürlich kann man (A2) auch durch die in [14] gestellte Abgeschlossenheitsvoraussetzung ersetzen. Eine solche Variante geben wir im nächsten Abschnitt an. In der Variante des Ekeland'schen Variationsprinzips aus [14] sind auch Funktionen zugelassen, die in einen Vektorraum Y, der um ein Element ∞ erweitert wurde, abbilden. Für das Element ∞ gilt nach Definition $y \leq_K \infty$ für alle $y \in Y$. Auch hier können solche Funktionen zugelassen werden. Zu einer Funktion $f :\ X \to Y \cup \{\infty\}$ wählen wir die mengenwertige Abbildung

$$F :\ X \to 2^Y,\ F(x) := \begin{cases} \{f(x)\} & \text{für} \quad f(x) \neq \infty \\ \emptyset & \text{für} \quad f(x) = \infty\,. \end{cases}$$

In diesem Fall ist $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} f$, wobei der effektive Definitionsbereich einer vektorwertigen Abbildung wie in [14] durch $\operatorname{dom} f := \{x \in X :\ f(x) \neq \infty\}$ definiert wird.

Der Fixpunktsatz von Kirk-Caristi

Auf recht einfache Weise folgt aus dem Ekeland'schen Variationsprinzip für mengenwertige Abbildungen eine entsprechende Variante des Fixpunktsatzes von Kirk-Caristi [5]. Man betrachtet dabei einerseits eine Abbildung $F : X \to Y$, deren Eigenschaften denen der Abbildung F im Ekeland'schen Prinzip (hier: Theorem 2.13) entsprechen und andererseits eine Abbildung $T : X \to X$, für die die Existenz eines Fixpunktes nachgewiesen wird. Mittels F wird eine Voraussetzung in der Art einer Kontraktionsbedingung formuliert. Von Chr. Tammer [31] wurde eine vektorwertige Variante des Satzes bewiesen, dass heißt, F ist vektorwertig und T ist ein Operator. Isac gibt in [19] eine vektorwertige Variante in Gleichgewichtsformulierung an, wobei T eine mengenwertige Abbildung ist. Wir werden eine Version angeben, bei der F und T mengenwertige Abbildungen sind. Allerdings ist es nicht gelungen eine Gleichgewichtsformulierung aus dem Minimalpunkttheorem abzuleiten. Möglicherweise müsste man dazu ein allgemeineres Prinzip als das von Brézis und Browder zugrunde legen wie zum Beispiel das Prinzip von Altman [1]. Unter einem *Fixpunkt* einer mengenwertigen Abbildung $T : X \to 2^X$ versteht man in [19] einen Punkt $\bar{x}$, für den gilt $\bar{x} \in T\bar{x}$.

Von A. Hamel [15] wurde eine Variante dieses Fixpunktsatzes in topologischen Räumen vom Typ $\mathcal{F}$ bewiesen. Im Gegensatz zu [19] wird dort eine Aussage zur Existenz eines *stationären* Punktes gemacht. Ein Punkt $\bar{x} \in X$ heißt stationärer Punkt einer mengenwertigen Abbildung $T : X \to 2^X$, wenn $\{\bar{x}\} = T\bar{x}$ gilt. Natürlich ist ein stationärer Punkt auch ein Fixpunkt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Wir wollen nun unter unseren Voraussetzungen Aussagen zur Existenz von Fixpunkten und stationären Punkten machen. Man erkennt dabei recht gut, welche zusätzliche Voraussetzung für die Existenz eines stationären Punktes gemacht werden muss.

Es sei eine mengenwertige Abbildung $F : X \to 2^Y$ gegeben. Wir setzen

$$S(x_0, y_0) := \left\{(x, y) \in \operatorname{gr} F : \forall \lambda \in \Lambda : y_0 - y - k^0\, q_\lambda(x, x_0) \in K\right\}.$$

Theorem 2.14 *Es seien $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger uniformer Raum, Y ein separierter linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) erfüllt ist, und $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Für die mengenwertige Abbildung $F : X \to 2^Y$ seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(A1) Es existiert ein $\tilde{y} \in Y$, so dass für alle $x \in X$ und für den Kegel C aus Voraussetzung (M2) gilt:

$$F(x) \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset.$$

(A2) Für jede $\preceq_{k^0}$-fallende Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset grF$ mit $x_n \to x \in X$ existiert ein Punkt $(x, y) \in \operatorname{gr} F$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $(x, y) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)$ ist.

Wenn für eine mengenwertige Abbildung $T : X \to 2^X$ für alle $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ die Bedingung

$$\exists\, \hat{x} \in Tx : \forall \lambda \in \Lambda : \left(F(\hat{x}) - y + k^0\, q_\lambda(\hat{x}, x)\right) \cap -K \neq \emptyset \tag{2.11}$$

für ein $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$ *erfüllt ist, gibt es einen Punkt* $(\bar{x}, \bar{y}) \in S(x_0, y_0)$*, so dass* $\bar{x}$ *Fixpunkt von* T *ist, das heißt,*

$$\bar{x} \in T\bar{x}.$$

Gilt darüber hinaus für alle $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ *die Bedingung*

$$\forall\, \hat{x} \in Tx : \forall \lambda \in \Lambda : \left(F(\hat{x}) - y + k^0\, q_\lambda(\hat{x}, x) \right) \cap -K \neq \emptyset, \tag{2.12}$$

so gibt es einen Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gr} F$*, so dass* $\bar{x}$ *ein stationärer Punkt von* T *ist, das heißt,*

$$\{\bar{x}\} = T\bar{x}.$$

Beweis: Nach Theorem 2.13 existiert ein $(\bar{x}, \bar{y}) \in S(x_0, y_0)$, so dass gilt:

$$\forall x \in \operatorname{dom} F \setminus \{\bar{x}\} : \; \exists \mu \in \Lambda : \; \left(F(x) - \bar{y} + k^0 q_\mu(\bar{x}, x) \right) \cap -K = \emptyset.$$

Unter der Annahme, dass $\bar{x} \notin T\bar{x}$ ist, folgt damit:

$$\forall x \in T\bar{x}\; \exists \mu \in \Lambda : \; F(x) - \bar{y} + k^0 q_\mu(\bar{x}, x) \cap -K = \emptyset.$$

Dies steht im Widerspruch zu (2.11), das heißt $\bar{x}$ ist ein Fixpunkt von T.

