

# MATHEGAMI

## Mathematik - Origami - Unterricht

www.erfolgreichesLernen.de

September 2009

### Der Kolumbus-Würfel

Michael Schmitz

#### Zusammenfassung

In dieser kleinen Abhandlung wird gezeigt, wie ein Würfel mit einer eingestülpten Ecke aus Modulen gefaltet werden kann. Ein solcher Würfel kann auf der 'Spitze' stehen, man kann mehrere solche Würfel übereinander stapeln oder einen Ring aus fünf dieser Würfel zusammenstecken.

Nach der Faltanleitung wird die Oberfläche und des Volumens dieses besonderen Würfels berechnet. Auch der Würfelring wird betrachtet und gezeigt, dass beim 'exakten' Zusammenfügen der fünf Würfel kein geschlossener Ring entsteht.

Zum Abschluss werden noch Würfel mit mehreren eingestülpten Ecken vorgestellt.

Im Folgenden werden wir den Würfel, der bereits in 'Vom Quadrat zum Würfel (Variante 2)' [3] vorgestellt wurde, modifizieren. Nun entsteht ein Würfel mit einer eingestülpten Ecke, wie er im Bild 1 zu sehen ist. Dieser Würfel heißt nach [1] auch Kolumbus-Würfel. Diese Namensgebung erfolgte in Analogie zum Ei des Kolumbus, ein Ei, welches Christoph Kolumbus (1451 - 1506) auf die 'Spitze' gestellt haben soll. Diese Geschichte soll sich 1493 bei einem Festmahl zu Ehren des kühnen Seefahrers zugetragen haben (vgl. [2]). Natürlich saßen auch Neider an der Festtafel, die behaupteten, dass ja jeder andere auch diese Entdeckungsfahrten hätte durchführen können, wenn sie auf diese Idee gekommen wären. Daraufhin stellte Kolumbus den Neidern das einfache Problem, ein Ei auf seine Spitze zu stellen. Kein Gast probierte es oder konnte eine Lösung vorschlagen. Nun setzte Kolumbus das (hart gekochte) Ei kräftig mit der Spitze auf die Tischplatte, wodurch das Ei eingedellt wurde und stehen blieb.



Bild 1

Auch unser Würfel kann in ähnlicher Weise auf einer 'Spitze' stehen. Nur wollen wir diese Spitze nicht mit 'Gewalt' eindellen, sondern die Module, aus denen der Würfel dann zusammengesetzt wird, entsprechend falten, dass eine eingestülpte Ecke entsteht. Wenn man mehrere solche Würfel hat, dann lassen sich diese sogar zu einem Turm übereinander stellen (Bild 2), fünf dieser Würfel zu einem geschlossenen Ring (Bild 3) zusammen legen oder 20 Würfel zu einem größeren Polyeder zusammensetzen (Bild 4). Wir werden anschließend auch untersuchen, ob dieser Ring ein 'exaktes' regelmäßiges Fünfeck ergibt, oder ob der Ring aufgrund kleiner Ungenauigkeiten so gut zusammenpasst.

Nun aber zum Bau des Würfels.

Der Kolumbus-Würfel entsteht aus sechs gleichgroßen Quadraten. Am besten eignen sich verschiedenfarbige, quadratische Faltblätter mit der Kantenlänge von ca. 15 cm. Die Beschreibung erfolgt hier zuerst für ein Blatt und muss für alle sechs Blätter in gleicher Weise durchgeführt werden.

