Mathegami
Mathematik - Origami - Unterricht

Friedrich-Schiller-Universität Jena August 2012

Falten eines regelmäßigen Fünfecks

Diana Todt (diana.todt@uni-jena.de)

Kurzzusammenfassung
In dieser Arbeit wird ein Faltverfahren vorgestellt, welches in ein gegebenes Rechteck ein regelmäßiges Fünfeck mit größtmöglichem Flächeninhalt entstehen lässt. Gegenüber bereits bekannten Faltungen hat dieses Verfahren den Vorteil, dass es keine Näherung darstellt, sondern exakt ist und sich auf verschiedene Papierformate anwenden lässt. Sowohl die Korrektheit des Verfahrens als auch die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal werden gezeigt. Die Idee zu diesem Faltverfahren entstand im Rahmen meiner wissenschaftlichen Hausarbeit an der Friedrich–Schiller–Universität Jena [5].

1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit soll mittels mathematischen Origamis ein Faltverfahren für ein regelmäßiges Fünfeck aus einem rechteckigem Blatt vorgestellt werden. Im Gegensatz zu den bereits bekannten Faltverfahren von D. Brill [1] erhält man mit dem hier vorgestellten Verfahren nicht nur eine Näherung eines regelmäßigen Fünfecks. Die Fehlerrechnung zum Näherungsverfahren von Brill ist in [5] nachzulesen. Von anderen exakten Faltanleitungen, z. B. von D. Dureisseix [2] oder J. Sakoda [4] grenzt sich mein Verfahren durch beträchtliche Flexibilität des Ausgangsformates ab. Weiterhin besitzt dieses gefaltete, exakte, regelmäßige Fünfeck maximalen Flächeninhalt bezüglich des Ausgangsformates, dafür aber keine Taschen und Laschen zum Zusammenstecken zu einem Körper.

Zu Beginn der Arbeit wird die Konstruktionsidee mittels Origami vorgestellt und danach detailliert erklärt. Anschließend wird die Korrektheit des Faltverfahrens bewiesen. Schließlich wird die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal gezeigt, welche aus dem vorgestellten Faltverfahren abgeleitet wurde. Die Korrektheit dieser Konstruktion wird ebenfalls bewiesen.

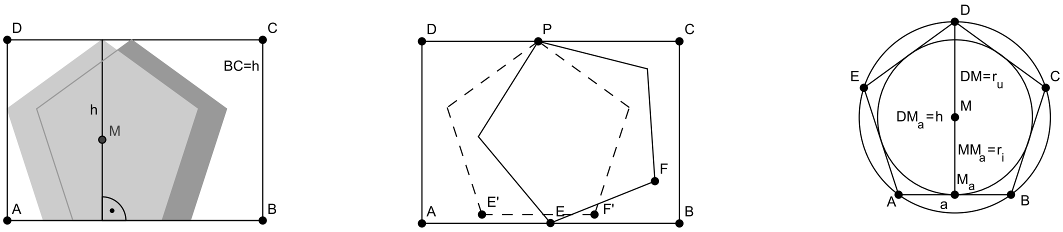
2 Voraussetzungen und Konstruktionsidee

Voraussetzung für die Faltung ist ein rechteckiges Blatt. Darin soll ein regelmäßiges Fünfeck mit maximalen Flächeninhalt (Abbildung 1a) gefaltet werden. a sei die Seitenlänge des gesuchten regelmäßigen Fünfecks und h dessen Höhe (Abbildung 1c). Die Höhe entspricht der Summe aus In- und Umkreisradius. Für den Inkreisradius r_i und den Umkreisradius r_u im regelmäßigen Fünfeck gilt nach [5]:

$$r_i = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} \tag{1}$$

$$r_u = a\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}. \tag{2}$$

Das Faltverfahren setzt ein Blatt Papier im Seitenverhältnis von mindestens 1:1,26 voraus.[1] Somit können beispielsweise DIN–A–Papier (1:$\sqrt{2}$), ein Doppelquadrat (1:2) oder Papier mit dem amerikanischen Format Letter/A (ca. 1:1,3) verwendet werden. Das Verfahren wird im Folgenden anhand des Ausgangsformat DIN–A beschrieben, da dieses in Europa weit verbreitet ist.



