MATHEGAMI
Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de Februar 2010

Winkeldreiteilung

Michael Schmitz

Zusammenfassung
Im folgenden Beitrag geht es um die Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Da eine solche Konstruktion nicht möglich ist, wird eine Winkeldreiteilung nach Archimedes mit Zirkel und Einschiebelineal angegeben. Dabei spielt das ‘Einpassen’ einer vorgegebenen Strecke eine wichtige Rolle. Anschließend wird eine Faltkonstruktion zur Winkeldreiteilung angegeben, bei der ebenfalls das ‘Einpassen’ einer vorgegebenen Strecke notwendig ist. Die Richtigkeit der beiden Konstruktionen ist mit Mitteln der Schulgeometrie leicht zu beweisen.

Die Teilung eines Winkels in drei gleichgroße Teile mit Hilfe von Zirkel und Lineal ist eines der großen Probleme der klassischen griechischen Geometrie. Dabei versteht man unter Zirkel und Lineal ideale Zeicheninstrumente.

Mit einem Lineal lassen sich Geraden zeichnen. Insbesondere kann man mit einem Lineal die Gerade durch zwei gegebene Punkte zeichnen. Das ‘ideale’ Lineal hat keine Einteilung, ist also nicht zum Messen geeignet.

Mit dem Zirkel kann man nur um einen gegebenen Punkt einen Kreis mit gegebenem Radius bzw. durch einen anderen Punkt zeichnen. Der Radius ist dabei durch eine gegebene Strecke vorgegeben und nicht etwa als Maßangabe.

Dass man auch die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal versucht hatte, hat sicher auch damit zu tun, dass jede gegebene Strecke AB mit Zirkel und Lineal in n kongruente Teile zerlegt werden kann, wie es im Bild 1 für $n = 3$ zu sehen ist. Auch das Halbieren eines Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal ist bekanntlich problemlos möglich, wie es im Bild 2 gezeigt wird. Warum sollte das Teilen eines Winkels mit Hilfe von Zirkel und Lineal in n kongruente Stücke nicht möglich sein? Bei dieser Problematik stießen die griechischen Geometer an ihre Grenzen und fanden keine mögliche Konstruktion für die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal.