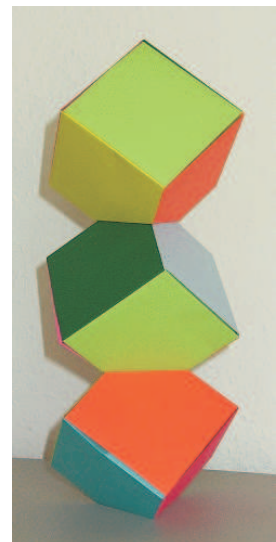


Bild 2



Bild 3

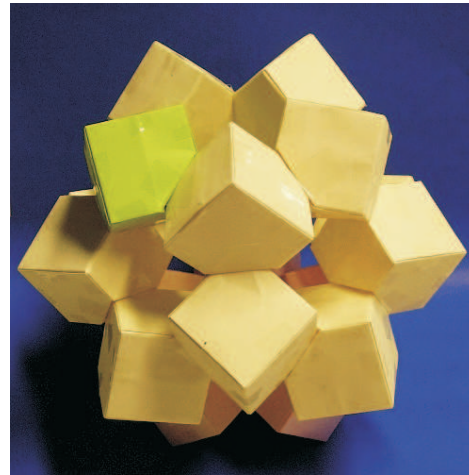


Bild 4

An zwei gegenüberliegenden Seiten des quadratischen Blattes werden mit einem Stift die Seitenmittelpunkte markiert (Bild 5a). Anschließend werden die beiden nicht markierten Kanten an die markierten Mittelpunkte herangefaltet, wodurch das Quadrat zu einem Rechteck wird (Bild 5b). Nun werden die Mittelpunkte der langen Rechteckkanten ebenfalls mit einem Stift markiert. Anschließend faltet man die kurzen Rechteckkanten an die markierten Mittelpunkte heran, sodass nun ein kleineres Quadrat entsteht (Bild 5c). Die zuletzt umgefalteten Teile werden senkrecht aufgerichtet, sodass ein 'u-förmiges' Modul entsteht (Bild 5d).

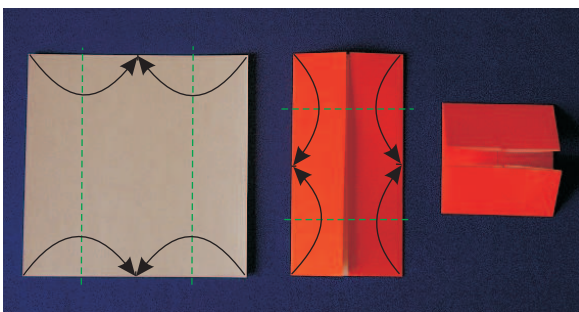


Bild 5a

Bild 5b

Bild 5c

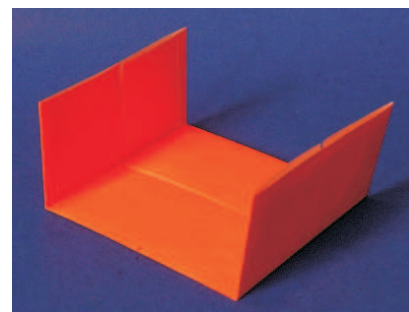


Bild 5d

Hat man sechs solche Module gefaltet, werden drei zur Seite gelegt. Die anderen drei werden weiter bearbeitet. Auch hier zeigen wir nur die Bearbeitung eines Moduls, da die anderen beiden wieder analog gefaltet werden.

Von dem u-förmigen Modul werden die senkrecht nach oben stehenden Laschen nach außen gelegt, sodass wieder ein Rechteck mit zwei zusätzlichen Faltnlinien entsteht (Bild 6a). Die rechte obere Ecke dieses Rechtecks wird zum Mittelpunkt der linken Kante hin umgefaltet. Der nächste Schritt ist etwas schwierig.

Von dem eben umgefalteten Dreieck wird im 1. Schritt die linke untere Ecke auf die Mittelpunktmarkierung der rechten Rechteckseite gelegt (Bild 6b). Dabei wird fast gleichzeitig die obere Dreiecksecke auf die Mittelpunktmarkierung der linken Kante gelegt. Dadurch entsteht im rechten, oberen Teil eine innenliegende Falte und insgesamt ein 'hausähnliches' Fünfeck. Alle Kanten müssen nun gut und kräftig gefalzt werden. Das fertig gefaltete Teil zeigt Bild 6c. Abschließend werden der obere und der untere Teil des Fünfecks wieder senkrecht nach oben gestellt. Die Bilder 6d und 6e zeigen das fertige Modul aus zwei verschiedenen Blickrichtungen.

