MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de Juni 2010

# Drittelung eines DIN A4-Blattes

Michael Schmitz

**Zusammenfassung**

Im Folgenden wird beschrieben wie man ein DIN A4-Blatt längs und quer dritteln kann. Eine dieser Varianten kann helfen, einen Brief so zu falten, dass er in einen länglichen Briefumschlag passt. Dabei spielt eine Eigenschaft des Schwerpunktes in einem Dreieck eine wichtige Rolle.

Auch der Strahlensatz zur Dreiteilung einer Strecke findet Anwendung. Lineare Funktionen helfen bei der Begründung einer Vermutung, die sich beim Falten ergibt.

Im Seminar Mathematik und Origami (Sommersemester 2010) wurde die Frage aufgeworfen, wie man ein DIN A4-Blatt dritteln kann, so dass es gut in einen länglichen Briefumschlag passt.

Der Satz von Haga (vgl. [1]) konnte nur zur Anwendung gebracht werden, wenn das Blatt im Querformat gedrittelt werden soll. Die Bildfolge (Bild 1a - 1g) zeigt das Vorgehen.

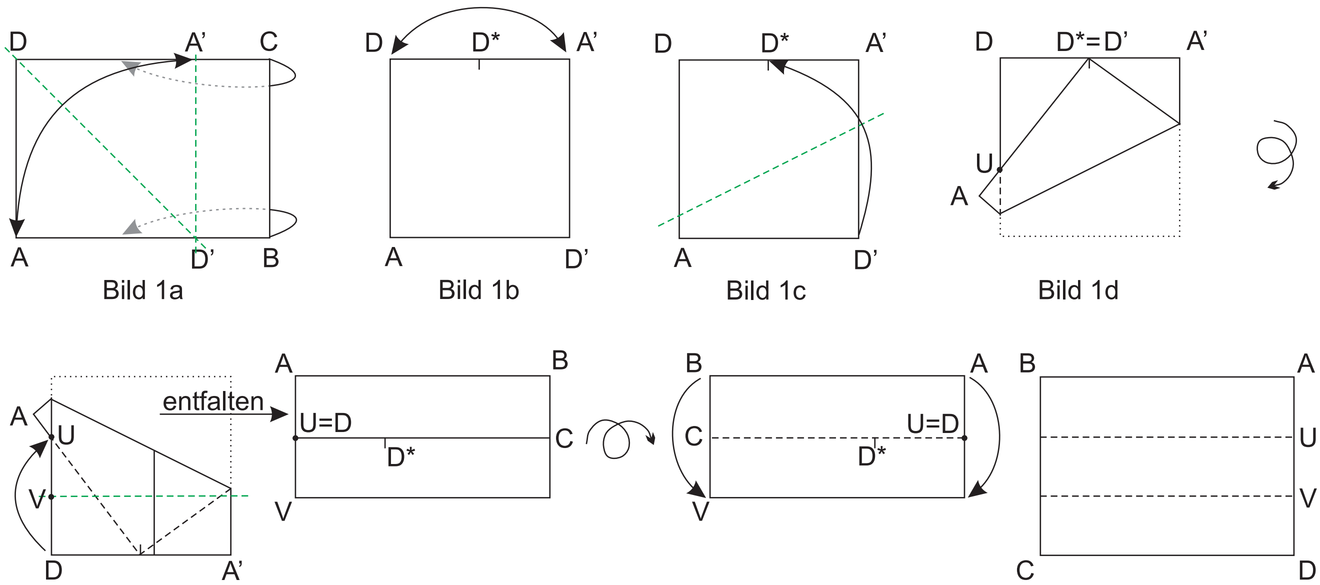


Bild 1a Bild 1b Bild 1c Bild 1d

Bild 1e Bild 1f Bild 1g Bild 1h

Zuerst wird ein Quadrat mit der Seite $AD$ gefaltet. $A'$ und $D'$ sind die neuen Ecken. Dazu wird $BC$ entsprechend nach hinten gefaltet. Dann wird $DA'$ durch Falten halbiert (Mittelpunkt $D^*$) und die Ecke $D'$ auf $D^*$ gefaltet. Die umgefaltete Kante $AD'$ schneidet die Quadratseite $AD$ in $U$. Nach dem Satz von Haga ist $|DU| = \frac{2}{3}|AD|$). Zur praktischen Ausführung wenden wir das Blatt und falten $D$ auf $U$. Die entstehende Faltlinie schneidet $AD$ in $V$. Nun wird das gesamte Rechteck wieder entfaltet und die Faltung $D$ auf $U$ erneuert. Nach nochmaligem Wenden, wird die untere Kante auf die obere gefaltet und das DIN A4-Blatt ist quer gedrittelt.

