MATHEGAMI
Mathematik - Origami - Unterricht

www.erfolgreichesLernen.de September 2009

Ein Päckchen
– geometrische Betrachtungen –

Michael Schmitz

Zusammenfassung
Es wird gezeigt, wie man aus einem quadratischen Faltpapier ein ‘Päckchen’ faltet. Dieses Päckchen ist ebenfalls eine quadratische Figur. Außerdem wird gezeigt, dass der Flächeninhalt des Päckchens genau $\frac{1}{3}$ des Flächeninhaltes des Ausgangsquadrates ist. Dabei werden Faltlinien mit Hilfe von Geradengleichungen beschrieben.
Varianten dieser Faltung führen zu weiteren Fragestellungen.

In [1] wird beschrieben, wie man aus einem quadratischen Papier eine Figur, die sich ‘Päckchen’ nennt, falten kann. Im Bild 5a ist die fertige Figur als Foto zu sehen.

Begonnen wird, indem man das Ausgangsquadrat ABCD parallel zu den Kanten in insgesamt 16 kleine, gleichgroße Quadrate durch Falten einteilt, so wie es im Bild 1 gezeigt ist.

Etwas komplizierter ist der zweite Schritt. Bezeichnet man den Mittelpunkt des Quadrates mit M und den Mittelpunkt von AB mit N, dann wird nun so gefaltet, dass nach dem Umfalten der Punkt N auf der ersten parallelen Faltline über AB zu liegen kommt und die umgefaltete Quadratkante durch M geht. Bild 2 zeigt dieses Vorgehen.

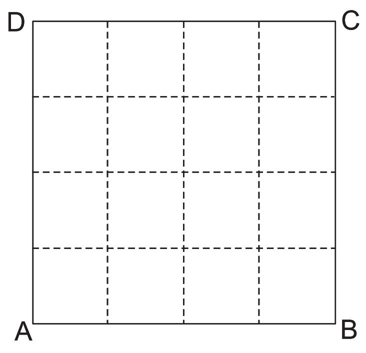

Bild 1

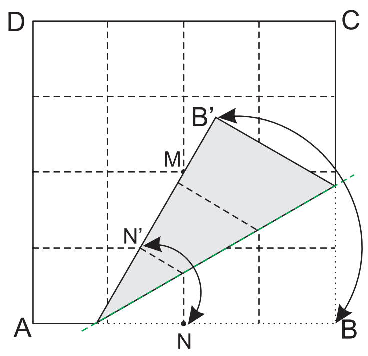

Bild 2

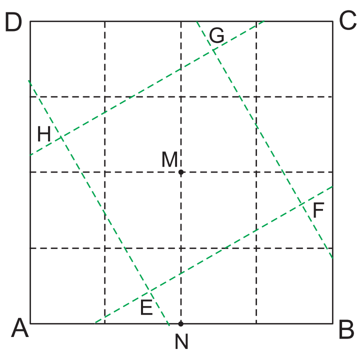

Bild 3

Anschließend faltet man dieses Dreieck wieder auf und wiederholt diesen Vorgang auch für die anderen drei Quadratseiten. Im Bild 3 sind die entstandenen vier Faltlinien zu sehen.

Jetzt wird das Dreieck mit der Ecke B entsprechend der zugehörigen Faltlinie umgefaltet. Anschließend das Dreieck mit der Ecke C, wobei auch Teile des vorgehenden Dreiecks mit gefaltet werden. Nun wird das Dreieck mit der Ecke D ebenso gefaltet und zum Schluss das Dreieck mit der Ecke A.

Damit es tatsächlich ein Päckchen wird, wird die umgefaltete Ecke A unter das gefaltete Dreieck mit der Ecke B geschoben. Dabei muss auch das kleine Dreieck, welches in der linken unteren Ecke entstanden ist, entgegengesetzt gefaltet werden. Bild 4 zeigt die fertige Figur, Bild 5a ein Foto.