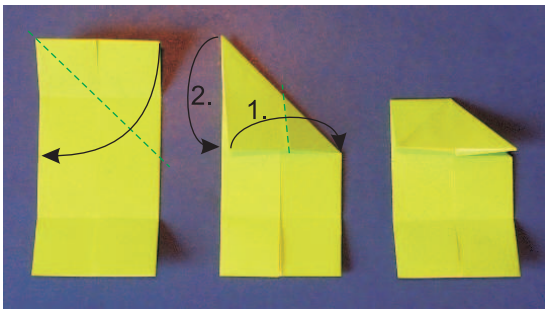


Bild 6a

Bild 6b

Bild 6c

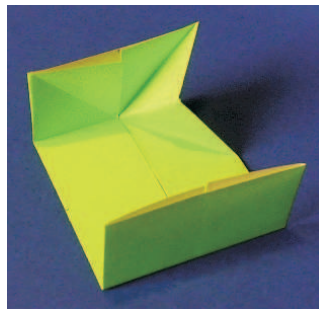


Bild 6d

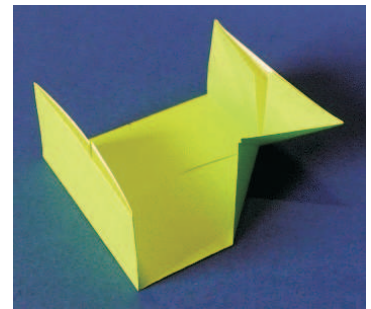


Bild 6e

Nun werden zuerst die drei zuletzt gefalteten 'Eck-Module' zusammengesetzt. Dieser Zusammenbau lässt sich aus den Bildern 7a bis 8b entnehmen.

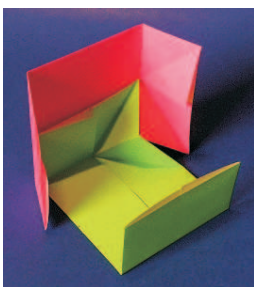


Bild 7a

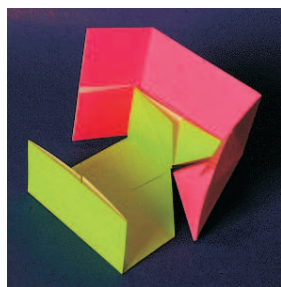


Bild 7b

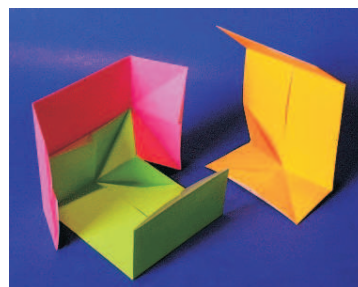


Bild 8a

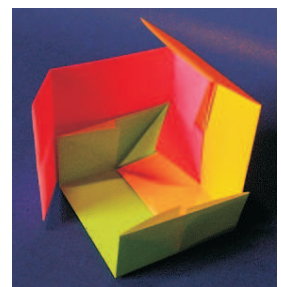


Bild 8b

Anschließend werden zwei der restlichen drei u-förmigen Module entsprechend der Bilder 9a und 9b bzw. 10a und 10b hinzugefügt.