Sei nun $x \in T\bar{x}$ mit $x \neq \bar{x}$. Dann steht (2.12) im Widerspruch zur oben genannten Aussage aus Theorem 2.13. Das heißt, wenn (2.12) gilt, ist $\bar{x}$ ein stationärer Punkt von T. ■

Das Minimalitätsprinzip von Takahashi

Beim klassischen Minimalitätsprinzip von Takahashi [29] handelt es sich um eine Aussage zur Existenz von Lösungen eines Optimierungsproblems bezüglich einer reellwertigen Funktion. Von A. Hamel [15] wurde eine Variante für Funktionen auf folgenvollständigen topologischen Räumen vom Typ $\mathcal{F}$ angegeben. Es wird auch gezeigt, dass diese Aussage äquivalent zum Ekeland'schen Prinzip in diesen Räumen ist. In [31] wurde eine Variante dieses Prinzips für vektorwertige Funktionen, die auf einem vollständigen metrischen Raum definiert sind, angegeben. Wir wollen nun eine Variante für mengenwertige Abbildungen auf uniformen Räumen beweisen, welche auf recht einfache Weise aus dem Minimalpunkttheorem 2.5 bzw. aus Theorem 2.14 folgt.

Es sei eine mengenwertige Abbildung $F : X \to 2^Y$ gegeben. Wir setzen

$$F(X) := \{y \in Y : \; \exists x \in X : \; y \in F(x)\}.$$

In [31] wird der Begriff der *Effizienzmenge* definiert. Als Grundmenge wird dort das Bild einer vektorwertigen Funktion verwendet. In Analogie dazu setzen wir für unsere mengenwertige Abbildung

$$\operatorname{Eff}(F(X), K) := \{y \in F(X) : \; F(X) \cap (y - (K \setminus \{0\})) = \emptyset\}.$$

Theorem 2.15 *Es seien* $\left(X, \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\right)$ *ein separierter folgenvollständiger uniformer Raum,* Y *ein separierter linearer topologischer Raum,* $K \subset Y$ *ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) erfüllt ist, und* $k_0 \in K \setminus \{0\}$*. Für die mengenwertige Abbildung* $F : X \to 2^Y$ *seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(A1) Es existiert ein $\tilde{y} \in Y$, so dass für alle $x \in X$ und für den Kegel C aus Voraussetzung (M2) gilt:

$$F(x) \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset.$$

(A2) Für jede $\preceq_{k^0}$-fallende Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset grF$ mit $x_n \to x \in X$ existiert ein Punkt $(x, y) \in \operatorname{gr} F$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $(x, y) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)$ ist.

Außerdem gelte für ein $(x_0, y_0) \in \operatorname{gr} F$ die folgende zusätzliche Voraussetzung:

(A3) Für jedes $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ mit $y \notin \operatorname{Eff}(F(X), K)$ gilt:

$$\exists \hat{x} \in \operatorname{dom} F\backslash\{x\} : \forall\lambda \in \Lambda : \big(F(\hat{x}) - y + k^0 q_\lambda(\hat{x}, x)\big) \cap -K \neq \emptyset.$$

Dann existiert ein $(\bar{x}, \bar{y}) \in S(x_0, y_0)$, so dass gilt:

$$\bar{y} \in \operatorname{Eff}(F(X), K).$$

Beweis: Angenommen, für alle $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ ist $y \notin \operatorname{Eff}(F(X), K)$. Dann gibt es wegen (A3) für jedes $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ ein $\hat{x} \in \operatorname{dom} F\backslash\{x\}$, so dass gilt:

$$\forall\lambda \in \Lambda : \big(F(\hat{x}) - y + k^0 q_\lambda(\hat{x}, x)\big) \cap -K \neq \emptyset. \tag{2.13}$$

Wir definieren eine mengenwertige Abbildung $T : X \to X$,

$$Tx := \{\hat{x} \in \operatorname{dom} F\backslash\{x\} : \exists y \in F(x) \text{ mit } (x, y) \in S(x_0, y_0), \text{ so dass (2.13) gilt}\},$$

die offensichtlich keinen Fixpunkt hat. Für diese Abbildung T sind die Voraussetzungen von Theorem 2.14 erfüllt. Es gibt also ein $(\bar{x}, \bar{y}) \in S(x_0, y_0)$, so dass $\bar{x}$ Fixpunkt von T ist. Das ist ein Widerspruch zur Definition von T. Also war unsere Annahme falsch, das heißt, es gibt ein $(\bar{x}, \bar{y}) \in S(x_0, y_0)$, so dass $\bar{y} \in \operatorname{Eff}(F(X), K)$ ist. ■

Bemerkung: Ein Element $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gr} F$ mit $\bar{y} \in \operatorname{Eff}(F(X), K)$ wird in der Theorie der mengenwertigen Optimierung als *"minimizer"* (engl.) bezeichnet (vgl. z. B. [20]).

Die Äquivalenz zum Minimalpunkttheorem

Wir wollen zeigen, dass es sich bei Theorem 2.5 (Minimalpunkttheorem), Theorem 2.13 (Ekeland'sches Prinzip für mengenwertige Abbildungen), Theorem 2.14 (Fixpunktsatz) und Theorem 2.15 (Minimalitätsprinzip) um äquivalente[2]mathematische Aussagen handelt. Wir haben Theorem 2.13 mit dem Minimalpunkttheorem 2.5, Theorem 2.14 mit Theorem 2.13 und Theorem 2.15 mit Theorem 2.14 bewiesen. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass das Minimalpunkttheorem 2.5 aus Theorem 2.15 abgeleitet werden kann.

[2] Allgemeine Anmerkung zu dieser durchaus gebräuchlichen Sprechweise: Setzt man die Gültigkeit der üblichen Axiome voraus, so erhält man unter Umständen sehr große Klassen von äquivalenten Theoremen. Man könnte zum Beispiel folgendes Theorem formulieren: *Aus den Voraussetzungen des Minimalpunkttheorems folgt* $1 = 1$. Dieses Theorem ist dann äquivalent zum Minimalpunkttheorem. (Zum Nachweis verwende man einfach den Beweis mittels Prinzip von Brézis und Browder und Skalarisierung.) Um solche Fälle auszuschließen, ist es wichtig, bei einem Äquivalenznachweis den Verzicht auf die Verwendung bestimmter Axiome oder Beweistechniken zu fordern. Das sollten sinnvollerweise solche Axiome oder Beweistechniken sein, die im Gegensatz dazu bei einem direkten Beweis benötigt werden.

Wir wollen hier der Einfachheit halber und um nicht vom Thema abzuweichen, die Tatsache, dass sich die Theoreme in der vorliegenden Art und Weise voneinander ableiten lassen, als Äquivalenz bezeichnen.