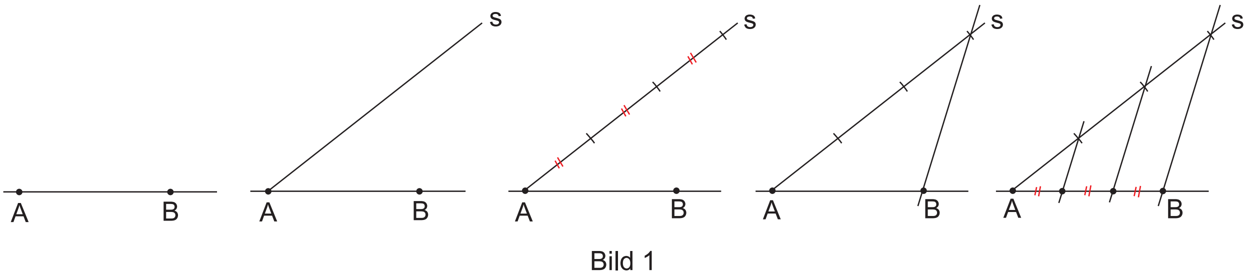

Bild 1

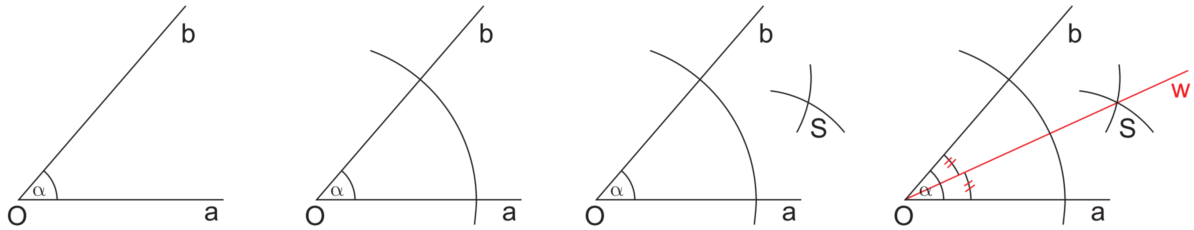

Bild 2

Erst durch Anwendung moderner algebraischer Methoden konnte 1837 der französische Mathematiker Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) allgemein zeigen, dass die Winkeldreiteilung mit Hilfe von Zirkel und Lineal prinzipiell nicht möglich ist (vgl. [1], [5]). Trotzdem tauchen immer wieder Konstruktionen auf, die eine Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal angeblich ermöglichen. So schreibt Underwood Dudley in [3], dass er als Reaktion auf sein Buch A Budget of Trisections eine Vielzahl von 'Lösungen' des Winkeldreiteilungsproblems bekommen hat. Was er davon hält, teilt er aber nicht mit.

Davon unabhängig gibt es spezielle Winkel, z.B. 90^o, die sich mit Zirkel und Lineal dritteln lassen, wie es im Bild 3 gezeigt ist.

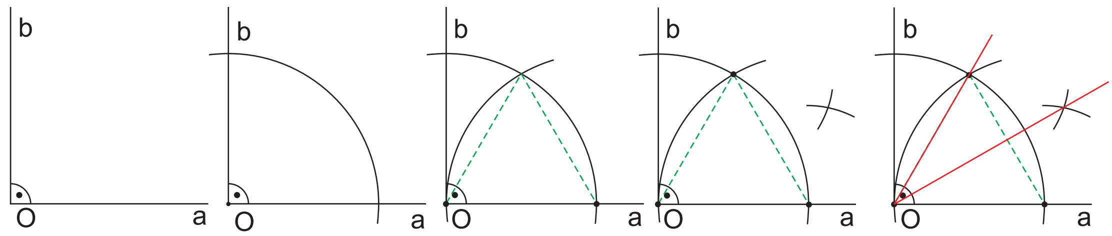

Bild 3

Aber bereits die griechischen Mathematiker der Antike hatten zusätzliche Zeicheninstrumente, mit denen die Winkeldreiteilung möglich wurde. Eines dieser Instrumente ist das Einschiebelineal, welches ein normales Lineal ist, auf dem zwei Markierungen angebracht sind (Bild 4).

Bild 4

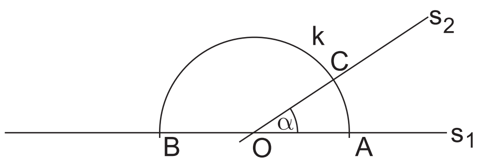

Bild 5a

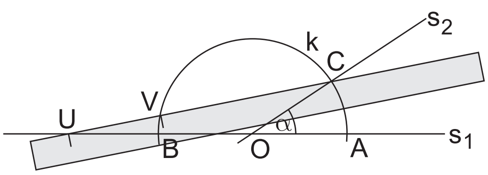

Bild 5b

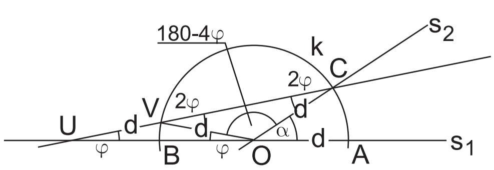

Bild 5c

Nun beschreiben wir nach Archimedes (vgl. [4], S.92), wie man einen vorgegebenen Winkel der Größe $\alpha < 90^o$ mit Zirkel und Einschiebelineal in drei zueinander kongruente Teile teilt. Dazu bezeichnen wir den Abstand der beiden Markierungen auf dem Einschiebelineal mit d. Um den Scheitel O des Winkels α wird ein Kreis k mit dem Radius d gezeichnet, der den Schenkel s_1 des Winkels in A und dessen Verlängerung über O hinaus in B schneidet. C ist der Schnittpunkt des gezeichneten Kreises mit dem zweiten Schenkel s_2 des Winkels α (Bild 5a). Nun kommt das Einschiebelineal zum Einsatz (Bild 5b). Es wird so in die Figur 'eingepasst', dass das Einschiebelineal durch C geht, eine Markierung auf dem Kreis k und die andere Markierung auf OB^+ liegen. Die Position der beiden Markierungen bezeichnen wir mit U und V. Nun sind wir mit der Dreiteilung von α fertig, denn $|\sphericalangle BUV| = \frac{1}{3}\alpha$.