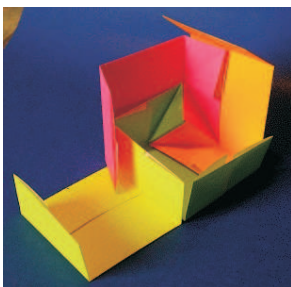


Bild 9a

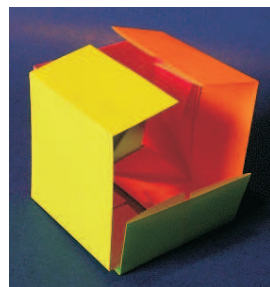


Bild 9b

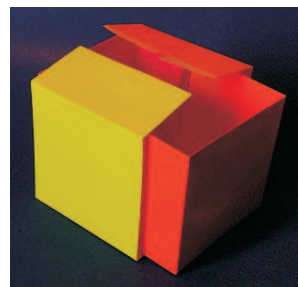


Bild 10a

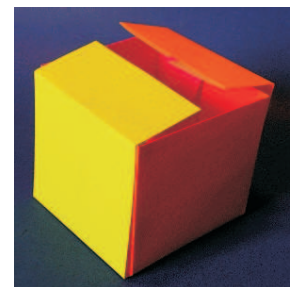


Bild 10b

Abschließend wird noch das letzte u-förmige Modul von oben eingesetzt, wie es in den Bildern 11a und 11b zu sehen ist. Nun muss der Würfel nur noch umgedreht werden, damit wir die eingestülpte Ecke sehen können (Bild 12).

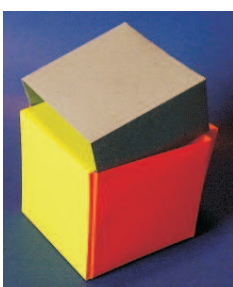


Bild 11a

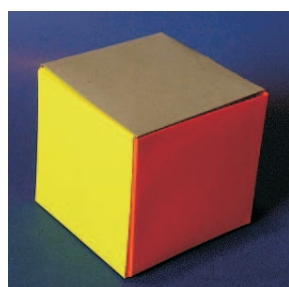


Bild 11b

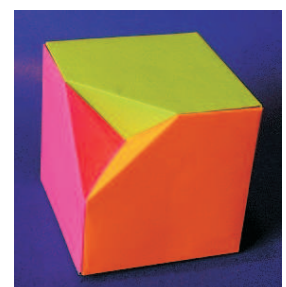


Bild 12

Jetzt sehen wir uns den Kolumbus-Würfel etwas genauer an. Er entsteht aus dem Würfel ABCDEFGH, bei dem die Ecke E nach innen gestülpt wurde. S ist die innere Ecke des Kolumbus-Würfels wie es im Bild 13 gezeigt ist.

Aufgrund der Faltung des Eck-Moduls ergibt sich, dass  $|EU| = |EV| = |EW| = \frac{a}{2}$  ist, wenn a die Kantenlänge des Ausgangswürfels bezeichnet. Damit können wir das Volumen der, vom Würfel abgeschnittenen Pyramide UVWE berechnen:  $V_P = \frac{1}{3}A_G \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}) \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{48}a^3$ .

Weil die abgeschnittene Pyramide UVWE kongruent zu der nach innen gestülpten Pyramide UVWS ist, ergibt sich für das Volumen des Kolumbus-Würfels:  $V_K = a^3 - 2 \cdot V_P = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{48}a^3 = \frac{23}{24}a^3$ .

Die Oberfläche  $A_K$  des Kolumbus-Würfels verändert sich gegenüber der des Ausgangswürfels nicht und beträgt demzufolge  $A_K = 6a^2$ .

Mit dem Wert von  $V_P$  können wir auch die Höhe  $|EL| = h_P$  der Pyramide UVWE bezüglich der Grundfläche UVW berechnen. Dabei bezeichnet L den Schnittpunkt von CE mit UVW. Weil  $V_P = \frac{1}{3}|UVW|h_P$  ist, folgt mit  $|UVW| = \frac{1}{2} \cdot |UV| \cdot |UW| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot (\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{8}\sqrt{3}$ , nun  $\frac{1}{48}a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8}\sqrt{3} \cdot h_P$ . Damit ergibt sich  $h_P = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{6} \cdot |CE|$ , und damit ist die Höhe  $h_P$  der Pyramide UVWE genau ein Sechstel der Raumdiagonalen  $|CE|$  des Ausgangswürfels.

Weil S auf der Raumdiagonalen CE des Ausgangswürfels liegt und L die Strecke ES halbiert, ist  $|ES|$  ein Drittel der Raumdiagonalen  $|CE|$ .

Außerdem ist UVW senkrecht zu CE.