(a) Regelmäßiges Fünfeck mit maximalem Flächeninhalt in einem DIN–A–Blatt

(b) Regelmäßiges Fünfeck mit maximalem Flächeninhalt in einem DIN–A–Blatt

(c) Skizze mit verwendeten Bezeichnungen

Abbildung 1: Regelmäßiges Fünfeck

Im Unterschied zu den korrekten Faltanleitungen in [2] oder [4] nutzt dieses Verfahren nicht primär die Eigenschaft des Goldenen Schnittes im regelmäßigen Fünfeck aus. Vielmehr wird genutzt, dass die Höhe des gesuchten Fünfecks der Summe aus dessen In- und Umkreisradius entspricht ($h = r_i + r_u$). Um ein regelmäßiges Fünfeck mit maximalem Flächeninhalt in ein DIN–A–Blatt zu konstruieren, ist leicht ersichtlich, dass die kürzere Seite des Ausgangsformates der Höhe h des regelmäßigen Fünfecks entsprechen muss (Abbildung 1a). Das lässt sich mit Hilfe von Abbildung 1b zeigen, indem man ein Fünfeck, welches anderes in das Ausgangsformat einbeschrieben ist, so um einen Eckpunkt dreht, dass die gegenüberliegende Seite parallel zur Seite des Ausgangsformates ist. Nun ist klar, dass sich dieses Fünfeck innerhalb des DIN–A–Blattes noch vergrößern lässt.

Für die Faltung wird der Mittelpunkt M des regelmäßigen Fünfecks benötigt. Dieser teilt die Höhe in Um- und Inkreisradius. In Formel (3) wird dieses Teilungsverhältnis hergeleitet.

$$
\begin{aligned}
\frac{r_i}{r_u} &= \frac{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}}{h\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} \approx \frac{0,45h}{0,55h}
\end{aligned} \tag{3}
$$

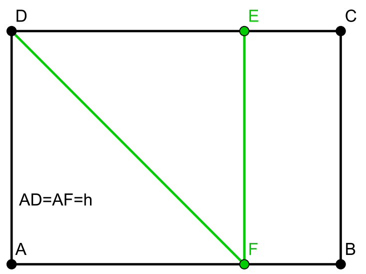
Gemäß Formel (3) entspricht der Umkreisradius eines regelmäßigen Fünfecks ungefähr 55% der Höhe dieses Fünfecks und der Inkreisradius circa 45%. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Fünfecks teilt demnach die Höhe im Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{5}} : \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Da die Höhe h des regelmäßigen Fünfecks der kürzeren Seite des DIN–A–Blattes entspricht ist es Ziel der Faltung, die kurze Seite des Ausgangspapiers im Verhältnis $r_i : r_u = \frac{1}{\sqrt{5}} : \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ zu teilen und so den Mittelpunkt des gesuchten Fünfecks zu bestimmen.

Der gefundene Mittelpunkt M (Abbildung 2f) wird anschließend genutzt, um die Eckpunkte des gesuchten Fünfecks zu bestimmen. Ein Eckpunkt (Punkt P in Abbildung 2g) entspricht dem Lotfußpunkt von M auf der längeren Seite des Ausgangsrechtecks. Zwei weitere Eckpunkte (R und Q in Abbildung 2i) liegen auf der gegenüber liegenden Seite des Ausgangsrechtecks.

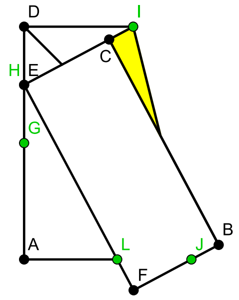
[1] Das exakte Verhältnis lautet $1 : \frac{3}{5}+\frac{1}{10}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left(3\sqrt{5}-5\right)$ und errechnet sich aus der Summe von $\frac{3h}{5}$ und der Länge der halben Diagonale des regelmäßigen Fünfecks mit der Höhe h. Diese Herleitung ist aus Abbildung 2i ersichtlich. Das gelbe Rechteck hat genau das benötigte Format.