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich leicht nachprüfen. Dazu verbinden wir nur noch O mit V und bezeichnen den Winkel $\sphericalangle OUV$ mit φ.
Weil OUV ein gleichschenkliges Dreieck ist, ist auch

$|\sphericalangle UOV| = \varphi$ und damit $|\sphericalangle OVU| = 180^o - 2\varphi$, woraus sich $|\sphericalangle OVC| = 2\varphi$ ergibt. Da auch VOC ein gleichschenkliges Dreieck ist, ist auch $|\sphericalangle OCV| = 2\varphi$ und damit auch $|\sphericalangle VOC| = 180^o - 4\varphi$. Betrachten wir nun die Winkel in O. Es ist $\varphi + (180^o - 4\varphi) + \alpha = 180^o$, woraus sich sofort $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$ ergibt. Damit ist die Behauptung bewiesen und die Winkeldreiteilung mit Hilfe des Einschiebelineals gelungen.

Neben dem Einschiebelineal gibt es noch weitere Methoden zur Winkeldreiteilung, die z.B. in [2] beschrieben sind.

Im Folgenden soll noch die Möglichkeit der Winkeldreiteilung mit Hilfe des Faltens von Papier beschrieben werden.
Wir gehen von einem Rechteck $ABCD$, z.B. einem DIN-A4-Blatt, aus und legen zuerst den Winkel α fest, der zu dritteln ist. Dazu falten wir in das Rechteck $ABCD$ eine beliebige Faltlinie s, die durch die Ecke A geht. Im Bild 6a ist so gefaltet, dass diese Faltlinie die Seite DC in S schneidet. Dann sei $\sphericalangle SAB$ der zu drittelnde Winkel α.
Um diese Winkeldreiteilung durchzuführen, falten wir $ABCD$ parallel zu AB beliebig. Es entstehen die Punkte E und F auf AD bzw. BC. Diese Faltung wird nun wieder rückgängig gemacht. Nun wird AB auf EF gefaltet, wodurch die Punkte G und H auf AD bzw. BC entstehen. Auch diese Faltung wird wieder rückgängig gemacht.
Nun kommt auch hier das 'Einpassen'. Die Rechteckseite AD wird so umgefaltet, dass A auf GH und gleichzeitig E auf s zu liegen kommt (Bild 6b). A' und E' bezeichnen die Bildpunkte von A und E. Bei dieser Faltung geht auch G nach G'. K und L sind die Schnittpunkte dieser Faltlinie mit AD bzw. AB.
Nun falten wir das Blatt wieder auf und verbinden (mit einem Lineal oder durch Falten) den Punkt A mit A' und mit G' (Bild 6c). Dann ist $|\sphericalangle BAA'| = |\sphericalangle A'AG'| = |\sphericalangle G'AE'| = \frac{1}{3}\alpha$ und die Winkeldreiteilung des Winkels α ist beendet.