Aus der Kongruenz der Pyramiden UVWE und UVWS folgt auch, dass die drei nach innen gehenden Dreiecksflächen paarweise senkrecht aufeinander stehen. Folglich passt in die eingestülpte Ecke des Kolumbus-Würfels eine Ecke eines normalen Würfels exakt hinein. Daher können wir, wie im Bild 2 schon gezeigt wurde, mehrere Kolumbus-Würfel übereinander stapeln.

Auch ein Würfelring, wie er im Bild 3 gezeigt ist, lässt sich aus fünf Kolumbus-Würfeln zusammensetzen. Diesen Würfelring werden wir nun etwas genauer untersuchen.

Zum Zusammenbau des Würfelringes wird ein Kolumbus-Würfel, wie er im Bild 13 gezeigt ist, um die Kante AD um  $45^\circ$  gekippt (Bild 14). Ein zweiter solcher Würfel wird ebenfalls um eine Kante gekippt und in die nach innen gestülpte Ecke eingefügt. Im Bild 15 ist diese Situation dargestellt.

Die restlichen drei Würfel werden entsprechend eingefügt, sodass der Würfelring entsteht.

Bild 16a zeigt einen solchen Ring von oben, Bild 16b die schematische Darstellung dieser Situation. Im Bild 16b ist auch das Fünfeck eingezeichnet, das durch die fünf Kolumbus-Würfel gebildet wird. Wenn alles exakt zusammenpasst, dann muss dieses Fünfeck regelmäßig sein. Insbesondere muss dann der eingezeichnete Winkel  $\varphi$  am Schnittpunkt S die Größe von  $72^\circ$  haben. Dieser Winkel stimmt natürlich mit dem zweiten, im Bild 16b eingezeichneten Winkel

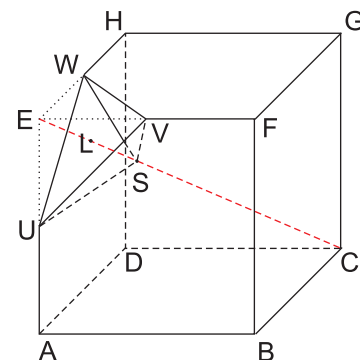


Bild 13

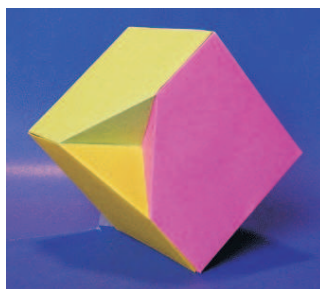


Bild 14

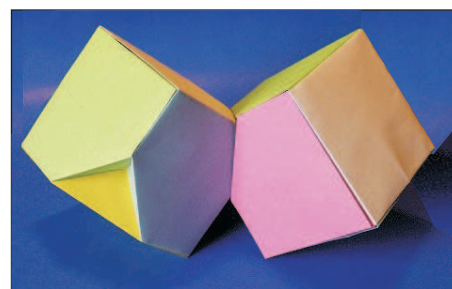


Bild 15

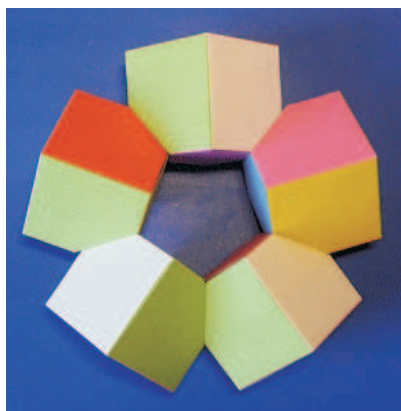


Bild 16a

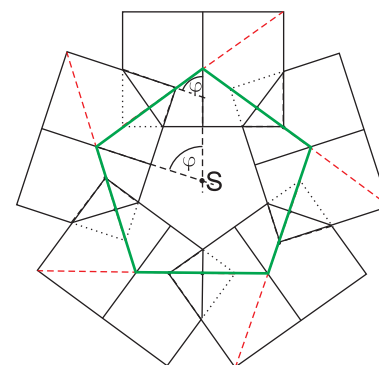


Bild 16b

$\varphi$  überein, weil die Schenkel des Winkels  $\varphi$  in S parallel zu den Schenkeln des zweiten Winkels sind. Bild 17 zeigt die senkrechte Projektion des gekippten Kolumbus-Würfels in die Grundebene.