3 Faltung

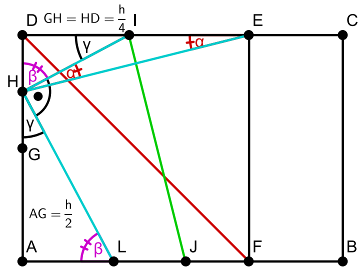
In der Abbildung 2 wird das Verfahren anhand von Skizzierungen und Erläuterungen zu den einzelnen Faltschritten vorgestellt. In der Abbildung sind neu entstandene Faltlinien grün dargestellt. Die Hilfslinien werden mit hellblau gekennzeichnet. Die Rückseite des Faltpapiers ist gelb gefärbt. Die gleiche farbliche Markierung (außer grün und grau) von Winkeln oder Linien bedeutet, dass diese die gleiche Größe haben. Die ersten sechs Faltschritte dienen der Ermittlung des Mittelpunktes. Ausgehend von diesem Punkt wird in in den drei weiteren Skizzen das Falten des gesuchten Fünfecks ⬠$PWQRS$ erklärt.



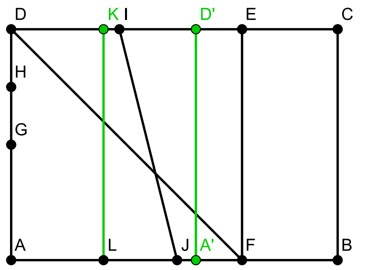
(a) Ausgangsformat sei ein Rechteck $ABCD$. AD wird auf CD gefaltet, dabei kommt A auf dem neuen Punkt E zum Liegen, der entstehende Bruch verläuft durch D und den neuen Punkt F. Nun wird eine Faltlinie durch E senkrecht zu CD gefaltet. Das Rechteck $EFBC$ wird nach hinten gefaltet.



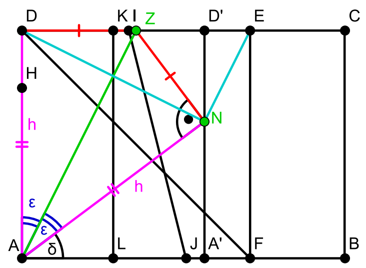
(b) Punkt G halbiert AD und H halbiert DG. E wird auf H gefaltet, IJ heißt die neu entstandene Faltlinie. L sei der Punkt, auf welchem EF und AB sich schneiden.



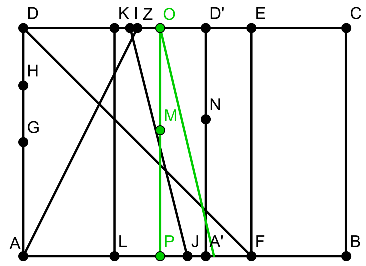
(c) Zu sehen sind die entstandenen Faltlinien nach dem Entfalten sowie die Hilfslinien HI, EH und HL. Die Winkel α, β und γ werden für den Korrektheitsbeweis benötigt.



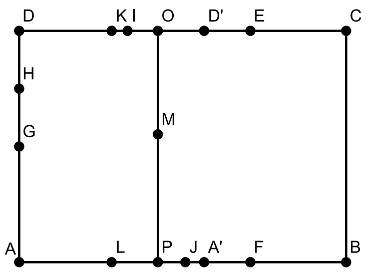
(d) Durch L wird eine Faltlinie orthogonal zu AB gefaltet und es entsteht Punkt K. Dabei kommt A auf A' und D auf D' zum Liegen. Anschließend ist eine Faltlinie durch A' und D' zu falten.



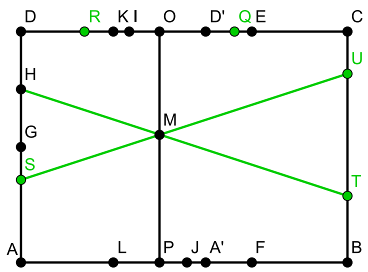
(e) D wird so auf $A'D'$ gelegt, dass die Faltlinie durch A verläuft. Diese Linie verläuft durch den neu entstandenen Punkt Z. D kommt auf dem neuen Punkt N zum Liegen.