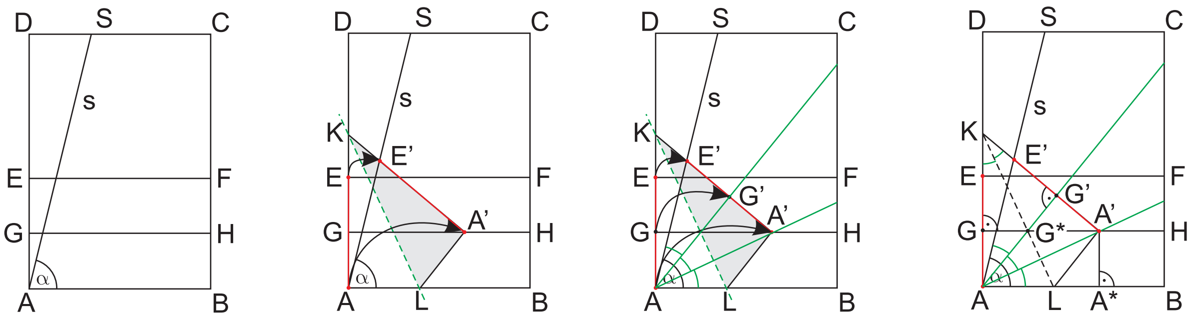

Bild 6a Bild 6b Bild 6c Bild 6d

Diese Behauptung soll nun bewiesen werden. Dazu betrachten wir das Faltmuster im Rechteck $ABCD$ mit den eingezeichneten Verbindungslinien AA' und AG' (Bild 6d). Die Faltlinie KL ist auch eine Spiegelachse, bei der A, E, G Original- und A', E', G' die zugehörigen Bildpunkte sind. Auch A' kann als Originalpunkt aufgefasst werden, für den dann A der zugehörige Bildpunkt ist. Folglich wird die Gerade $g(GA')$ auf die Gerade $g(AG')$ abgebildet und damit schneiden sich diese beiden Geraden in einem Punkt G^* auf der Spiegelachse KL.
Aufgrund dieser Spiegelung ist wegen $HG \perp AD$ auch $AG' \perp A'K$.

Nun fällen wir das Lot von A' auf AB. A^* bezeichnet den zugehörigen Lotfußpunkt. Dann ist klar, dass $|A'A^*| = |A'G'| = |G'E'|$ ist. Folglich ist $AA^*A' \cong AA'G'$, da beide Dreiecke rechtwinklig sind, in AA' übereinstimmen und $|A'A^*| = |A'G'|$ ist (Ssw). Damit ist auch $|\sphericalangle A^*AA'| = |\sphericalangle A'AG'|$.
Ebenso ist $AA'G' \cong AG'E'$, da auch diese beiden Dreiecke rechtwinklig sind, in AG' übereinstimmen und $|A'G'| = |G'E'|$ ist (sws). Damit ist auch $|\sphericalangle A'AG'| = |\sphericalangle G'AE'|$.
Insgesamt ergibt sich also $|\sphericalangle A^*AA'| = |\sphericalangle A'AG'| = |\sphericalangle G'AE'| = \frac{1}{3}\alpha$.
Damit ist aber die Faltkonstruktion zur Winkeldreiteilung bewiesen.

Die Winkelgröße $\frac{1}{3}\alpha$ tritt auch noch am Punkt K auf. Weil $KL \perp AA'$ und $KA' \perp AG'$ ist, ist auch $|\sphericalangle LKA'| = |\sphericalangle A'AG'|$ und wegen der Spiegelung an KL folgt dann $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle LKA'| = \frac{1}{3}\alpha$.

Nun wenden wir uns noch einmal der Faltkonstruktion zu, die im Bild 6d zu sehen ist und analysieren diese, mit den eben gefundenen Eigenschaften weiter. Dadurch können wir historische Instrumente zur Winkeldreiteilung “nachentdecken”.