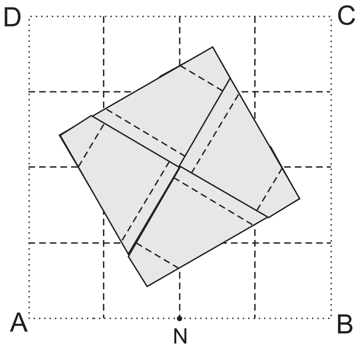

Bild 4

Bild 5a

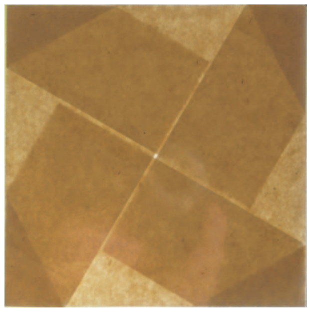
Bild 5b

Man erkennt leicht, dass das Päckchen wieder ein Quadrat ist. Die Faltlinien, die in Bild 3 zu sehen sind, gehen durch Drehung um 90^0 auseinander hervor, und sind damit senkrecht zueinander. Aus dieser Drehsymmetrie ergibt sich auch die gleiche Seitenlänge der vier Kanten.

Im Bild 5b ist ein Durchlichtfoto dieses Päckchens gezeigt, das aus transparentem Papier gefaltet wurde. Man erkennt dort verschiedene Bereiche mit unterschiedlicher Anzahl von Papierschichten, die übereinander liegen. So sind es bei den Dreiecken, die in der Mitte einer Kante liegen, zwei Papierschichten, bei den Trapezen im Inneren drei Papierschichten und schließlich bei den Dreiecken in den Ecken vier Papierschichten.
Bei der Betrachtung dieses Fotos kann man vermuten, dass die Dreiecke in den Ecken kongruent zu den an den Kanten sind. Somit wäre das Päckchen durch drei Papierschichten bedeckt. Daraus ergibt sich aber sofort, dass der Flächeninhalt des Päckchens $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des Ausgangsquadrates ist.
Diese Vermutung soll im Folgenden bewiesen werden.

Ein erstes Problem in diesem Zusammenhang ist das Falten des Punktes N auf die erste parallele Faltlinie über AB, sodass die umgefaltete Quadratkante durch M geht. Kann dieses ‘Einpassen’ auch mit Zirkel und Lineal konstruktiv nachvollzogen werden? Oder handelt es sich, wie bei der Dreiteilung eines Winkels [2] bzw. der Verdopplung eines Würfels [3], um Faltoperationen, die nicht mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden können?

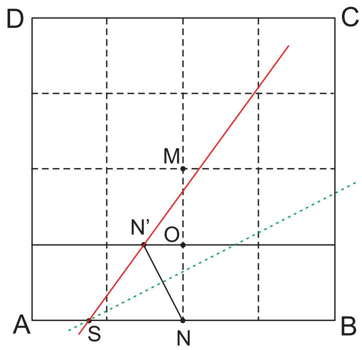

Bild 6

Um dieses Problem zu klären, kann man auf der ersten parallelen Faltlinie über AB einen beliebigen Punkt N’ markieren. Außerdem bezeichnet man den Schnittpunkt der betrachteten Faltline mit der dazu Senkrechten durch M mit O. Nun verbindet man N mit N’ und konstruiert dazu die Mittelsenkrechte.
Ist N’≠O so bestimmt die Mittelsenkrechte m von NN’ auf AB (oder deren Verlängerung) einen Punkt S. Nun wird noch S mit N’ verbunden (Bild 6).
Ist N’=O, dann ist die Mittelsenkrechte m von NN’ parallel zu AB und folglich gibt es keinen Punkt S auf AB.