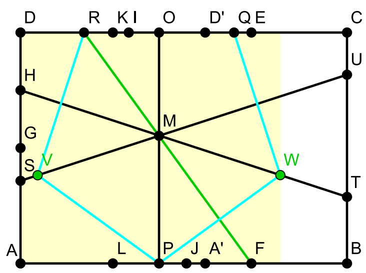
(f) KL wird auf $A'D'$ gelegt. Es entsteht OP. N wird so auf OP gefaltet, dass der Faltlinie durch O verläuft. N kommt auf dem neuen Punkt M zum Liegen.



(g) M ist der Mittelpunkt des Fünfecks und P der erste Eckpunkt.



(h) Q und R entstehen, indem P auf CD gelegt wird, sodass die Faltlinie durch M verläuft.



(i) Nach Faltung durch F und R kommt Q auf V zum Liegen. V kommt auf dem Punkt W zum Liegen, wenn die Faltlinie OP nochmals gefaltet wird.

Abbildung 2: Faltung eines regelmäßigen Fünfecks

Beweis

Der Korrektheitsbeweis des in Abbildung 2 dargestellten Faltverfahrens wird in drei Schritten geführt. Zuerst wird gezeigt, dass die Strecke $D'E$ die Länge $\frac{1}{5}|AD|$ besitzt. Mit diesem Wissen wird im zweiten Schritt $|ON| = \frac{1}{\sqrt{5}}|AD|$ gezeigt. Folglich ist $|MP|$ der Umkreisradius des regelmäßigen Fünfecks mit der Höhe $h = |AD|$. Im letzten Schritt wird gezeigt, dass es sich bei der in Abbildung 2i entstehenden Fläche um ein regelmäßiges Fünfeck handelt.

1. Für den ersten Beweisschritt wird Abbildung 2c betrachtet. Die Strecke EH hat nach dem Satz von Pythagoras eine Länge von $\sqrt{h^2 + \frac{h^2}{4^2}} = \frac{h}{4}\sqrt{17}$. Somit gilt für die Winkel α und β:

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}},\\
&\sin\beta = \sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{15}{17},\\
&\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{8}{17},\ \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

   Die Dreiecke ΔDHI und ΔALH sind ähnlich. Nach der Definition des Tangens gilt im Dreieck ΔALH (Abbildung 2c):

$$\tan\beta = \frac{|AH|}{|AL|} \Leftrightarrow |AL| = \frac{|AH|}{\tan\beta} = \frac{8}{15}|AH|.$$

   Da $|AH| = \frac{3}{4}|AD|$ ist, gilt für $|AL|$:

$$|AL| = \frac{8}{15}\cdot\frac{3}{4}|AD| = \frac{2}{5}|AD| = \frac{2}{5}h.$$

   Folglich haben die Strecken AL, LA' und DK eine Länge von $\frac{2h}{5}$ sowie LF und KE eine Länge von $\frac{3h}{5}$. Durch den Faltschritt in Abbildung 2d ergibt sich für die Strecke $|A'F| = |D'E| = \frac{h}{5}$.

2. Für den zweiten Beweisschritt wird Abbildung 2e betrachtet. Dafür werden folgende Winkelgrößen benötigt:

$$\begin{aligned}
&\cos\delta = \frac{|AA'|}{|AD|} = \frac{\frac{4}{5}h}{h} = \frac{4}{5}\\
&\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\delta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}},\ \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\delta}{2}} = \sqrt{1-\frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{1}{10}}\\
&\sin\varepsilon = \sin\left(\frac{90^\circ-\delta}{2}\right) = \sin 45^\circ\cos\frac{\delta}{2} - \cos 45^\circ \sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{9}{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

   Da $\sin\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{5}}$ gilt, ist eine Kathete der Dreiecke ΔAZD und ΔANZ doppelt so lang wie die andere Kathete. Somit ist $\frac{1}{2}|AD| = |DZ| = |NZ|$ und Z ist der Mittelpunkt von DE. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ΔDNE rechtwinklig mit dem Umkreismittelpunkt Z. Folglich kann der Kathetensatz angewendet werden:

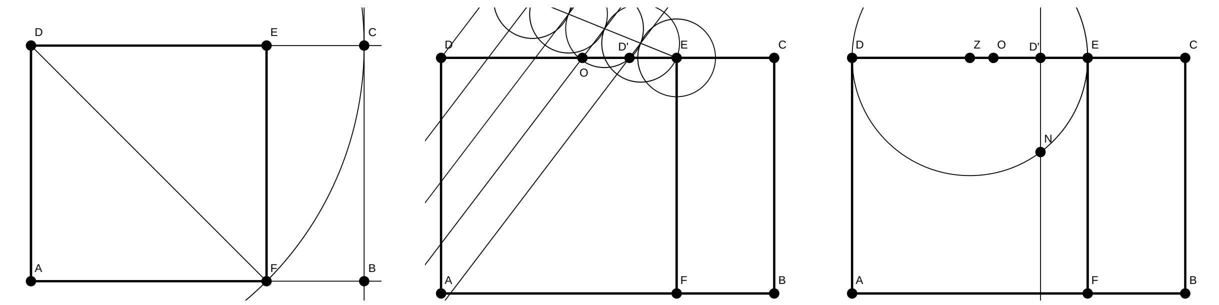
$$|EN| = \sqrt{|D'E|\cdot|DE|} = \sqrt{\frac{h}{5}\cdot h} = \frac{h}{\sqrt{5}}.$$

   Nach dem Faltschritt aus Abbildung 2f gilt $|EN| = |NO| = |MO|$, zudem ist $|MP| = h(1-\frac{1}{\sqrt{5}})$ der Umkreisradius.

3. Wie aus dem Faltschritt in Abbildung 2h hervorgeht, haben P, Q sowie R den gleichen Abstand von M und das Dreieck ΔPQR hat die Höhe h. Diese drei Punkte sind Eckpunkte des entstehenden regelmäßigen Fünfecks. Dessen weitere Eckpunkte liegen auf den Strecken HT und SU, den Symmetrieachsen des Fünfecks und werden durch eine Faltung durch R und M ermittelt. Dadurch sind die Strecken $|RQ|$ und $|RV|$ gleich lang. Analog entsteht W durch Faltung durch OP und es ergibt sich $|VP| = |WP|$ sowie $|RV| = |QW|$. Folglich ist ⬠$PWQRV$ ein regelmäßiges Fünfeck. □

4 Konstruktion

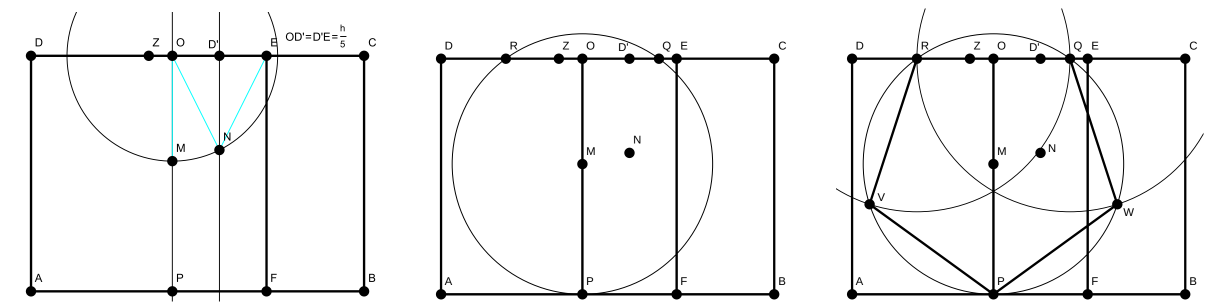
In diesem Abschnitt wird ein Verfahren zum Konstruieren eines regelmäßigen Fünfecks mit vorgegebener Höhe mittels Zirkel und Lineal vorgestellt. Diese Konstruktion ist direkt aus dem vorgestellten Faltverfahren abgeleitet.



(a) Die Konstruktion beginnt mit einem Quadrat $\square AFED$ mit der Seitenlänge h, welches zu einem Rechteck im DIN–A–Format ergänzt wird.

(b) Die Strecke ED wird in fünf gleichgroße Abschnitte geteilt. Es ergeben sich die Punkte O und D'.

(c) Um Z, dem Mittelpunkt von ED, wird ein Kreisbogen mit Radius DZ konstruiert. Sein Schnittpunkt mit der Orthogonalen zu ED durch D' ergibt den Punkt N.



