MATHEGAMI
Mathematik - Origami - Unterricht

www.erfolgreichesLernen.de September 2009

Vom Quadrat zum Würfel

– Variante 1 –

Michael Schmitz

Zusammenfassung
In diesem kleinen Beitrag geht es um die räumliche Erfassung des Würfels, wie er aus sechs quadratischen Flächen und 12 Scharnieren (Kanten) entsteht. Experimente mit Würfelnetzen sind dabei möglich.

Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen sind drei Blatt DIN A4-Papier, die jeweils in zwei Blatt DIN A5-Papier geteilt werden, wie es im Bild 1a gezeigt ist. Wir beschreiben hier die weitere Arbeit mit einem DIN A5-Papier, die anderen Blätter werden anschließend genau so bearbeitet.

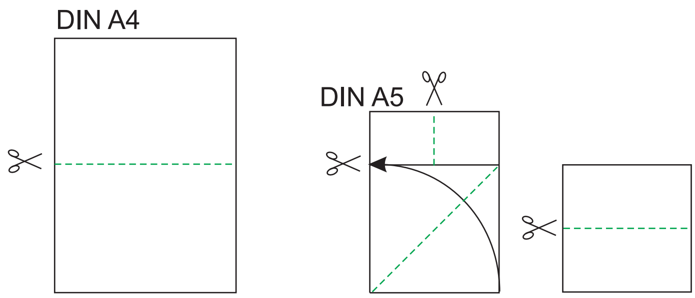

Bild 1a Bild 1b Bild 1c

Vom DIN A5-Papier wird ein Quadrat abgetrennt, wie es im Bild 1b gezeigt ist. Auch das übrig gebliebene Rechteck wird noch benötigt. Es wird in der Länge halbiert und anschließend werden diese beiden Rechtecke zur Seite gelegt.
Nun wird das Quadrat, wie im Bild 1c gezeigt, parallel zu einer Kante halbiert. Damit sind aus dem Quadrat zwei Rechtecke entstanden, die beide doppelt so lang wie breit sind. Aus diesen beiden Rechtecken entsteht nun ein Quadrat.

Dazu markieren wir in jedem dieser beiden Rechtecke, jeweils auf einer längeren Rechteckseite, einen Punkt X, wie es im Bild 2a gezeigt ist. Nun werden die kurzen Rechteckseiten an den Punkt X herangefaltet (Bild 2b), sodass aus jedem der beiden Rechtecke ein Quadrat entsteht.

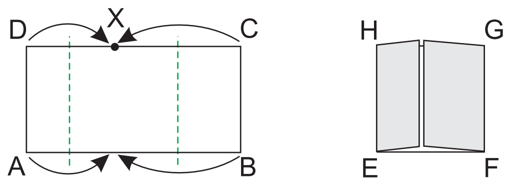

Bild 2a Bild 2b

Dass es sich dabei tatsächlich um Quadrate handelt, ergibt sich aus der Eigenschaft der Ausgangsrechtecke, bei denen eine Seite doppelt so lang wie die andere Seite ist. Durch das Zusammenfalten kommt die jeweils längere Rechteckseite doppelt auf sich zu liegen, womit sich deren Längen halbieren. Dadurch entstehen Vierecke mit jeweils vier gleich langen Seiten. Aufgrund des Faltens sind die beiden Vierecke auch rechtwinklig und damit Quadrate.

Nun werden diese beiden Rechtecke, die zu jeweils einem Quadrat zusammengefaltet wurden, zu einem einzigen Quadrat vereint. Dieser Vorgang ist den Bildern 3a bis 3d zu entnehmen.

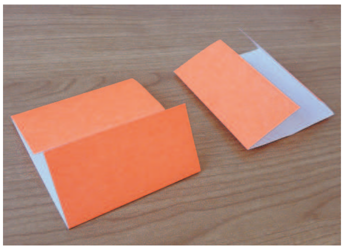

Bild 3a

Bild 3b

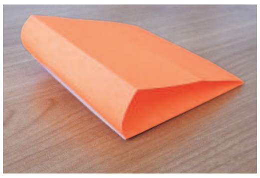

Bild 3c

Bild 3d

Das Besondere an diesem Quadrat ist, dass es an jeder Seite eine ‘Tasche’ gibt, in die später ‘Scharniere’ eingefügt werden können. Ein ähnliches Modul wird in [1] beschrieben.