Wir werden nun die Größe des Winkels  $\varphi$  berechnen.

Dazu bedenken wir zuerst, dass  $|ES| = \frac{1}{3}|EC|$  ist (Bild 13). Demzufolge ist in der senkrechten Parallelprojektion dieses Würfels in der, um AD um  $45^\circ$  gekippten Lage (Bild 17) auch  $|E'S'| = \frac{1}{3}|E'C'|$ . Bezeichnen wir noch den Lotfußpunkt von S' auf E'B' mit Q', so ist  $S'Q' \parallel B'C'$ , und mit dem Strahlensatz folgt  $|S'Q'| = \frac{1}{3}|B'C'| = \frac{1}{3}a$  und  $|E'Q'| = \frac{1}{3}|E'B'| = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$ .

Weil auch  $S'Q' \parallel E'W'$ ,  $\frac{|E'W'|}{|S'Q'|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{3}{2}$  und ebenso  $\frac{|E'B'|}{|Q'B'|} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$  ist, folgt mit der Umkehrung des Strahlensatzes, dass die Gerade durch W' und S' auch durch B' gehen muss.

Damit ergibt sich  $\tan \angle E'B'W' = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ , also  $|\angle E'B'W'| \approx 19,471...^\circ$ . Weil  $|\angle E'B'C'| = 90^\circ$  ist, ist auch  $|\angle W'B'C'| = \varphi$ . Daraus folgt aber sofort, dass  $\varphi \approx 70,658...^\circ$  ist. Damit ist aber sofort klar, dass die fünf Kolumbus-Würfel keinen 'echten' Fünfeckring bilden.

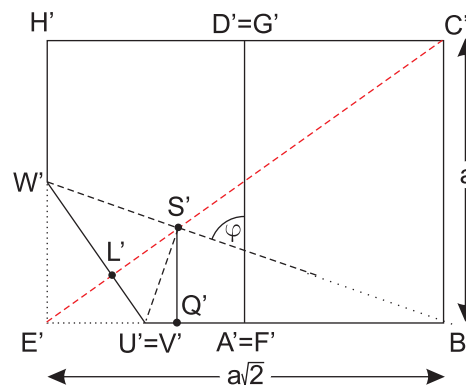


Bild 17

Wenn man die fünf Kolumbus-Würfel nacheinander 'exakt' zusammenstecken würde, dann würde zwischen dem fünften und dem ersten Kolumbus-Würfel eine kleine Lücke klaffen.

Damit ist auch klar, dass das im Bild 4 gezeigte, aus 20 Kolumbus-Würfeln zusammengesetzte Polyeder, nicht 'exakt' zusammenpassen kann. Trotzdem sieht es gut aus und die 20 Würfelmittelpunkte bilden (fast) die Ecken eines regelmäßigen Dodekaeders.

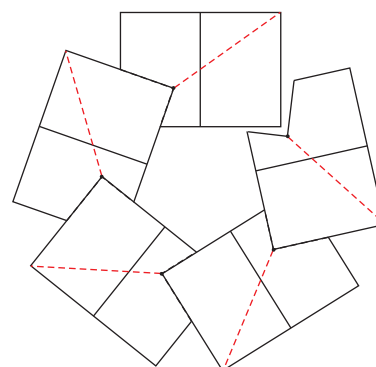


Bild 18

Natürlich kann man auch einen Würfel mit zwei gegenüberliegenden eingestülpten Ecken falten. Dazu müssen die drei, bisher nicht weiter verarbeiteten u-förmigen Teile entsprechend der drei anderen Eck-Module gefaltet werden. Zu beachten ist dabei, dass dabei spiegelbildlich gefaltet werden muss, wie es im Bild 19a gezeigt ist. Links sieht man ein Eck-Modul der ersten Serie und links ein spiegelbildlicher Eck-Modul, von denen auch drei Stück gebraucht werden, um die gegenüberliegende eingestülpte Ecke zu erzeugen. Bild 19b zeigt den fertigen Würfel.