Die Formulierungsweise der Voraussetzungen und Aussagen in Theorem 2.15 wurde weitestgehend der des Ekeland'schen Prinzips für mengenwertige Abbildungen angepasst. Wir wollen aber durch eine andere Formulierungsweise zunächst einmal die Verwandtschaft zum Minimalpunkttheorem 2.5 hervorheben. So ist die oben definierte Menge $S(x_0, y_0)$ nichts anderes als:

$$S(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \operatorname{gr} F : (x, y) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)\}.$$

Die Menge $F(X)$ kann auch definiert werden als $F(X) = P_Y \operatorname{gr} F$. Die Menge $\operatorname{Eff}(F(X), K)$ kann als Menge aller $\leq_K$-minimaler Elemente in $F(X)$ interpretiert werden. Die zusätzliche Voraussetzung (A3) bedeutet, dass ein Element $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$, für welches die Y-Komponente $\bar{y}$ nicht $\leq_K$-minimal in $F(X)$ ist, auch nicht $\preceq_{k^0}$-minimal in $\operatorname{gr} F$ ist. Wir wollen nun einen Beweis des Minimalpunkttheorems 2.5 unter Verwendung des Minimalitätsprinzips [Theorem 2.15] angeben.

Beweis des Minimalpunkttheorems 2.5 mit Theorem 2.15: Es seien die Voraussetzungen des Minimalpunkttheorems erfüllt. Als mengenwertige Abbildung wählen wir $F : X \to 2^Y$, $F(x) := \{y \in Y : (x, y) \in A\}$. Dann ist $A = \operatorname{gr} F$ und mit Ausnahme von (A3) sind alle Voraussetzungen des Minimalitätsprinzips erfüllt. Angenommen, die Aussagen des Minimalpunkttheorems sind nicht erfüllt. Das heißt, zu beliebig gegebenem $(x_0, y_0) \in A$ gibt es kein $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$, das $\preceq_{k^0}$-minimal in A ist. Dann ist trivialerweise auch die Voraussetzung (A3) des Minimalitätsprinzips erfüllt. Es folgt somit mit dem Minimalitätsprinzip die Existenz eines Elementes $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{k^0} (x_0, y_0)$, so dass $\bar{y}$ $\leq_K$-minimal in $P_Y A = F(X)$ ist.

Wir zeigen, dass das nicht möglich ist. Das Element $(\bar{x}, \bar{y})$ ist nach Annahme nicht $\preceq_{k^0}$-minimal in A. Deshalb gibt es ein $(\hat{x}, \hat{y}) \in A$ mit $(\hat{x}, \hat{y}) \preceq_{k^0} (\bar{x}, \bar{y})$ und $(\hat{x}, \hat{y}) \neq (\bar{x}, \bar{y})$. Wie im Beweis des Minimalpunkttheorems folgt auf elementare Weise $\hat{y} \leq_K \bar{y}$ und $\hat{y} \neq \bar{y}$. Somit ist $\bar{y}$ nicht $\leq_K$-minimal in $F(X)$. Also war unsere Annahme falsch, das heißt, die Aussagen des Minimalpunkttheorems sind erfüllt. ■

2.7 Folgerungen aus dem Minimalpunkttheorem

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Folgerungen aus dem Minimalpunkttheorem 2.5 angeben. Die erste Folgerung ist eine vektorwertige Variante des Ekeland'schen Variationsprinzips.

Bei der zweiten Aussage geht es um den Versuch, die Tatsache, dass die Y-Komponente unseres Minimalpunkttheorems ein sehr allgemeiner Vektorraum ist, zum Beweis von klassischen dem Ekeland'schen Prinzip verwandten Aussagen, die an die Linearität des Raumes gebunden sind, zu verwenden. Obwohl ein erheblicher Aufwand nötig war, ist das am Beispiel des Lemmas von Phelps gelungen.

Das vektorwertige Ekeland'sche Variationsprinzip

Vektorwertige Versionen des Ekeland'schen Prinzips wurden von zahlreichen Autoren bewiesen. Von Chr. Tammer in [30] wurde eine sehr allgemeine Variante bewiesen, in der der Raum Y ein linearer topologischer Raum ist und die Voraussetzung

(M2) durch eine schwächere Voraussetzung ersetzt wurde. Wir geben hier eine auf den Voraussetzungen unseres Minimalpunkttheorems basierende Formulierung an, die auf einfache Weise aus unserem Ekelandschen Prinzip für mengenwertige Abbildungen folgt. Wie in [14] erweitern wir den Raum Y um das Element ∞, um auch Funktionen, die nicht auf dem gesamten Raum definiert sind, betrachten zu können.

Korollar 2.16 *Es seien $\big(X, \{q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\big)$ ein separierter folgenvollständiger uniformer Raum, Y ein separierter linearer topologischer Raum, $K \subset Y$ ein konvexer spitzer Kegel, so dass (M2) gilt, und $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Für eine eigentliche Funktion $f : X \to Y \cup \{\infty\}$ und für die Mengen*

$$S(x) := \{u \in X : \ \forall \lambda \in \Lambda : \ f(u) - f(x) + k^0 q_\lambda(u,x) \in -K\}$$

seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(A1) Es existiert ein $\tilde{y} \in Y$, so dass für alle $x \in X$ und für den Kegel C aus Voraussetzung (M2) gilt:

$$f(x) \cap (\tilde{y} - \operatorname{int} C) = \emptyset.$$

(A2) Für alle $x \in \operatorname{dom} f$ ist $S(x)$ folgenabgeschlossen.

Dann gibt es zu jedem $x_0 \in \operatorname{dom} f$ ein $\bar{x} \in X$, so dass gilt:

(i) $\forall \lambda \in \Lambda : \ f(\bar{x}) + k^0 q_\lambda(\bar{x}, x_0) \preceq_K f(x_0)$,

(ii) $\forall x \in X \setminus \{\bar{x}\} : \ \exists \mu \in \Lambda : \ f(x) + k^0 q_\mu(x, \bar{x}) \not\preceq_K f(\bar{x})$.

Beweis: Wir betrachten die mengenwertige Abbildung

$$F : X \to 2^Y, \ F(x) := \begin{cases} \{f(x)\} & \text{für} \quad f(x) \neq \infty \\ \emptyset & \text{für} \quad f(x) = \infty \end{cases}$$

und zeigen, dass Theorem 2.13 anwendbar ist. Die Beschränktheitsvoraussetzung (A1) in Theorem 2.13 folgt sofort aus (A1). Es bleibt zu zeigen, dass (A2) in Theorem 2.13 erfüllt ist. Sei $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{gr} F$ eine $\preceq_{k^0}$-fallende Folge mit $x_n \to x \in X$. Dann gilt $x_{n+1} \in S(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Folgenabgeschlossenheit der Mengen $S(x_n)$ folgt $x \in S(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, für $n \in \mathbb{N}$ ist stets $(x, f(x)) \preceq_{k^0} (x_n, y_n)$. Theorem 2.13 liefert die Behauptung. ■

Auf analoge Weise folgen vektorwertige Varianten des Fixpunktsatzes von Kirk-Caristi [Theorem 2.14] und des Minimalitätsprinzips von Takahashi [Theorem 2.15]. Es lässt sich dann analog zu den Beweisen in Abschnitt 2.6 die Äquivalenz dieser Folgerungen untereinander zeigen.