Außerdem besteht dieses Quadrat aus vier Schichten, womit sein Flächeninhalt ein Viertel des Flächeninhaltes des Ausgangsquadrates ist.

Aus den zur Seite gelegten kleinen Rechtecken werden nun, die bereits angesprochenen ‘Scharniere’ hergestellt. Dazu werden diese beiden Rechtecke parallel zur längeren Kante in der Mitte zusammen und anschließend wieder auseinander gefaltet.

Nun werden die anderen fünf DIN A5-Papiere genauso, wie oben beschrieben, bearbeitet, damit wir insgesamt sechs kleine Quadrate und 12 Scharniere zur Verfügung haben.

Diese Quadrate lassen sich nun mit den Scharnieren verbinden, wie es im Bild 4a und 4b zu sehen ist. Eventuell muss man diese Scharniere in der Länge etwas kürzen, damit sie gut in die Taschen der Quadrate eingefügt werden können.

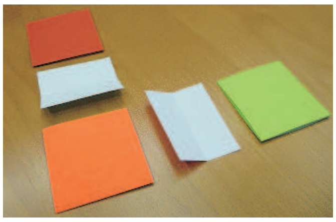

Bild 4a

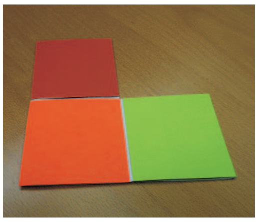

Bild 4b

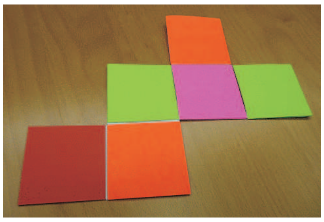

Bild 4c

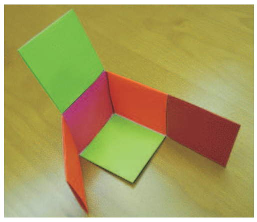

Bild 4d

Nun kann man die sechs Quadrate mit den Scharnieren verschieden zusammensetzen und versuchen, diese zu einem Würfel zu falten. Dabei wird der Begriff des Würfelnetzes (allgemein Körpernetzes) deutlich. Nicht jede Zusammenstellung der sechs Quadrate ergibt einen Würfel. In den Bildern 4c und 4d ist ein solches Würfelnetz und das Zusammenfalten dargestellt.

Bild 5 zeigt den fertigen Würfel.

Die Herstellung dieses Würfels habe ich oft mit Schülern, die Probleme beim Lernen von Mathematik hatten, gemacht. Dabei wurde diesen Schülern insbesondere deutlich, dass sich ein Würfel aus sechs gleichgroßen Quadraten zusammensetzt und dazu 12 Kanten (Scharniere) benötigt werden. Auch die Diskussion über den Flächeninhalt der kleinen Quadrate regte in natürlicher Weise Argumentieren und Begründen an, ohne dies direkt in den Vordergrund zu stellen.
Auch trug das Bauen dieses Würfels zur Weiterentwicklung von Feinmotorik und räumlichen Vorstellungsvermögen bei.

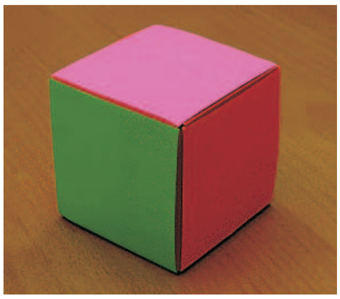

Bild 5

Nebenbei ergab sich zwangsläufig auch die Frage nach allen möglichen Würfelnetzen, das Ergebnis zeigt Bild 6. Dabei haben wir auch die Anzahl der notwendigen Scharniere in jedem Würfelnetz gezählt. Wir haben festgestellt, dass immer fünf Scharniere benötigt werden um sechs gleichgroße Quadrate zu einem Würfelnetz zusammenzusetzen. Das bedeutet aber auch, dass in einem Würfel immer sieben Kanten (die man natürlich nicht beliebig wählen kann) aufgeschnitten werden müssen, um den Würfel in ein Würfelnetz zu verwandeln.