(d) Um O wird ein Kreisbogen mit dem Radius ON konstruiert. Dessen Schnittpunkt mit der Orthogonalen von ED durch O ergibt den Punkt M. P sei der Schnittpunkt dieser Orthogonalen mit AB. Die Hilfslinien für den Beiweis sind farbig dargestellt.

(e) Um M wird ein Kreis konstruiert, welcher den Radius MP besitzt. Die Schnittpunkte des Kreise mit CD ergeben die Punkte R und Q auf CD.

(f) Um R und Q wird jeweils ein Kreis mit dem Radius RQ konstruiert. Die Schnittpunkte mit dem Kreis um M ergeben die Punkte V und W. Es entsteht das Fünfeck ⬠$PWQRV$.

Abbildung 3: Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks

Beweis

Der Konstruktionsschritt in Abbildung 3a dient nicht der Erzeugung des Fünfecks, sondern soll die Analogie zum zuvor beschriebenen Faltverfahren zeigen. Die Seitenlänge des Quadrats sei h. Nach der Konstruktion hat das erzeugte Rechteck ein Format von $1 : \sqrt{2}$ und entspricht einem Blatt im DIN-A-Format.

In Abbildung 3c ist ersichtlich, dass der Satz des Thales angewendet wird. N liegt auf dem Thaleskreis mit Mittelpunkt Z, wodurch das Dreieck ΔDNE rechtwinklig ist. Der Hypotenusenabschnitt $D'E$ hat nach dem Konstruktionsschritt in Abbildung 3b die Länge $\frac{h}{5}$. Damit hat nach dem Kathetensatz die Seite $|EN|$ eine Länge von $\frac{h}{\sqrt{5}}$. Da $D'O$ nach Konstruktionsschritt 3b ebenfalls $\frac{h}{5}$ beträgt, gilt $|EN| = |ON| = |OM|$ nach Konstruktionsschritt 3d. Nach Formel (3) ist M der gesuchte Umkreismittelpunkt des regelmäßigen Fünfecks und P der erste Eckpunkt. Es ergeben sich in Abbildung 3e die Eckpunkte R und Q. Im Konstruktionsschritt 3f erhält man schließlich die Eckpunkte V und W durch das Abtragen der bekannten Seitenlänge. $\square$

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass zur Faltung eines regelmäßigen Fünfecks nicht zwingend von der Eigenschaft des Goldenen Schnittes als Verhältnis innerhalb des Fünfecks Gebrauch gemacht werden muss. Vorteile dieses Faltverfahrens sind

- hohe Effektivität durch den maximalen Flächeninhalt des Fünfecks innerhalb des Papiers,
- Flexibilität durch die Übertragbarkeit des Verfahren auf verschiedene Papierformate,
- gute praktische Realisierbarkeit, da stets nur eine Papierschicht gefaltet wird und somit Faltungenauigkeiten reduziert werden,
- übersichtliche Anzahl von Faltschritten,
- mathematisch bewiesene Korrektheit.

Ein Nachteil ist das Fehlen von Taschen und Laschen zum Zusammenstecken mehrerer Fünfecke zu einem Dodekaeder. Diese können nachträglich gefaltet werden, eine Anleitung ist in [3] zu finden. Durch das Hinzufügen der Taschen und Laschen geht jedoch ein Teil der Effektivität verloren, da sich der Flächeninhalt verkleinert. Ein mögliches Ziel für weitere Arbeiten besteht in der Entwicklung eines Verfahrens, welches ein regelmäßiges Fünfeck mit Taschen und Laschen sowie einem großen Flächeninhalt ergibt.

Literatur

[1] David Brill. *Brilliant Origami*. Japan Publications Trading, 1996.

[2] David Dureisseix. Folding optimal polygons. `http://www.britishorigami.info/academic/polygons.php`, [Stand: 20.11.09], 2009.

[3] Rona Gurkewitz and Bennett Arnstein. *3–D Geometric Origami*. Dover Publications, inc., 1995.

[4] James M. Sakoda. *Origami Flowers*. Dover Publications, inc., 1999.

[5] Diana Todt. *Mathematisches Origami mit speziellen Untersuchungen am regelmäßigen Fünfeck*. Staatsexamensarbeit an der Friedrich–Schiller–Universität Jena, 2009.