Das Lemma von Phelps in linearen topologischen Räumen

Das Lemma von Phelps ist eine Variante des Ekeland'schen Prinzips, die an die Linearität des Raumes gebunden ist. Wir wollen zeigen, dass dieses Lemma eine Folgerung des Minimalpunkttheorems 2.5 ist. Wir wollen dabei ausdrücklich den

Raum im Lemma von Phelps mit der Y-Komponente des dem Minimalpunkttheorem zugrunde liegenden Produktraumes $X \times Y$ identifizieren, um daran die Qualität des Theorems als vektorwertige Aussage zu prüfen. Wir wählen also für X den trivialen Raum $X = \{0\}$. Die größte Schwierigkeit stellt der Nachweis der Voraussetzung (M2) dar. Wir werden deshalb die Resultate des Abschnitts 1.3 anwenden und den Raum Y im Minimalpunkttheorem nur mit einem geeigneten Teilraum des dem Lemma von Phelps zugrunde liegenden Raumes V identifizieren. Dieser Teilraum wird ein Banachraum sein.

Es sei bemerkt, das dieses Verfahren im Gegensatz zu einem direkten Beweis (vgl. Abschnitt 3.2) sehr aufwendig und in diesem Zusammenhang sicherlich nur von theoretischem Interesse ist. Wir haben bereits die meisten der zahlreichen Aussagen, die für den Beweis nötig sind, schon an anderer Stelle bewiesen. Uns fehlt lediglich noch die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma 2.17 *Es seien $\left(V, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger linearer topologischer Raum mit der Topologie χ, B eine nichtleere folgenabgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von V, so dass $0 \notin B$ ist, und K sei der durch B erzeugte Kegel. Für eine Menge $T \supset B$ seien die Voraussetzungen von Proposition 1.12 erfüllt und $(V_T, \|.\|_T)$ sei der entsprechende Banachraum mit der Topologie τ. Dann ist jede χ-beschränkte Teilmenge von K auch τ-beschränkt.*

Beweis: Sei M eine χ-beschränkte Teilmenge von K und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine beliebige Folge in M. Da die Folgenglieder x_n aus K sind, können sie dargestellt werden als $x_n = t_n\, b_n$, mit $b_n \in B$ und $t_n > 0$. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine so definierte Folge aus B. Wegen $0 \notin B$ gibt es nach Lemma 2.9 ein $\delta > 0$ und ein $\mu \in \Lambda$, so dass $\|b_n\|_\mu \geq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zu diesem $\mu \in \Lambda$ gibt es nach Satz 1.7 eine Konstante $c = c_\mu$, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $\|x_n\|_\mu \leq c$ ist. Es folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ t_n = \frac{\|x_n\|_\mu}{\|b_n\|_\mu} \leq \frac{c}{\delta}.$$

Weil $B \subset T$ ist, gilt $\|b_n\|_T \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt schließlich, dass für eine beliebige Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Konstante c gibt, so dass gilt:

$$\|x_n\|_T = t_n\ \|b_n\|_T \leq t_n \leq \frac{c}{\delta}.$$

Da für den Banachraum $(V_T, \|.\|_T)$ natürlich das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, bedeutet das, M ist τ-beschränkt. ■

Nun stehen uns ausreichend Hilfsmittel zur Verfügung um das Phelps'sche Lemma aus dem Minimalpunkttheorem 2.5 in der oben beschriebenen Weise abzuleiten. Die Resultate aus Abschnitt 1.3 und Lemma 2.17 werden nun genutzt, um unser Problem im linearen topologischen Raum auf ein Problem im Banachraum zurückzuführen. Es würde also für unseren Zweck ausreichen, ein Minimalpunkttheorem zu verwenden, in dem der Raum Y ein Banachraum ist. Die genannten Resultate werden in Kapitel 3 verwendet, um für das Phelps'sche Lemma und eine verwandte Aussage die Äquivalenz zwischen der jeweiligen Variante im Banachraum und der Variante im linearen topologischen Raum zu zeigen.

Korollar 2.18 *Es seien $\left(V, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger linearer topologischer Raum, $M \subset V$ eine nichtleere folgenabgeschlossene Teilmenge und $B \subset V$ eine nichtleere folgenabgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von V, so dass $0 \notin B$ ist, und K der durch B erzeugte Kegel. Dann gibt es zu jedem $v_0 \in V$, für das die Menge $M \cap (v_0 - K)$ nichtleer und beschränkt ist, ein $\bar{v} \in V$, so dass gilt:*

$$\bar{v} \in M \cap (v_0 - K) \text{ und } \{\bar{v}\} = M \cap (\bar{v} - K).$$

Beweis: Wir wählen für X den trivialen metrischen Raum $X = \{0\}$ mit der Metrik $d \equiv 0$. Dieser Raum ist offensichtlich vollständig, da jede Folge konvergent ist.

Es sei T der Folgenabschluss der absolutkonvexen Hülle von $v_0 \cup B$. Aus der Beschränktheit und der Konvexität von B erhalten wir mit Korollar 1.15, dass T beschränkt ist. Also folgt mit Proposition 1.12, dass der in Abschnitt 1.3 definierte Teilraum $(V_T, \|.\|_T) = (\operatorname{lin} T, \mu_T)$ ein Banachraum ist.

Wir wenden das Minimalpunkttheorem 2.5 also auf den Raum $\{0\} \times V_T$ an. Nach Proposition 1.13 übertragen sich die Folgenabgeschlossenheitsvoraussetzungen der entsprechenden Mengen auf den Raum V_T.

Wir können im Banachraum V_T einen Trennungssatz auf die Mengen $\{0\}$ und B anwenden. Es folgt die Existenz eines linearen stetigen Funktionals $v^* \in V_T^*$ mit $v^*(b) > 0$ für alle $b \in B$. Es gilt auch $v^*(k) > 0$ für alle $k \in K \setminus \{0\}$. Wir setzen $C := \{0\} \cup \{v \in V : v^*(v) > 0\}$. Man überzeugt sich leicht davon, dass mit diesem Kegel C die Voraussetzung (M2) erfüllt ist.