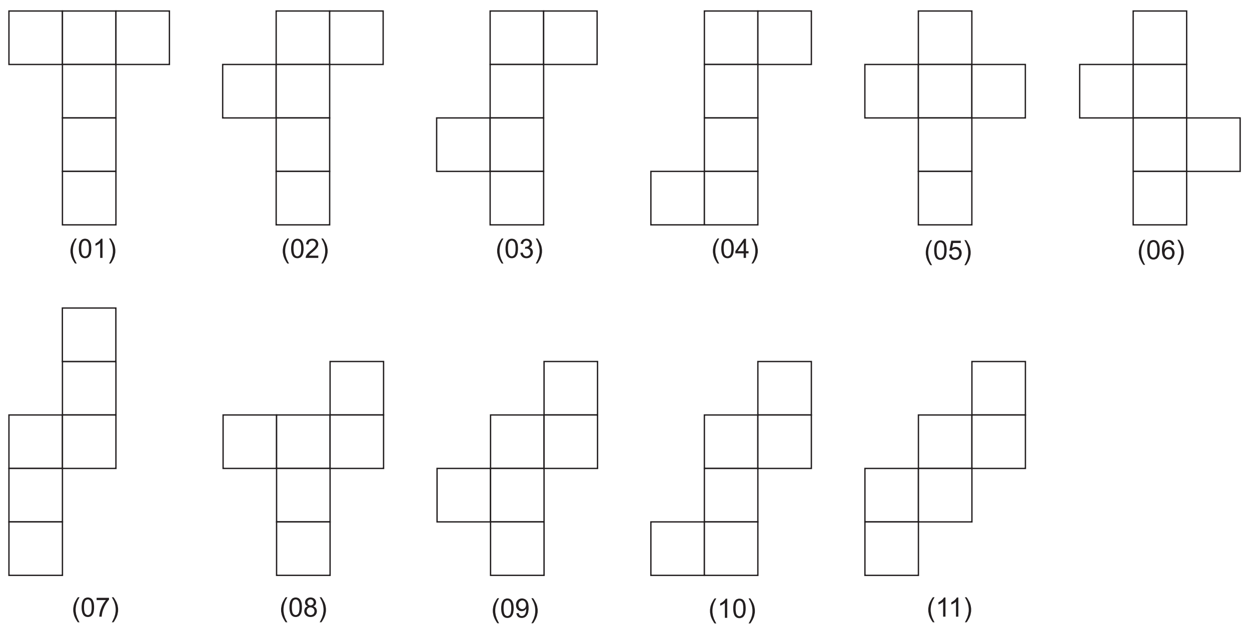

Bild 6

Daran schloss ich die Frage an, ob es auch eine Möglichkeit gibt, diese sieben Kanten hintereinander, ohne die Schere abzusetzen, aufschneiden kann. Wir haben festgestellt, dass dies nur für die drei Würfelnetze (01), (04) und (07) möglich ist. Im Bild 7 sind die zugehörigen Schnitte an einem Schrägbild eines Würfels gezeigt.

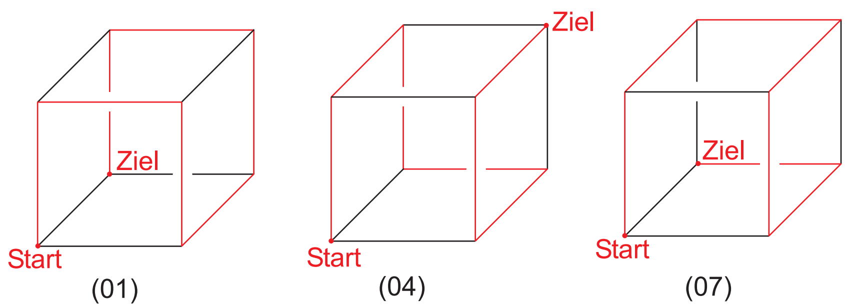

Bild 7

Literatur

[1] Fuse, Tomoko: *Unit Polyhedron Origami*. Japan Pubn, 2006.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.erfolgreichesLernen.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.