Diese Konstruktion entspricht gerade dem Umfalten eines Dreiecks mit der Ecke B, sodass N auf der ersten Faltline über AB zu liegen kommt und man mit einem Stift die umgefaltete Quadratseite auf dem Ausgangsquadrat nachzeichnet. Diese Linie geht in der Regel nicht durch M. Es empfiehlt sich daher mit weiteren Punkten N’ auf der ersten parallelen Faltlinie über AB zu experimentieren. Das Ergebnis mehrere solcher Faltungen ist im Bild 7 zu sehen. Aufgrund dieses Bildes entsteht die Vermutung, dass die eingezeichneten Linien Tangenten an den Halbkreis mit dem Mittelpunkt N sind, der durch O geht.
Die Richtigkeit dieser Vermutung soll nun nachgewiesen werden. Dazu wird (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) festgelegt, dass das Ausgangsquadrat eine Seitenlänge von 4 LE hat, die parallelen Faltlinien haben demzu-

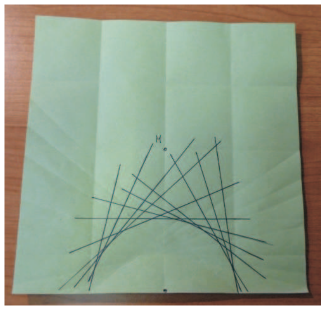
Bild 7

folge einen Abstand von 1 LE voneinander. Außerdem wird das Quadrat in ein Koordinatensystem gelegt, wie es im Bild 8 zu sehen ist. Um zu zeigen, dass die Gerade durch S und N' Tangente an den Kreis um N durch O ist, betrachtet man das Lot von N auf diese Gerade. Bezeichnet L den zugehörigen Lotfußpunkt, dann muss $|NL| = 1$ gezeigt werden.

Weil L auf SN' liegt, muss es auf SN einen Punkt L* so geben, dass L das Bild von L* bei der Spiegelung an der Faltlinie m ist. Weil NL⊥SN' ist, ist auch N'L*⊥AB. Demzufolge ist $|N'L^*| = 1$ und damit gilt auch $|NL| = 1$. Damit ist aber die Gerade durch S und N' tatsächlich eine Tangente an den Kreis um N durch O. Folglich kann man die oben beschriebene Faltkonstruktion auch mit Zirkel und Lineal durchführen. Den gesuchten Punkt N' findet man, indem man die Tangenten von M an den Kreis um N durch O konstruiert.

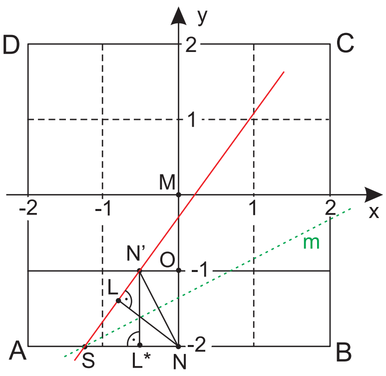

Bild 8

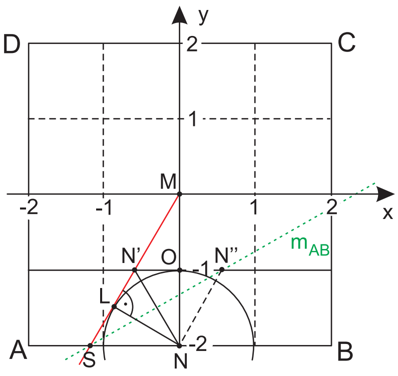

Bild 9

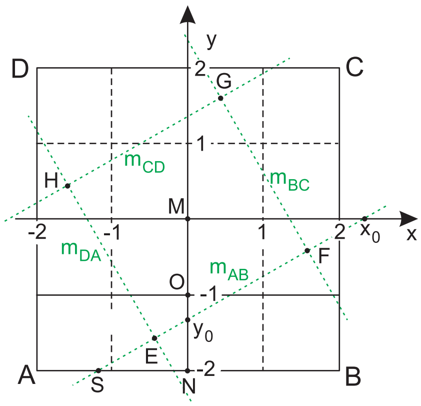

Bild 10

Im Folgendem soll die Gleichung der Faltlinie m_{AB} bestimmt werden, die entsteht, wenn N auf die erste parallele Faltlinie über AB so gefaltet wird, dass die umgefaltete Quadratkante AB durch M geht (Bild 9). Nach den vorhergehenden Überlegungen ist die Gerade durch SM Tangente an den Kreis um N durch O. m_{AB} ist die Mittelsenkrechte von NN' und schneidet die erste parallele Faltlinie über AB im Punkt N".