Als Menge A_Y wählen wir die nach Lemma 2.17 in V_T topologisch beschränkte Menge $M \cap (v_0 - K)$. Wie in Abschnitt 2.5 gezeigt und in Abbildung 2.2 illustriert wurde, ist damit (M1) erfüllt.

Die Voraussetzung (M3) folgt unter den gegebenen Voraussetzungen, wie in Abbildung 2.1 dargestellt wurde. Die Ordnungsrelation $\preceq_{k^0}$ in $A = \{0\} \times A_Y$ entspricht im vorliegendem Fall gerade der Relation $\leq_K$ in A_Y. Das Element k^0 kann dabei also beliebig aus $K \setminus \{0\}$ gewählt werden und hat keinen Einfluss auf die Ordnungsrelation. Das Minimalpunkttheorem 2.5 liefert die Existenz eines Punktes $\bar{v} \in M \cap (v_0 - K)$, der $\preceq_{k^0}$-minimal in A und somit $\leq_K$-minimal in $M \cap (v_0 - K)$ ist. Das heißt, es gilt $\{\bar{v}\} = M \cap (\bar{v} - K)$. ■

Bemerkung: Man wird anhand des Beweises vermuten, dass sich das Phelps'sche Lemma für lineare topologische Räume auch mit der Banachraumvariante des Phelps'schen Lemmas beweisen lässt. Wir geben einen solchen Beweis im Abschnitt 3.2 an.

2.8 Diskussion der Voraussetzungen

Eine vektorwertige Variante des Ekeland'schen Variationsprinzips unter Verwendung von kegelwertigen Metriken wurde von Nemeth [23] bewiesen. In [14, Th.10] findet man ein entsprechendes Minimalpunkttheorem.

Die Voraussetzungen dieses Minimalpunkttheorems unterscheiden sich von den hier gestellten Voraussetzungen in der folgenden Weise.

(1) Anstelle von (M3) wird in [14, Th.10] eine entsprechende (stärkere) Voraussetzung für Netze gefordert.

(2) Anstelle von Folgenvollständigkeit des Raumes X muss in [14, Th.10] Vollständigkeit von X gefordert werden.

(3) Die Voraussetzung (M2) entfällt in [14, Th.10].

(4) Die Beschränktheitsvoraussetzung in [14, Th.10] ist stärker als (M1). (die Abschwächung der Beschränktheitsvoraussetzung ist ein Resultat aus [14]).

(5) Durch die Verwendung kegelwertiger Metriken müssen in [14, Th.10] weitere Voraussetzungen an den Kegel K gestellt werden, die in unserem Fall stets erfüllt sind.

(6) In [14, Th.10] und in anderen Minimalpunkttheoremen wird die Lokalkonvexität der Y-Komponente des Produktraumes gefordert.

Weitere Unterschiede gibt es bei den Beweismitteln. Während wir alle Resultate mit dem Prinzip von Brézis und Browder bewiesen haben, wird für das Minimalpunkttheorem in [14, Th.10] eine Variante des Zorn'schen Lemmas verwendet.

Ähnlich verhält es sich mit den Voraussetzungen, die in [4] für eine Variante des Ekeland'schen Variationsprinzips für mengenwertige Abbildungen verwendet werden. Dort wird eine Voraussetzung gestellt, die als Submonotonie der Abbildung bezeichnet wird. Obwohl in der Definition der Submonotonie [4, Def.2.1] ein Formulierungsfehler[3]vorliegt, kann man anhand des Beweises vermuten, dass es sich bei der Submonotonie um eine unserer Voraussetzung (M4) entsprechende Voraussetzung für Netze handelt. Außerdem wird die Abgeschlossenheit von K anstelle unserer[4]schwächeren Voraussetzung (M5) gefordert.

Ein Resultat der vorliegenden Arbeit (siehe Abschnitt 1.4) ist der Nachweis, dass die K-metrischen Räume in [14, Th.10] nicht allgemeiner als die von uns zugrunde gelegten uniformen Räume sind.

Offen bleibt die Frage, ob es im Produktraum $X \times Y$, wobei X ein K-metrischer Raum ist, mehr Ordnungsrelationen gibt als in unserem Fall. Eine andere interessante Frage ist, ob und unter welchen Voraussetzungen sich die Minimalpunkttheoreme mit auf K-Metriken basierenden Ordnungsrelationen ohne Zorn'sches Lemma beweisen lassen, um in den Voraussetzungen Netze durch Folgen ersetzen zu können.

Es bleibt auch offen, ob durch die Verwendung linearer topologischer statt lokalkonvexer Räume eine Verallgemeinerung der Aussagen erreicht wird, oder ob die Voraussetzung (M2) so stark ist, dass sie in einem linearen topologischen Raum, der nicht lokalkonvex ist, nicht erfüllt sein kann.

[3]Man überzeugt sich leicht davon, dass eine Abbildung $F : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, $F(x) \equiv (0, \infty)$ mit $K = [0, \infty)$ submonoton nach dieser Definition ist (weil (ii) nie erfüllt ist). Die Aussage des Minimalpunkttheorems gilt aber nicht.

[4]Das ist ein Resultat aus [14].

Kapitel 3

Das Ekeland'sche Prinzip in linearen topologischen Räumen

3.1 Der Tropfensatz von Daneš

In diesem Abschnitt soll der Tropfensatz von Daneš [6] für lineare topologische Räume bewiesen werden. Wir werden zuerst einen direkten Beweis angeben. Anschließend zeigen wir, dass die Aussage für lineare topologische Räume aus der entsprechenden Banachraumvariante folgt. In [16] wurde der Satz für den Fall lokalkonvexer Räume aus der Banachraumversion hergeleitet.

Der Tropfensatz für Banachräume wird auch in neueren Arbeiten (vgl. [18]) noch unter Verwendung des Cantor'schen Durchschnittsatzes, also einer Folgerung des Zorn'schen Lemmas, bewiesen. Im Gegensatz dazu soll hier das Prinzip von Brézis und Browder verwendet werden.

Für eine Teilmenge B eines linearen Raumes X und einen Punkt $x \in X$ ist ein Tropfen $D(x, B)$ definiert durch

$$D(x,B) := co\{\{x\}, B\} = \{t\,x + (1-t)\,b \mid b \in B,\ t \in [0,1]\}.$$

Man beachte, dass zur Definition eines Tropfens allein lineare Struktur benötigt wird. Gerade diese Tropfen werden im Beweis des Satzes verwendet, um eine Halbordnung zu definieren. Dies weist auf eine Verwandtschaft dieser Objekte zu Kegeln hin.