Als Nächstes lässt sich die Dreiteilung der Strecke $AD$ mit Hilfe des Strahlensatzes auf die lange Rechteckseite $AB$ übertragen (Bilde 2a - 2e).

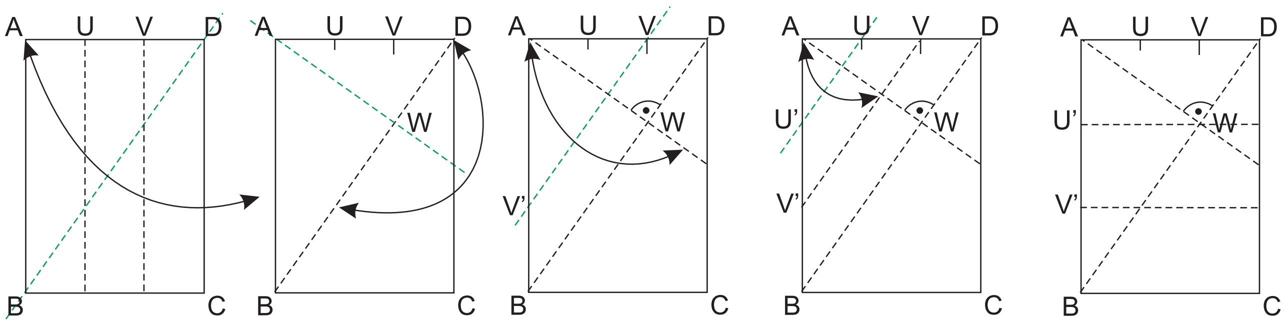


Bild 2a Bild 2b Bild 2c Bild 2d Bild 2e

Dazu legen wir das Blatt im Hochformat vor uns und falten die Faltlinie durch $B$ und $D$. Anschließend falten wir $D$ so auf die Faltlinie $BD$, dass die neue Faltlinie durch $A$ geht. Diese Faltlinie schneidet $BD$ in $W$. Dadurch bilden diese beiden Faltlinien in $W$ einen rechten Winkel. Nun wird A auf $AW$ so gefaltet, dass die Faltlinie durch V geht. Diese Faltlinie ist zu $BD$ parallel und schneidet $BA$ in $V'$. Jetzt wird noch $A$ so auf $AW$ gefaltet, dass die Faltlinie durch $U$ geht. Auch diese Faltlinie ist parallel zu $BD$, schneidet aber $BA$ in $U'$. Aufgrund des Strahlensatzes (mit dem Zentrum $A$) dritteln die Punkte $U'$ und $V'$ die Seite $BA$ des gegebenen DIN A4-Blattes. Es muss nur noch durch diese beiden Punkte parallel zu $BC$ gefaltet werden, um das DIN A4-Blatt in einen langen Briefumschlag zu stecken.

Bemerkt werden soll hier noch, dass diese Faltkonstruktion auch für rechteckiges Papier zu verwenden ist, dass nicht zu einem DIN A4-Blatt ähnlich ist.

Beim Falten des letzten Schrittes (Bild 2e) könnte den Schülern auffallen, dass durch $W$ zwei Drittelungslinien verlaufen. Wenn dies richtig ist, also nicht nur aufgrund von Faltungenauigkeiten so aussieht, könnte man sich das Falten der beiden Parallelen zu $BD$ sparen. Der Punkt $W$ entsteht bereits nach der zweiten Faltung.

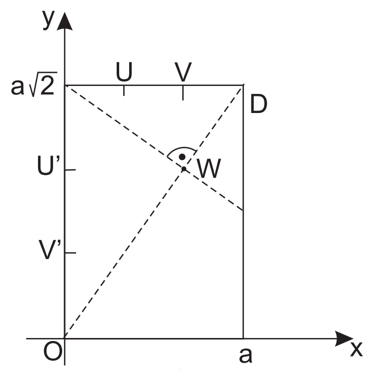


Bild 3

Diese Vermutung soll nun untersucht werden. Eine Möglichkeit besteht in der Anwendung von linearen Funktionen und der Bestimmung der Koordinaten des Punktes $W$.

Dazu legen wir das DIN A4-Blatt in ein Koordinatensystem, wie es im Bild 3 gezeigt ist. Wir setzen voraus, dass die kurze Seite des DIN A4-Blattes die Länge $a$ hat, dann hat die lange Seite die Länge $a \cdot \sqrt{2}$.