Im Bild 20 ist ein Würfel zu sehen, in dem zwei nebeneinander liegende Ecken eingestülpt sind.

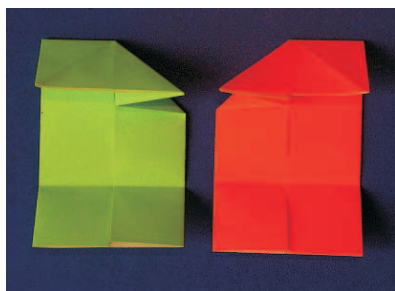


Bild 19a

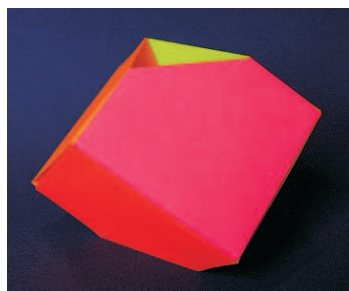


Bild 19b

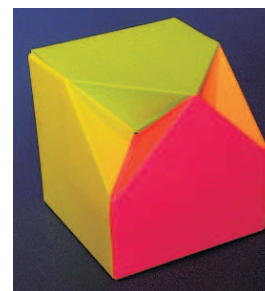


Bild 20

Natürlich kann man auch alle Ecken eines Würfels einstülpen. Dazu benötigt man sechs gleiche Module, die nach der gleichen Faltanleitung, die in Bildern 6a bis 6e gezeigt ist, entstehen. Jedes Modul wird dabei nur an allen vier Ecken gefaltet.

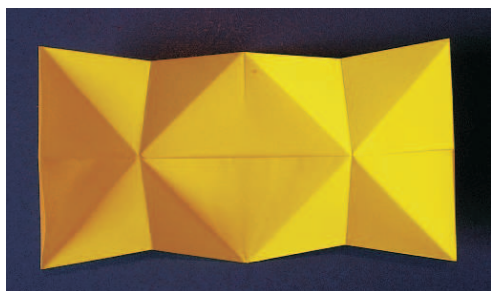


Bild 21a



Bild 21b

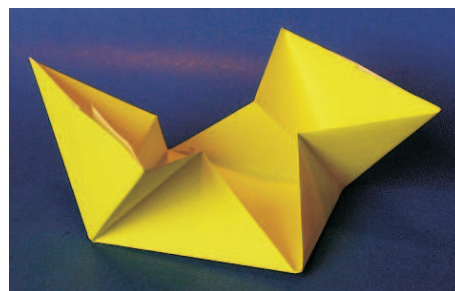


Bild 21c

Bild 21a zeigt das fertige Faltmuster. In den Bildern 21b und 21c ist ein fertiges Modul in zwei verschiedenen Lagen zu sehen. Bild 22 zeigt schließlich den fertigen Körper.

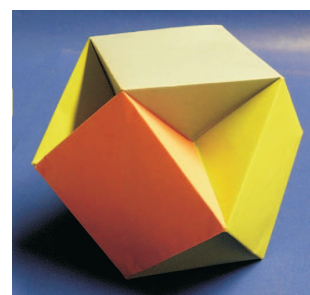


Bild 22

## Literatur

- [1] Mitchell, D.: *Mathematical Origami - Geometrical shapes by paper folding*. Tarquin Publications, 2003.
- [2] Niese, G.: *100 Eier des Kolumbus*. Kinderbuchverlag Berlin (4.Auflage).
- [3] Schmitz, M.: *Vom Quadrat zum Würfel (Variante2)*. Mathegami.

## Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite [www.erfolgreichlernen.de](http://www.erfolgreichlernen.de) findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail ([michael.schmitz@uni-jena.de](mailto:michael.schmitz@uni-jena.de)) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.