Theorem 3.1 *Es seien $\left(X, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ ein separierter folgenvollständiger linearer topologischer Raum, $A \subset X$ eine nichtleere folgenabgeschlossene Teilmenge und $B \subset X$ eine nichtleere folgenabgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von X. Es gelte die Separationsbedingung*

$$\exists\,\delta > 0,\ \exists\,\mu \in \Lambda :\ \forall a \in A,\ \forall b \in B :\ \|a-b\|_\mu \geq \delta. \tag{3.1}$$

Dann gibt es zu jedem $x_0 \in A$ ein $\bar{x} \in X$, so dass gilt:

$$\bar{x} \in A \cap D(x_0, B)\ \textit{und}\ \{\bar{x}\} = A \cap D(\bar{x}, B).$$

Beweis: Sei $x_0 \in A$ beliebig gegeben. Wir setzen $W := A \cap D(x_0, B)$. Nach Satz 1.14 ist W beschränkt. Auf W ist eine Quasiordnung gegeben durch

$$x_1 \preceq x_2 \ \Leftrightarrow\ x_1 \in D(x_2, B).$$

Wir definieren für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine Funktion $d_\lambda : X \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d_\lambda(x) := \max\{\|x\|_\lambda, \|x\|_\mu\}. \tag{3.2}$$

Damit gilt für alle $\lambda \in \Lambda$ die Separationsbedingung

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B:\ d_\lambda(a-b) \geq \delta. \tag{3.3}$$

Wir setzen unter Beachtung von Korollar 1.8 und der Beschränktheit von $B \cup W$

$$\phi_\lambda(x) := c_\lambda \inf_{b\in B} d_\lambda(x-b) \ \text{ mit }\ c_\lambda := \frac{1}{\delta} \sup_{b\in B,\, a\in W} d_\lambda(a-b). \tag{3.4}$$

Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, dass für die quasigeordnete Menge $(W, \preceq)$ und eine der eben definierten Funktionen $\phi_\lambda : W \to \mathbb{R}$ die drei Voraussetzungen (A1) bis (A3) des Prinzips von Brézis und Browder [Prop.2.1] erfüllt sind.

Wir wählen ein beliebiges $\lambda \in \Lambda$ aus. Natürlich ist ϕ_λ von unten beschränkt. Sei $x_1 \preceq x_2$, $x_1 \neq x_2$, das heißt, $x_1 = \bar{t}\, x_2 + (1-\bar{t}\,)\,\bar{b}$ für ein $\bar{b} \in B$ und $0 \leq \bar{t} < 1$. Wir setzen $\hat{\bar{b}}(b) := \bar{t}\, b + (1-\bar{t}\,)\,\bar{b}$ für beliebiges $b \in B$. Dann gilt

$$\phi_\lambda(x_1) = c_\lambda \inf_{b\in B} d_\lambda(x_1 - b) \leq c_\lambda \cdot d_\lambda(x_1 - \hat{\bar{b}}(b)) = \bar{t} \cdot c_\lambda \cdot d_\lambda(x_2 - b)$$

für alle $b \in B$. Damit ist $\phi_\lambda(x_1) \leq \bar{t} \cdot \phi_\lambda(x_2) < \phi_\lambda(x_2)$.

Nun sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ eine beliebige $\preceq$-fallende Folge in W. Wir betrachten beliebige Folgenglieder x_n und x_m mit $m > n$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_n \neq x_m$. Wie oben ist x_m wieder darstellbar durch

$$x_m = \bar{t}\, x_n + (1-\bar{t}\,)\,\bar{b} \tag{3.5}$$

für fixierte Elemente $\bar{b} \in B$ und $\bar{t} \in [0,1)$. Wir setzen $\hat{x}_m(b) := \bar{t}\, x_n + (1-\bar{t}\,)\, b$ und $\hat{\bar{b}}(b) := \bar{t}\, b + (1-\bar{t}\,)\,\bar{b}$. Dann gelten, wie man leicht verifiziert, die folgenden beiden Aussagen:

$$\begin{aligned} d_\lambda(x_n - \hat{x}_m(b)) &= (1-\bar{t}\,)\, d_\lambda(x_n - b)\ \forall b \in B, \\ d_\lambda(x_n - x_m) &= (1-\bar{t}\,)\, d_\lambda(x_n - \bar{b}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Daraus folgt

$$d_\lambda(x_n - x_m) \overset{(3.6)}{=} \frac{d_\lambda(x_n - \bar{b})}{d_\lambda(x_n - b)}\, d_\lambda(x_n - \hat{x}_m(b)) \overset{(3.3)}{\leq} \frac{\sup_{b\in B} d_\lambda(x_n - b)}{\delta}\, d_\lambda(x_n - \hat{x}_m(b))$$

und das heißt,

$$\forall b \in B:\ d_\lambda(x_n - x_m) \leq c_\lambda\, d_\lambda(x_n - \hat{x}_m(b)). \tag{3.7}$$

Außerdem gilt, wie man leicht nachrechnet, die Beziehung

$$\forall b \in B:\ d_\lambda(\hat{x}_m(b) - b) = d_\lambda(x_m - \hat{\bar{b}}(b)). \tag{3.8}$$

Mit diesen beiden Hilfsaussagen konstruieren wir unter Beachtung der Konvergenz der reellen Zahlenfolgen $\{\phi_\lambda(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Seien $\varepsilon > 0$ und $\lambda \in \Lambda$

beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|_\lambda &\overset{(3.2)}{\leq} d_\lambda(x_n - x_m) \overset{(3.7)}{\leq} c_\lambda\, d_\lambda(x_n, \hat{x}_m(b)) \\
&\overset{(lin.Abh.)}{=} c_\lambda\, d_\lambda(x_n - b) - c_\lambda\, d_\lambda(\hat{x}_m(b) - b) \\
&\overset{(3.8)}{=} c_\lambda\, d_\lambda(x_n - b) - c_\lambda\, d_\lambda(x_m - \hat{b}(b)) \\
&\overset{(3.4)}{\leq} c_\lambda\, d_\lambda(x_n - b) - \phi_\lambda(x_m)
\end{aligned}$$

für alle $b \in B$ und daraus folgt

$$\|x_n - x_m\|_\lambda \leq \phi_\lambda(x_n) - \phi_\lambda(x_m).$$

Weil $\{\phi_\lambda(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist, existiert zu den oben vorgegebenen $\varepsilon > 0$ und $\lambda \in \Lambda$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|x_n - x_m\|_\lambda \leq \phi_\lambda(x_n) - \phi_\lambda(x_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m > n_0$ gilt. Aus der Folgenvollständigkeit von X und der Folgenabgeschlossenheit von A und B folgt, dass W folgenvollständig ist. Deshalb konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen ein $x \in W$. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist $D(x_n, B)$ folgenabgeschlossen. Es ist also $x \in D(x_n, B)$, das heißt, für $n \in \mathbb{N}$ ist stets $x \preceq x_n$.