Wir berechnen nun die Koordinaten von $W$, indem wir die $W$ erzeugenden Geraden als Graphen von linearen Funktionen auffassen.

Die Gerade durch $O$ und $W$ hat die Gleichung $y = \frac{a\sqrt{2}}{a}x = \sqrt{2}x$.

Die dazu senkrechte Gerade durch $W$ hat die Gleichung
$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + a\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + a\sqrt{2}$.

Durch Gleichsetzen folgt $\sqrt{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + a\sqrt{2}$, woraus sich $x = \frac{2}{3}a$ ergibt. Damit folgt aber $y = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$ und insgesamt $W(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}\sqrt{2}a)$. Folglich gehen die Parallele zur y-Achse durch $V$ und die Parallele zur x-Achse durch $U'$ durch den Punkt $W$.

Dieses Wissen ermöglicht es uns nun eine verkürzte Faltanleitung zum Dritteln der langen Seite eines DIN A4-Blattes anzugeben. Wir brauchen nur eine Drittelungslinie in Querrichtung (mit Hilfe des Satzes von Haga zu falten) und dann eine Diagonale im Rechteck, die beide zusammen den Punkt $W$ ergeben. Nun können wir sofort das DIN A4-Blatt in der Länge dritteln.

Die Drittelung der langen Seite eines DIN A4-Blattes kann auch mit den in der Bildfolge 4a - 4d gezeigten Faltungen erfolgen.

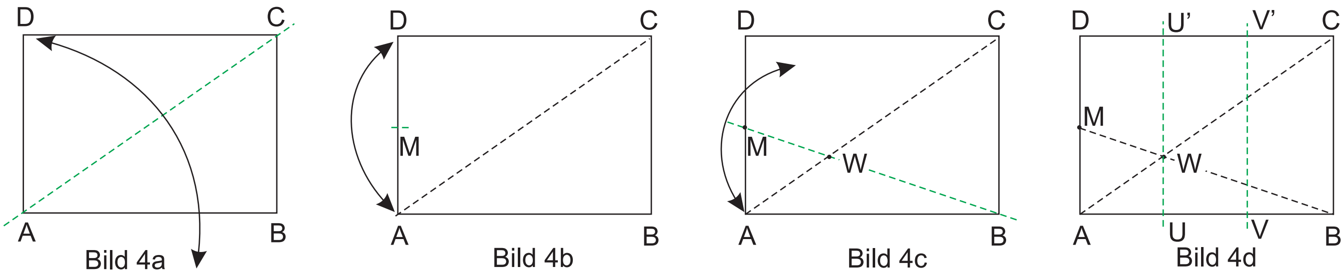


Bild 4a Bild 4b Bild 4c Bild 4d

Zuerst falten wir die Diagonale durch $A$ und $C$, anschließend dem Mittelpunkt $M$ von $AD$. Durch $M$ und $B$ wird eine Faltlinie gefaltet, die $AC$ in $W$ schneidet. Abschließend falten wir die Parallele $UU'$ zu $AD$ durch $W$ und Mittellinie $VV'$ von $UB$. Die letzten beiden Faltlinien $UU'$ und $VV'$ sind die gesuchten Drittelungslinien.

Eine Begründung für die Richtigkeit dieser Faltkonstruktion ist schnell erbracht. Wir müssen nur bedenken, dass $AC$ und $MB$ zwei Geraden sind, die durch den Punkt $W$ gehen und dabei von zwei Parallelen $AM$ und $BC$ geschnitten werden. Weil $|AM| = \frac{1}{2}|BC|$ ist, folgt nach dem Strahlensatz (2.Teil), dass $|WA| = \frac{1}{2}|WC|$ ist. Nun wenden wir noch einmal den Strahlensatz (1.Teil) mit dem Zentrum $A$ an und finden $|AU| = \frac{1}{2}|UB|$. Damit drittelt aber $UU'$ das Rechteck in der Länge.

An dieser Stelle bemerken wir auch, dass die Abmessung des Ausgangsrechtecks keine Rolle bei der Begründung für die Faltkonstruktion gespielt hat. Daher ist diese Faltkonstruktion nicht nur für DIN A4-Papier korrekt, sondern auch für jedes andere rechteckige Papier.

Im Folgenden geben wir eine weitere Möglichkeit an, ein DIN A4-Blatt in der Länge, ohne Umwege zu dritteln (Bild 5a -5h).