Zuerst wird die x-Koordinate von S bestimmt. Dazu berechnet man zuerst im rechtwinkligen Dreieck LNM mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Länge der Seite LM: $|LM| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Mit dem Höhensatz ergibt sich im Dreieck SNM: $|LS| \cdot \sqrt{3} = 1^2$, also $|LS| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Damit erhält man $|SM| = |LM| + |LS| = \sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Nun kann man im rechtwinkligen Dreieck SNM die Länge von SN berechnen:

$|SN| = \sqrt{|SM|^2 - |NM|^2} = \sqrt{(\frac{4}{3}\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Damit ergeben sich die Koordinaten des Punktes S: $S(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; -2)$.

Für die Koordinaten von N' erhält man mit dem Strahlensatz (Zentrum in M): $N'(-\frac{1}{3}\sqrt{3}; -1)$.

Außerdem kann man feststellen, dass das Dreieck SNM ein 'halbes' gleichseitiges Dreieck ist ($|SN| = \frac{1}{2}|SM|$), woraus insbesondere auch $|\sphericalangle MSN| = 60^0$ folgt.

Um nun die Gleichung von m_{AB} zu bestimmen bedenken wir, dass diese Gerade durch S geht und senkrecht zu NN' ist.

Da die Gerade durch N und N' den Anstieg $-\sqrt{3}$ hat, muss m_{AB} den Anstieg $-\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ haben.

m_{AB} hat also die Gleichung: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x + y_0$, wobei y_0 die Stelle angibt, bei der m_{AB} die y-Achse schneidet. Bedenkt man nun noch, dass die Koordinaten von S diese Gleichung erfüllen müssen, so erhält man: $-2 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot (-\frac{2}{3}\sqrt{3}) + y_0$, woraus $y_0 = -\frac{4}{3}$ folgt.

Also gilt m_{AB}: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x - \frac{4}{3}$.

Bestimmt man nun noch die Nullstelle x_0 von m_{AB}, so erhält man: $x_0 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Als nächstes werden die Gleichungen der drei anderen Faltlinien m_{BC}, m_{CD} und m_{DA} bestimmt (Bild 10).

m_{CD} ist parallel zu m_{AB} und liegt symmetrisch zu m_{AB} bezüglich M. Folglich gilt m_{CD}: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot x + \frac{4}{3}$.

m_{BC} ist gegenüber m_{AB} um 90^0 um M gedreht. Die Nullstelle von m_{AB} mit der y-Achse wird zur Schnittstelle von m_{BC} mit der y-Achse und die Schnittstelle von m_{AB} wird zur Nullstelle von m_{BC}. Damit erhält man sofort m_{BC}: $y = -\sqrt{3} \cdot x + \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

m_{DA} ist bezüglich M symmetrisch zu m_{BC} und parallel zu m_{BC}. Damit ergibt sich die Gleichung von m_{DA}: $y = -\sqrt{3} \cdot x - \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Die vier Faltlinien bilden ein Quadrat EFGH.
Zum Abschluss wird nun die Seitenlänge dieses Quadrates berechnet. Dazu werden die Koordinaten der Schnittpunkte E und F und anschließend die Länge der Strecke EF bestimmt.