Wir können somit Proposition 2.1 anwenden, womit unmittelbar die Behauptungen des Satzes folgen. ■

Wir zeigen nun, dass dieser Satz auch aus der entspechenden Banachraumvariante folgt.

Beweis des Tropfensatzes für lineare topologische Räume mit dem Tropfensatz für Banachräume: Es sei T der Folgenabschluss der absolutkonvexen Hülle von $x_0 \cup B$. Aus der Beschränktheit und der Konvexität von B folgt mit Korollar 1.15, dass T beschränkt ist. Also folgt mit Proposition 1.12, dass der in Abschnitt 1.3 definierte Teilraum $(X_T, \|.\|_T) = (\operatorname{lin} T, \mu_T)$ ein Banachraum ist.

Nach Proposition 1.13 lassen sich die Folgenabgeschlossenheitsvoraussetzungen auf den Raum X_T übertragen, das heißt, $B \subset X_T$ und $A_T := X_T \cap A$ sind abgeschlossen in der Banachraumtopologie.

Jedes $\lambda \in \Lambda$ kann mit einem Element U_λ der Nullumgebungsbasis $\mathfrak{U}$ von X identifiziert werden (vgl. [S.17, (1.3)]). Zu dem $\mu \in \Lambda$ aus der Separationsbedingung (3.1), gibt es wegen der Beschränktheit von T ein $\sigma > 0$, so dass $T \subset \sigma U_\mu$ gilt. Nach (1.3) und nach Definition von $\|.\|_T$ in Abschnitt 1.3 folgt $\|x\|_T \geq 1/\sigma\ \|x\|_\mu$ für alle $x \in X$. Für $\bar{\delta} := \delta/\sigma > 0$ gilt somit die Separationsbedingung

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B:\ \|a - b\|_T \geq \bar{\delta}.$$

Der Tropfensatz im Banachraum (vgl. [16, Appendix]) liefert

$$\bar{x} \in A_T \cap D(x_0, B) \text{ und } \{\bar{x}\} = A_T \cap D(\bar{x}, B).$$

Natürlich ist auch $\bar{x} \in A \cap D(x_0, B)$. Wegen $\bar{x} \in D(x_0, B)$ ist $D(\bar{x}, B) \subset X_T$. Somit folgt $\{\bar{x}\} = A \cap D(\bar{x}, B)$. ■

3.2 Das Lemma von Phelps

In Abschnitt 2.7 haben wir das Lemma von Phelps in linearen topologischen Räumen mit Hilfe des Minimalpunkttheorems 2.5 bewiesen. Wir wollen hier einen direkten Beweis mit dem Prinzip von Brézis und Browder angeben. Anschließend zeigen wir die Äquivalenz zur Banachraumvariante.

Theorem 3.2 *Es seien* $\left(Y, \{\|.\|_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right)$ *ein separierter folgenvollständiger linearer topologischer Raum,* $M \subset Y$ *eine nichtleere folgenabgeschlossene Teilmenge und* $B \subset Y$ *eine nichtleere folgenabgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von* Y*, so dass* $0 \notin B$ *ist, und* K *der durch* B *erzeugte Kegel. Dann gibt es zu jedem* $y_0 \in Y$*, für das die Menge* $M \cap (y_0 - K)$ *nichtleer und beschränkt ist, ein* $\bar{y} \in Y$*, so dass gilt:*

$$\bar{y} \in M \cap (y_0 - K) \text{ und } \{\bar{y}\} = M \cap (\bar{y} - K).$$

Beweis: Sei $y_0 \in Y$ beliebig vorgegeben. Es sei $M^0 := M \cap (y_0 - K)$. Wir wollen das Prinzip von Brézis und Browder auf die quasigeordnete Menge $(M^0, \leq_K)$ anwenden. Wir setzen

$$\phi(y) := \sup\{t > 0 : \exists b \in B : y_0 - y = t\,b\}.$$

Man beachte, dass die Voraussetzungen von Lemma 2.9 und damit auch die von Lemma 2.8 erfüllt sind. Indem man wie im zweiten Teil des Beweises von Lemma 2.8 vorgeht, erhält man, dass das Supremum immer endlich ist. Die Beschränktheit der Funktion ϕ nach unten ist offensichtlich.

Sei nun $y_1 \leq_K y_2$ und $y_1 \neq y_2$. Wir setzen $v_1 := y_0 - y_1$ und $v_2 := y_0 - y_2$. Es sind $v_1, v_2 \in K$ und $v_1 - v_2 \in K \setminus \{0\}$. Dann ist $v_1 - v_2$ darstellbar als $v_1 - v_2 = \tau\,\beta$ mit $\tau > 0$ und $\beta \in B$. Sei $v_1 = t_1\,b_1$ eine beliebige Darstellung von v_1 mit $t_1 \geq 0$ und $b_1 \in B$. Analog zum ersten Teil des Beweises von Lemma 2.8 ist v_2 darstellbar als $v_2 = (t_1 + \tau)b_2$ mit $b_2 \in B$. Es folgt $\phi(y_2) \geq t_1 + \tau$ für beliebige Darstellungen von v_1 durch Vielfache von Elementen aus B. Daraus folgt $\phi(y_2) \geq \phi(y_1) + \tau$, das heißt, es ist $\phi(y_1) < \phi(y_2)$.

Sei nun $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\leq_K$-fallende Folge in M^0. Dann ist diese Folge nach Lemma 2.8 eine Cauchyfolge. Die Menge M^0 ist als folgenabgeschlossene Teilmenge eines folgenvollständigen Raumes folgenvollständig. Das heißt, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent in M^0. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sind die Mengen $M^n := M \cap (y_n - K)$ folgenabgeschlossen. Es ist also $y \in M^n$, das heißt, für $n \in \mathbb{N}$ ist stets $y \leq_K y_n$.

Wir können nun Proposition 2.1 anwenden, womit unmittelbar die Behauptungen des Satzes folgen. ∎

Auch diese Aussage im linearen topologischen Raum ist zu ihrer Banachraumvariante äquivalent. Für den Fall lokalkonvexer Räume wurde die Äquivalenz zur entsprechenden Banachraumvariante in [16] gezeigt.