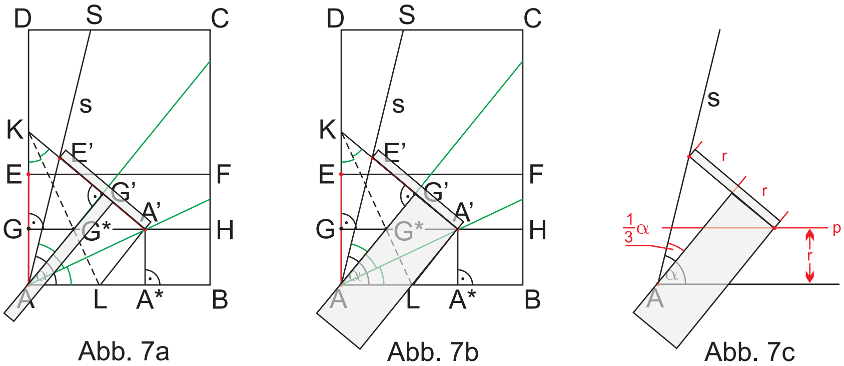

Abb. 7a Abb. 7b Abb. 7c

Zuerst bemerken wir, dass $|E'G'| = |G'A'| = r$ und AG' senkrecht zu $E'A'$ ist und durch den Scheitel A des zu dreiteilenden Winkels geht. Außerdem liegt A’ auf der Parallelen GH im Abstand r zu einem Schenkel des Winkels, während E' auf dem anderen Schenkel des Winkels liegt. Nutzen wir diese Eigenschaften zur Anfertigung eines “Zeicheninstrumentes” zur Winkeldreiteilung, indem wir zwei zueinander senkrechte Pappstreifen, wie im Bild 7a zu sehen ist, miteinander verbinden. Dann können wir mit diesem Instrument Winkel dreiteilen, in dem wir zuerst eine Parallele im Abstand r zu einem Schenkel des Winkels zeichnen und dann das Instrument so einpassen, wie es im Bild 7a zu sehen ist. Damit das Zeichnen der Parallelen einfacher wird, können wir noch den Schenkel des Instruments, der durch den Scheitel des Winkels gehen soll, auf die Breite r vergrößern. Das neue Zeicheninstrument zeigt Bild 7b und im Bild 7c sehen wir seine Anwendung. Nach [2] wurde dieses Instrument bereits von Nicholson im Jahre 1883 verwendet.

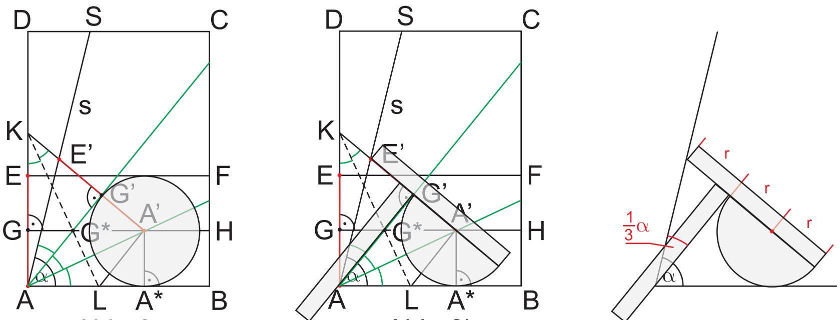

Abb. 8a Abb. 8b Abb. 8c

Nun bemerken wir weiter, dass auch $|A'A^*| = r$ ist und $A'A^*$ senkrecht auf AB ist. Das heißt, dass wir um A' einen Kreis mit dem Radius r zeichnen können, der durch G' und $A*$ geht und für den AA^* und AG' Tangenten sind (Bild 8a). Ergänzen wir diesen Kreis durch zwei Rechtecke, wie dies im Bild 8b zu sehen ist, so entsteht ein neuer Winkeldreiteiler. Auch dieser Winkeldreiteiler wird in [2] beschrieben, in [6] wird er als “Tomahawk” bezeichnet. Die Handhabung dieses Zeicheninstrumentes geht aus Bild 8c hervor.

Literatur

[1] Baptist, Peter: *Winkeldreiteilung und Trisektierer.* In: PM 29 (1987) Nr.1.

[2] Breidenbach, Walter: *Die Dreiteilung des Winkels.* B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951.

[3] Dudley, Underwood: *Mathematik zwischen Wahn und Witz.* Birkhäuser Verlag, 1995.

[4] Gericke, Helmuth: *Mathematik in Antike und Orient; Mathematik im Abendland.* Fourier Verlag GmbH; Auflage: 4, 1996.

[5] Kaiser, Hans; Nöbauer, Wilfried: *Geschichte der Mathematik.* Oldenbourg, 2002.

[6] Steinhaus, Hugo: *100 neue Aufgaben.* Leipzig, 1973.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.