E erhält man als Schnittpunkt der beiden Geraden m_{DA} und m_{AB}. Mit dem Gleichsetzungsverfahren erhält man
$\frac{1}{3}\sqrt{3}x_E - \frac{4}{3} = -\sqrt{3}x_E - \frac{4}{3}\sqrt{3}$, woraus

$(\frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3})x_E = -\frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{4}{3}$ und schließlich

$\frac{4}{3}\sqrt{3}x_E = \frac{4}{3}(1 - \sqrt{3})$ folgt. Daraus ergibt sich $x_E = \frac{1}{3}\sqrt{3} - 1$.

Wird dieser Wert z.B. in m_{AB} eingesetzt, so erhält man $y_E = -\frac{1}{3}\sqrt{3} - 1$.

Insgesamt ergibt sich für den gesuchten Schnittpunkt $E(\frac{1}{3}\sqrt{3} - 1; -\frac{1}{3}\sqrt{3} - 1)$.

F erhält man als Schnittpunkt der beiden Geraden m_{BC} und m_{AB}. Analog bestimmt man mit dem Gleichsetzungsverfahren $F(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1; \frac{1}{3}\sqrt{3} - 1)$.

Nun kann die Länge der Strecke EF mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Es gilt

$|EF| = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$, also

$|EF| = \sqrt{[(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1) - (\frac{1}{3}\sqrt{3} - 1)]^2 + [(\frac{1}{3}\sqrt{3} - 1) - (-\frac{1}{3}\sqrt{3} - 1)]^2} = \sqrt{2^2 + (\frac{2}{3}\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Für den Flächeninhalt F_{EFGH} des Vierecks EFGH ergibt sich $F_{EFGH} = |EF|^2 = \frac{16}{3}$.

Weil $F_{ABCD} = |AB|^2 = 4^2 = 16$ ist, erhält man sofort $F_{EFGH} = \frac{1}{3}F_{ABCD}$, was gezeigt werden sollte.

Damit ist der Flächeninhalt des Päckchens tatsächlich $\frac{1}{3}$ des Flächeninhaltes des Ausgangsquadrates. Der Nachweis wurde mit rechnerischen Mitteln geführt, indem die Gleichungen der zugehörigen Faltlinien bestimmt wurden. Mit Hilfe dieser Gleichungen wurden anschließend die Koordinaten der entsprechenden Eckpunkte des Päckchens berechnet. Damit gelang der Beweis der vermuteten Flächeneigenschaft.

Schön wäre es auch, wenn man einen elementargeometrischen Beweis für diese Flächeneigenschaft angeben könnte.

Varianten

Das Falten eines solchen Päckchens kann natürlich auch variiert werden. Drei Möglichkeiten werden hier angegeben.

Das quadratische Ausgangspapier wird wie im Bild 1 in 16 kleine Quadrate durch Falten eingeteilt. Anschließend werden die äußeren Quadrate noch einmal durch Falten halbiert. Die zugehörigen Faltlinen sind im Bild 11 zu sehen. Nun wird wieder der Mittelpunkt N von AB so auf die erste parallele Faltlinie über AB gefaltet, dass die umgefaltete Quadratkante durch dem Mittelpunkt M des Quadrates geht (Bild 12). Wird diese wieder für alle vier Quadratseiten durchgeführt und anschließend die Dreiecke wieder der Reihe nach umgefaltet, so entsteht ein neues, größeres Päckchen. Bild 13 zeigt ein Foto der fertigen Figur.

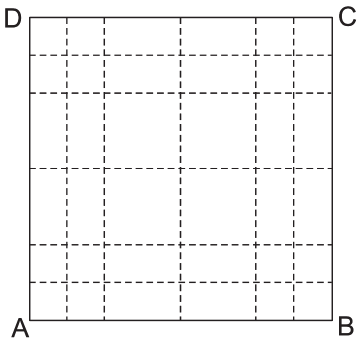

Bild 11

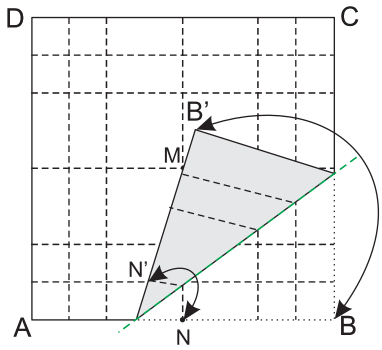

Bild 12

Bild 13

Auch hier kann man fragen, wie sich der Flächeninhalt dieses Päckchens zum Ausgangsquadrat verhält.