Beweis des Phleps'schen Lemmas für lineare topologische Räume mit dem Phelps'schen Lemma für Banachräume: Es sei T der Folgenabschluss der absolutkonvexen Hülle von $y_0 \cup B$. Aus der Beschränktheit und der Konvexität von B folgt mit Korollar 1.15 , dass T beschränkt ist. Also folgt mit Proposition 1.12 , dass der in Abschnitt 1.3 definierte Teilraum $(Y_T, \|.\|_T) = (\operatorname{lin} T, \mu_T)$ ein Banachraum ist, dessen Topologie wir mit τ bezeichnen wollen. Nach Proposition 1.13 lassen sich die Folgenabgeschlossenheitsvoraussetzungen auf den Raum Y_T übertragen, das heißt, $B \subset Y_T$ und $M_T := Y_T \cap M$ sind τ-abgeschlossen

Natürlich ist $B \subset T$ τ-beschränkt. Die τ-Beschränktheit von $M_T \cap (y_0 - K)$ folgt mit Lemma 2.17. Das Phelps'sche Lemma im Banachraum (vgl. [16, Appendix]) liefert

$$\bar{y} \in M_T \cap (y_0 - K) \text{ und } \{\bar{y}\} = M_T \cap (\bar{y} - K).$$

Natürlich ist dann auch $\bar{y} \in M \cap (y_0 - K)$. Wegen $\bar{y} \in (y_0 - K)$ ist $(\bar{y} - K) \subset X_T$. Somit folgt $\{\bar{y}\} = M \cap (\bar{y} - K)$. ∎

Literaturverzeichnis

[1] Altman, M., *A Generalization of Brézis-Browder Principle on Ordered Sets*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 6 (2), 157-165, (1982)

[2] Brézis, H., Browder, F. E., *A General Principle on Ordered Sets in Nonlinear Functional Analysis*, Advances in Mathematics 21, 355-364, (1976)

[3] Bishop, E., Phelps, R. R., *The Support Functionals of Convex Sets*, In KLEE, V., editor, Convexity, volume VII of Proceedings in Symposia in Pure Mathematics, pp. 27-35, Americal Mathematical Society, (1963)

[4] Chen, G. Y., Huang, X. X., Hou, S. H., *General Ekeland's Variational Principle for Set-Valued Mappings*, JOTA, Vol. 106, No. 1, pp. 151-164, (2000)

[5] Caristi,J., Kirk, W., *Mapping Theorems in Metric and Banach Spaces*, Bull. Acad. Poll. Sci. 23, 891-894, (1975)

[6] Daneš, J., *A Geometrical Theorem Useful in Nonlinear Functional Analysis*, Bulletino U.M.I., 6(4), 369-375, (1972)

[7] Day, M. M., *The Spaces L^p with $0 < p < 1$*, Bull. Amer. Math. Soc. 46, 816-823, (1940)

[8] Ekeland, I., *Sur les problèmes variationnels*, C. R. Acad. Sci. (Paris), Serie A 275, 1057-1059, (1972)

[9] Ekeland, I., *On the Variational Principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 47, 324-353, (1974)

[10] Fang, X.-J., *The Variational Principle and Fixed Point Theorems in Certain Topological Spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 202, 398-412, (1996)

[11] Gerth, Chr., Weidner, P., *Nonconvex Separation Theorems and Some Applications in Vector Optimization*, JOTA, Vol. 67, No. 2, 297-320, (1990)

[12] Göpfert, A., Tammer, Chr., *A New Maximal Point Theorem*, ZAA 14 (2), 379-390, (1995)

[13] Göpfert, A., Tammer, Chr., Zălinescu, C., *A New Minimal Point Theorem in Product Spaces*, ZAA 18 (3), 767-770, (1999)

[14] Göpfert, A., Tammer, Chr., Zălinescu, C., *On the Vectorial Ekeland's Variational Principle and Minimal Points in Product Spaces*, Nonlinear Analysis 39, 909-922, (2000)

[15] Hamel, A., *Equivalents to Ekelands Variational Principle in F-Type Topological Spaces* , Report Nr. 09, (2001)

[16] Hamel, A., *Phelp's Lemma, Daneš' Drop Theorem and Ekeland's Principle in Locally Convex Topological Vector Spaces*, Report Nr. 10, (2001)

[17] Hyers, D. H., *Pseudo-Normed Linear Spaces and Abelian Groups*, Duke Math. J. vol. 5, 628-634, (1939)

[18] Hyers, D. H., Isac, G., Rassias, T. M., *Nonlinear Analysis and Applications*, World Scientific, (1997)

[19] Isac, G., *The Ekeland's Principle and the Pareto ε-Efficiency*, in: M.Tamiz (Ed.), Multi-Objective Programming and Goal Programming: Theories and Applications, Lecture Notes in Economics and Math. Systems, vol 432, Springer, Berlin, 148-163, (1996)

[20] Jahn, J., *Set-Valued Optimization: A Survey*, Preprint, FAU Erlangen-Nürnberg No.264, (2000)

[21] Kelly, J. L., *Genaral Topology*, Springer, (1955)

[22] Köthe, G., *Topologische lineare Räume I*, Springer, (1966)

[23] Nemeth, A. B., *A Nonconvex Vector Minimization Problem*, Nonlinear Analysis 10, 669-678, (1986)

[24] Oettli, W., Thèra, M., *Equivalents of Ekeland's Principle*, Bull. Austral. Math. Soc. 48, 385-392, (1993)

[25] Phelps, R. R., *Support Cones and Their Generalisation*, In KLEE, V., editor, Convexity, volume VII of Proceedings in Symposia in Pure Mathematics, pp. 393-401, Americal Mathamatical Society, (1963)

[26] Phelps, R. R., *Support Cones in Banach Spaces and Their Applications*, Advances in Mathematics, 13, 1-19, (1974)

[27] Phelps, R. R., *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364, Springer Verlag, (1989)

[28] Schröder, H., *Funktionalanalysis*, Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt / M., (2000)

[29] Takahashi, W., *Existence Theorems Generalizing Fixed Point Theorems for Multivalued Mappings*, in Thera, M.A. and Baillon, J.B.: *Fixed Point Theorie and Applications*, Longman S&T, 397-406, (1991)

[30] Tammer, Chr., *A Generalization of Ekeland's Variational Principle*, Optimization, 25, 129-141, (1992)

[31] Tammer, Chr., *A Variational Principle and a Fixed Point Theorem*, In: Henry, J., Yvon, J.-P., (Eds.): System Modelling and Optimization, Lecture Notes in Control and Information Sciences 197, Springer London, 248-257, (1994)

Hiermit bestätige ich, die am heutigen Tage eingereichte Diplomarbeit mit dem Titel

Minimalpunkttheoreme in uniformen Räumen und verwandte Aussagen

unter Betreuung von Frau Prof. Dr. Chr. Tammer und Herrn Dr. A. Hamel eigenständig und unter ausschließlicher Zuhilfenahme der angegebenen Literatur angefertigt zu haben. Zitate habe ich als solche gekennzeichnet.

Halle, 30. Oktober 2001 Andreas Löhne