Dazu haben wir jetzt das Blatt im Hochformat vor uns liegen und falten zuerst die Mittelsenkrechte von $AB$.

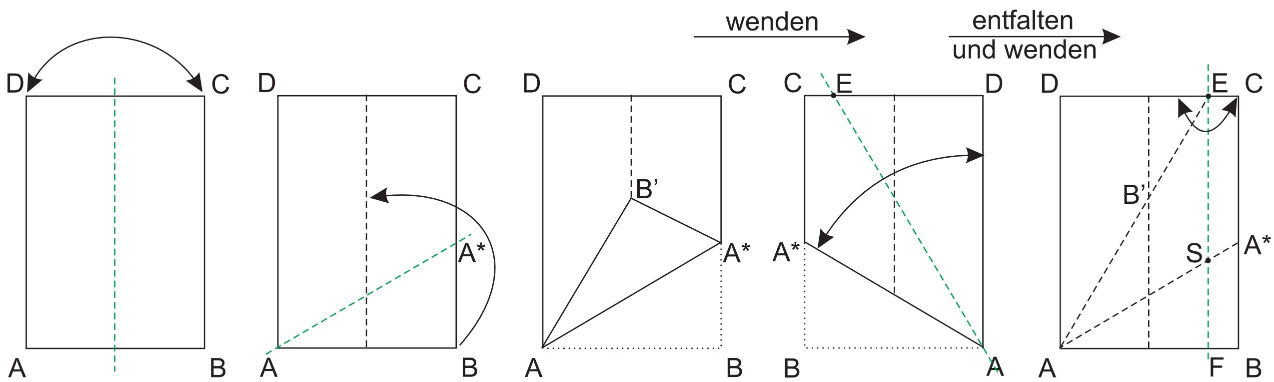


Bild 5a Bild 5b Bild 5c Bild 5d Bild 5e

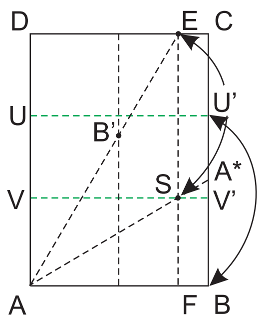


Bild 5f

Nun wird $B$ so auf diese Mittellinie gefaltet, dass die zugehörige Faltlinie durch $A$ geht. $B'$ ist das Bild von $B$ bei dieser Faltung auf der Mittellinie. Diese Faltlinie schneidet $BC$ in $A^*$. Nun wird das Blatt gewendet und $AD$ wird auf $AA^*$ gefaltet. $E$ bezeichnet den Schnittpunkt dieser Faltlinie mit $CD$. Jetzt wird noch die Parallele durch $E$ zu $AD$ gefaltet, die $AB$ in $F$ schneidet. Diese Parallele schneidet $AA^*$ in $S$. Wir falten noch $E$ auf $S$ und erhalten die Faltlinie $UU'$. Zum Abschluss falten wir $B$ auf $U'$ und erhalten die Faltlinie $VV'$, die durch $S$ geht. $UU'$ und $VV'$ sind die gesuchten Drittelungslinien.

Diese Behauptung soll jetzt bewiesen werden.

Durch das Falten von $B$ auf die Mittellinie folgt, dass $|AB| = |AB'|$ ist. Weil $B'$ auf der Mittellinie von $AB$ liegt, folgt ebenfalls $|AB'| = |B'B|$. Demzufolge ist das Dreieck $ABB'$ gleichseitig. Eine Höhe dieses Dreiecks liegt auf $AA^*$, eine andere Höhe auf der Mittellinie von $AB$. Nun strecken wir dieses Dreieck von $A$ aus, so dass $B'$ in $E$ übergeht. Dann ist $EF$ eine Höhe in dem gestreckten Dreieck. Eine weitere Höhe dieses Dreiecks liegt auf $AA^*$. $S$ ist dann auch der Schnittpunkt der Höhen in diesem Dreieck. Da das gestreckte Dreieck natürlich auch wieder gleichseitig ist, und die Höhen im gleichseitigen Dreieck auch die Seitenhalbierenden des Dreiecks sind, ist $S$ der Schwerpunkt des gestreckten Dreiecks. Dieser Schwerpunkt teilt bekanntlich $EF$ im Verhältnis 1 : 2. Daher sind dann $UU'$ und $VV'$ Drittelungslinien im gegebenen DIN A4-Blatt.

# Literatur


[1] Schmitz, Michael: *Der Satz von Haga – eine mögliche Ergänzung und eine Verallgemeinerung.* Mathegami, Juni, 2006.


### Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.