Eine andere Möglichkeit zur Variation besteht darin, dass man sich ein Teilverhältnis λ $(0 < \lambda < 1)$ vorgibt und zwischen H und O einen Punkt N' so festlegt, dass $\frac{|HN'|}{|HO|} = \lambda$ gilt. Dem Bild 14 kann die Bezeichnung der Punkte entnommen werden. Faltet man nun so, dass N auf N' zu liegen kommt (Bild 15), so erhält man ein weiteres Päckchen, wenn man diese Faltung analog an allen Quadratkanten durchführt. Im Bild 16 ist wieder ein Foto eines solchen Päckchens mit $\lambda = \frac{1}{2}$ zu sehen.

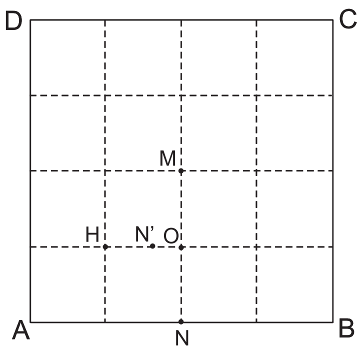

Bild 14

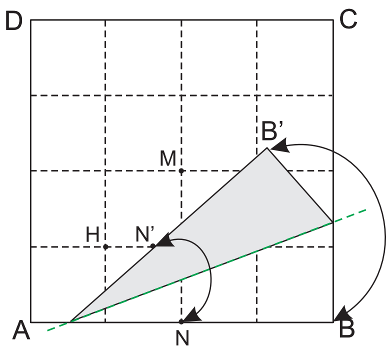

Bild 15

Bild 16

Hier könnte man z.B. die Frage nach dem λ stellen, für das die Fläche dieses Päckchens halb so groß ist wie die des Ausgangsquadrates.

Auch kann das quadratische Faltpapier durch rechteckiges ersetzt werden, wie es in den Bildern 17, 18 und 19 gezeigt ist.

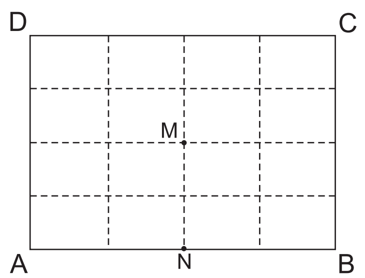

Bild 17

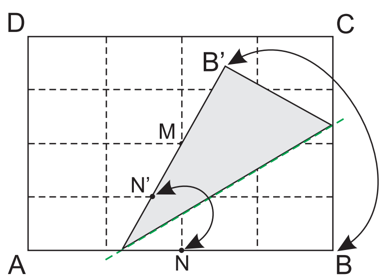

Bild 18

Bild 19

Analog kann nach der Größe des rechteckigen Päckchens im Vergleich zum Ausgangsrechteck gefragt werden. Im Foto (Bild 19) ist ein rechteckiges Päckchen zu sehen, welches aus einem DIN A5-Blatt gefaltet wurde. Wie ändert sich das Verhältnis vom Ausgangsrechteck zum Päckchen, wenn andere Rechteckformate benutzt werden? Weiter Fragen können sich anschließen.

Literatur

[1] Kasahra, Kunihiko: *Origami ohne Grenzen*. Knauer, 2004.

[2] Schmitz, Michael: *Mathegami - Winkeldreiteilung*. www.erfolgreichesLernen.de.

[3] Schmitz, Michael: *Mathegami - Würfelverdopplung*. www.erfolgreichesLernen.de.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.erfolgreichesLernen.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.